应用数学和力学，第8卷第11期（1987年11月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

有积分算子的非线性发展方程的空间周期分叉解及其稳定性*

陆 启 韶

（北京航空学院，1986年7月19日收到）

摘　　要

本文研究比较一般的有积分算子的非线性发展方程的空间周期分叉解及稳定性问题。首先分别研究分叉解存在的必要条件和充分条件，然后用算子半群方法分析平衡解的稳定性，并讨论了稳定性交换原则。最后研究一个应用例子，对有指数型积分算子的情形得到具体结果。

一、引　　言

在非线性微分方程问题中，对解的分叉的研究有着重要的意义，并且与解的稳定性研究密切联系。在这方面，除了对平衡态系统（如常微分方程的边值问题、椭圆型方程的边值问题、积分方程等）和有限维动态系统的解的分叉问题已有大量研究之外，对无限维动态系统（如非线性反应-扩散方程组、流体力学方程组、非线性积分-微分方程等）的解的分叉和稳定性问题也受到越来越广泛的重视。在流体力学、化学反应、统计物理、天体物理和生态学等会遇到有积分算子的非线性平衡态方程或非线性发展方程的解的分叉和稳定性问题。平衡态方程的分叉解可以看作相应的发展方程的静态分叉解，这对于研究分叉平衡解的稳定性往往是方便的。

本文研究相当广泛的一类有积分算子的非线性发展方程的空间周期静态分叉解及其稳定性。首先利用泛函分析的方法给出静态分叉解出现的必要条件，并研究其存在性。然后用算子半群方法分析了平衡解的稳定性，因讨论基本解与分叉解的稳定性交换原则。最后作为应用的例子，对在[1]、[2]中出现的有指数型积分算子的情形得到比较系统的结果。

令H为在$(-\infty,\ \infty)$上定义的周期为l的实周期函数$\varphi(x)$全体的集合。它们满足$\int_0^l |\varphi|^2 dx<\infty$。在$H$上定义内积

$$(\varphi_1,\ \varphi_2)\triangleq\int_0^l \varphi_1\varphi_2 dx \qquad (\varphi_1,\ \varphi_2\in H)$$

于是H是一个实Hilbert空间。在H上定义范数

* 郭仲衡推荐。国家自然科学基金资助课题。

$$\|\varphi\|=(\varphi,\ \varphi)^{1/2}=\left(\int_0^l|\varphi|^2dx\right)^{1/2}\qquad(\varphi\in H)$$

二、周期分叉解的一般结果

本文研究下面形式的在H上的非线性发展方程：

$$\frac{du}{dt}=G(u;h)+\beta u+\omega\equiv F(u;h)\qquad(t>0)\tag{2.1}$$

其中$u:[0,\ \infty)\to H$，它对固定的$t>0$是x的周期函数，且它在$t\geqslant0$时对t连续，在$t>0$时对t连续可微。$G:H\times\mathbf{R}\to H$是一个非线性积分算子：

$$G(u;\ h)\triangleq\alpha\int_{-\infty}^{\infty}d\xi\int_h^{u(t,\xi)}g[\xi-x,\ \eta-u(t,\ x)]d\eta\tag{2.2}$$

我们在下面总是假设实函数g满足下面的条件：

（i） $g(\xi,\eta)\in C^1(\mathbf{R})$，$g'_\eta(\xi,\eta)\in L'(\mathbf{R}^2)$；

（ii） $g(\xi,\eta)=g(-\xi,\ -\eta)$； (2.3)

（iii） 当$r=\sqrt{\xi^2+\eta^2}\to\infty$时，有$g(\xi,\ \eta)=O(\exp[-r^2])$ (2.4)

在(2.1)及(2.2)中的常数α，β和参数h都是实数，$\omega=\alpha\int_{-\infty}^{\infty}d\xi\int_0^h g(\xi,\ \eta)d\eta$。

显然$u=0$是(2.1)的一个平凡解，称为基本解。现在研究是否对于参数h的某些数值存在从基本解分出去的分叉解。如果对于某个$\bar h$值，使得当h在$\bar h$的某个邻域内时，(2.1)存在非平凡解u，并满足$\lim\limits_{h\to\bar h}u=0$，则称$\bar h$是(2.1)的一个分叉点，而此非平凡解$u$是在$\bar h$处从基本解分出去的一个连续分叉解。本文着重讨论非线性方程(2.1)的空间周期静态连续分叉解，即分叉解$u\in H$与t无关的情形。这个静态分叉解$u=u(x;h)$满足非线性积分方程（即(2.1)的平衡态方程）

$$F(u;h)=0\qquad(u\in H)\tag{2.5}$$

计算表明，F的Fréchet微分是

$$F'_u(u;h)\varphi=\alpha\int_{-\infty}^{\infty}g(\xi-x,\ u(\xi)-u(x))\varphi(\xi)d\xi$$
$$-\alpha\left(\int_{-\infty}^{\infty}d\xi\int_h^{u(\xi)}g'_\eta(\xi-x,\ \eta-u(x))d\eta\right)\varphi(x)\qquad(\varphi\in H)$$

于是当g满足假设条件（i）和(iii)时，F是Fréchet连续可微的。

由分叉的一般理论（例如见[3]、[4]）得知，$\bar h$是方程(2.5)的分叉点的必要条件是F在$(0,\ \bar h)$处的Fréchet导数$F'_u(0;\ \bar h)$应当是奇异的。从而知道，对于参数h的任何数值有

$$F'_u(0;\ h)\varphi=[L-(\gamma(h)-\beta)I]\varphi\qquad(\varphi\in H)\tag{2.6}$$

其中线性积分算子

$$L\varphi\triangleq\alpha\int_{-\infty}^{\infty}g(\xi-x,\ 0)\varphi(\xi)d\xi\tag{2.7}$$

及函数

$$\gamma(h)\triangleq\alpha\int_{-\infty}^{\infty}d\xi\int_{h}^{0}g'_{\eta}(\xi,\ \eta)d\eta \tag{2.8}$$

因此 $\bar{h}$ 是方程(2.1)的静态分叉点的必要条件是：算子 $L-(\gamma(\bar{h})-\beta)I$ 是奇异的，即

$$\gamma(\bar{h})-\beta\in\sigma(L)$$

这里 $\sigma(L)$ 表示算子 L 的谱。

我们先研究线性算子 L 的性质。

引理 1 L 是 H 上的有界线性算子。

根据 L 的定义(2.7)，易知当 φ 有周期 l 时，$L\varphi$ 也有周期 l。

此外，对于 $x\in[0,\ l]$，$\varphi\in H$，考虑到 φ 的周期性有

$$|L\varphi|^2=\alpha^2\left|\int_{-\infty}^{\infty}g(\xi-x,\ 0)\varphi(\xi)d\xi\right|^2$$

$$\leqslant\alpha^2\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left|\int_0^l g(\xi+kl-x,\ 0)\varphi(\xi)d\xi\right|\right]^2$$

$$\leqslant\alpha^2\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\int_0^l|g(\xi+kl-x,\ 0)|^2d\xi\int_0^l|\varphi(\xi)|^2d\xi\right)^{1/2}\right]^2$$

由(2.4)可知，存在常数 $M>0$，使得 $|g(\xi,\eta)|<M\exp[-r^2]$，于是

$$|L\varphi|^2\leqslant M^2\alpha^2\|\varphi\|^2\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\int_0^l\exp[-2(\xi+kl-x)^2d\xi\right)^{1/2}\right]^2$$

由于 $|\xi-x|\leqslant l$，故当 $|k|\geqslant1$ 时有

$$(\xi+kl-x)^2\geqslant(k-1)^2l^2$$

由此可知

$$|L\varphi|^2\leqslant M^2\alpha^2\|\varphi\|^2\left[l^{1/2}+2\sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_0^l\exp[-2(k-1)^2l^2]d\xi\right)^{1/2}\right]^2$$

$$=M^2\alpha^2l\|\varphi\|^2\left[1+2\sum_{k=1}^{\infty}\exp[-(k-1)^2l^2]\right]^2$$

$$=CM^2\alpha^2l\|\varphi\|^2$$

其中 $C=1+2\sum\limits_{k=1}^{\infty}\exp[-(k-1)^2l^2]<\infty$。于是

$$\|L\varphi\|^2=\int_0^l|L\varphi|^2d\xi\leqslant CM^2\alpha^2l^2\|\varphi\|^2<\infty \tag{2.9}$$

从而 L 是 H 上的有界线性算子。

引理 2 L 是 H 上的自伴紧算子。

由于线性积分算子 L 的核 $g(\xi-x,\ 0)$ 是实对称的（见(2.3)式），因此 L 是 H 上的自伴算子。

下面证明 L 是 H 上的紧算子。为此取 H 的一个规范正交完全系

$$\{\psi_\nu\}\triangleq\{\psi_0,\ \psi_m^{(1)},\ \psi_m^{(2)}\}，\text{其中整数 } m\geqslant 1 \tag{2.10}$$

其中 $\psi_m^{(1)}=\sqrt{\frac{2}{l}}\cos\frac{2\pi m}{l}x$, $\psi_m^{(2)}=\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{2\pi m}{l}x$, 及 $\psi_0=\frac{1}{\sqrt{l}}$. 由泛函分析理论可知,如果

$$\|L\|^2\triangleq\sum_\nu\|L\psi_\nu\|^2<\infty \tag{2.11}$$

则 L 是紧算子. 为此估计 $\|L\|^2$. 对于 $x\in[0,l]$，有

$$|L\psi_m^{(1)}|^2=\frac{2\alpha^2}{l}\left|\int_{-\infty}^{\infty}g(\xi-x,\ 0)\cos\frac{2\pi m}{l}\xi d\xi\right|^2$$

$$\leqslant\frac{2\alpha^2M^2}{l}\left|\int_{-\infty}^{\infty}\exp[-(\xi-x)^2]\cos\frac{2\pi m}{l}\xi d\xi\right|^2$$

$$=\frac{2\alpha^2M^2}{l}\left|\int_{-\infty}^{\infty}\exp[-\zeta^2]\cos\frac{2\pi m}{l}(\zeta+x)d\zeta\right|^2$$

$$=\frac{2\alpha^2M^2}{l}\left|\cos\frac{2\pi m}{l}x\int_{-\infty}^{\infty}\exp[-\zeta^2]\cos\frac{2\pi m}{l}\zeta d\zeta\right.$$

$$\left.-\sin\frac{2\pi m}{l}x\int_{-\infty}^{\infty}\exp[-\zeta^2]\sin\frac{2\pi m}{l}\zeta d\zeta\right|^2$$

$$\leqslant\frac{2\pi\alpha^2M^2}{l}\exp\left[-\frac{2\pi^2m^2}{l^2}\right]$$

因此

$$\|L\psi_m^{(1)}\|^2=\int_0^l|L\psi_m^{(1)}|^2d\xi\leqslant 2\pi\alpha^2M^2\exp\left[-\frac{2\pi^2m^2}{l^2}\right]$$

同理

$$\|L\psi_m^{(2)}\|^2\leqslant 2\pi\alpha^2M^2\exp\left[-\frac{2\pi^2m^2}{l^2}\right]$$

此外

$$\|L\psi_0\|^2=\int_0^l|L\psi_0|^2d\xi=\pi\alpha^2$$

综上所述，便得到

$$\|L\|^2\leqslant\pi\alpha^2+4\pi\alpha^2M^2\sum_{m=1}^{\infty}\exp\left[-\frac{2\pi^2m^2}{l}\right]<\infty$$

于是 L 是 H 上的紧算子.

根据有界的自伴紧线性算子的谱性质，并考虑到H是无限维空间，便得到L的谱$\sigma(L)$的性质如下：

理引 3 L 的非零谱由可数个分立的实特征值 $\lambda_m\neq 0$ ($m\in$某个可数集K) 组成，L 的对应于 λ_m 的特征子空间 $\mathcal{N}_m=\mathcal{N}(L-\lambda_m I)$的维数 k_m 是有限的；此外，$0\in\sigma(L)$，且是特征值集合$\{\lambda_m\}$的唯一可能的聚点.

顺便指出，由于 L 是自伴算子，其剩余谱不存在，故 0 只可能是 L 的特征值或连续谱点

根据静态分叉点 $\bar{h}$ 必须满足 $\gamma(\bar{h})-\beta\in\sigma(L)$ 这一必要条件，可以得到下面的定理：

定理 1 若方程(2.1)的基本解 $u=0$ 在 $\bar{h}$ 处出现周期静态分叉，则 $\bar{h}$ 必须满足

$$\gamma(\bar{h})=\beta+\lambda_m \qquad (m\in K) \tag{2.12}$$

或

$$\gamma(\bar{h})=\beta \tag{2.13}$$

我们分别记满足(2.12)和(2.13)的 $\bar{h}$ 值为 $\bar{h}_m(m\in K)$ 和 $\bar{h}_\infty$。

然后我们进一步讨论在 $\bar{h}_m(m\in K)$ 处出现周期静态分叉的充分性条件。如果 0 是 L 的特征值，则下面的讨论对 $\bar{h}_\infty$ 也适用；但如果 0 是 L 的连续谱点，则需要另作专门讨论。

定理 2 如果 $\gamma'(\bar{h}_m)\neq 0$，则可以适当引入小参数 ε，使得对充分小的 $|\varepsilon|$，存在对 ε 连续可微的非平凡空间周期解 $u=u(\varepsilon)\in H$，以及 $h=h(\varepsilon)$，它们满足 $u(0)=0$，$h(0)=\bar{h}_m$，及 $F[u(\varepsilon);\ h(\varepsilon)]=0$。特别地，当 $h(\varepsilon)$ 的反函数存在时，方程(2.1)有在 $\bar{h}_m$ 处从基本解分出去的空间周期静态分叉解 $u=u(h)$。

下面记算子 $A_0(h)\triangleq L-(\gamma(h)-\beta)I$（即 $F'_u(0;\ h)$）。显然由(2.12)得知，当 $h=\bar{h}_m$ 时，$A_0(\bar{h}_m)=L-(\gamma(\bar{h}_m)-\beta)I=L-\lambda_m I$。于是 $A_0(\bar{h}_m)$ 的零空间 $\mathcal{N}(A_0(\bar{h}_m))$ 就是 $\mathcal{N}_m$，其维数为 k_m。令 $\mathcal{M}_m=\mathcal{N}_m^{\perp}$，并将 H 作直和分解：$H=\mathcal{N}_m\oplus\mathcal{M}_m$。由于 L 是自伴紧算子，故有 $\mathcal{N}_m=\mathcal{N}_m^*$，这里 $\mathcal{N}_m^*$ 是伴随算子 $A_0^*(\bar{h}_m)$ 的零空间，从而

$$\mathcal{M}_m=(\mathcal{N}_m^*)^{\perp}=\mathcal{R}(A_0(\bar{h}_m)) \tag{2.14}$$

即 $\mathcal{M}_m$ 是算子 $A_0(\bar{h}_m)$ 的值域。

令 P 和 Q 分别表示由 H 到 $\mathcal{N}_m$ 和 $\mathcal{M}_m$ 的正交投影算子。任何 $u\in H$ 都可以唯一地表示成

$$u=Pu+Qu=(u,\varphi_m)\varphi_m+Qu \tag{2.15}$$

其中 $\varphi_m\in\mathcal{N}_m$ 且 $\|\varphi_m\|=1$，$Qu\in\mathcal{M}_m$。如果 $u=u(x;\ h)$ 是连续分叉解，有 $\lim\limits_{h\to\bar{h}_m}\|u\|=0$，故 $\lim\limits_{h\to\bar{h}_m}(u,\varphi_m)=0$。因此我们取参数 $\varepsilon=(u,\varphi_m)$，于是把 u 写成

$$u=\varepsilon(\varphi_m+\psi) \tag{2.16}$$

其中 $\psi=\dfrac{1}{\varepsilon}Qu\in\mathcal{M}_m$。此外，令

$$h=\bar{h}_m+\varepsilon\sigma \tag{2.17}$$

这里的 φ_m，ψ 和 σ 都可以与 ε 有关。考虑到 $A_0(h)=F'_u(0;h)$，由 Fréchet 导数定义，有

$$F(u;h)=A_0(h)u+B(u;h) \tag{2.18}$$

其中非线性算子 $B:H\times\mathbf{R}\to H$ 满足[9]

$$\|B(u;h)\|=O(\|u\|^2) \tag{2.19}$$

由(2.8)式可知 $\gamma(h)$ 对 h 连续可微，因此 $A_0(h)$ 可写成

$$\begin{aligned}A_0(h)&=A_0(\bar{h}_m+\varepsilon\sigma)\\&=A_0(\bar{h}_m)+\varepsilon\sigma\gamma'(\bar{h}_m+\theta\varepsilon\sigma)I \qquad (0<\theta<1)\end{aligned} \tag{2.20}$$

将(2.16)至(2.20)各式代入(2.5)，得到

$$\begin{aligned}&\varepsilon A_0(\bar{h}_m)\psi+\varepsilon^2\sigma\gamma'(\bar{h}_m+\theta\varepsilon\sigma)(\varphi_m+\psi)\\&\qquad+B(\varepsilon(\varphi_m+\psi);\ \bar{h}_m+\varepsilon\sigma)=0\end{aligned} \tag{2.21}$$

这是 φ_m，ψ 和 σ 所应满足的抽象方程。

将投影算子 P 作用于(2.21)式，并考虑到 $\psi\in\mathcal{M}_m$，$A_0(\bar{h}_m)\psi\in\mathcal{R}(A_0(\bar{h}_m))=\mathcal{M}_m=\mathcal{N}_m^{\perp}$，

故有

$$\sigma\gamma'(\bar{h}_m+\theta\varepsilon\sigma)\varphi_m+P\bar{B}(\varepsilon(\varphi_m+\psi);\ \bar{h}_m+\varepsilon\sigma)=0 \tag{2.22}$$

其中 $\bar{B}(u;h)=\varepsilon^{-2}B(u;h)$。由(2.19)可知

$$\|\bar{B}(u;h)\|=O(1) \tag{2.23}$$

取(2.22)式与 φ_m 的内积，得到

$$\sigma\gamma'(\bar{h}_m+\theta\varepsilon\sigma)+(P\bar{B}(\varepsilon(\varphi_m+\psi);\ \bar{h}_m+\varepsilon\sigma),\ \varphi_m)=0 \tag{2.24}$$

再将投影算子 Q 作用于(2.21)式，由于 $\varphi_m\in\mathcal{N}_m=\mathcal{M}_m^{\perp}$，故有

$$A_0(\bar{h}_m)\psi+\varepsilon\sigma\gamma'(\bar{h}_m+\theta\varepsilon\sigma)\psi+\varepsilon Q\bar{B}(\varepsilon(\varphi_m+\psi);\ \bar{h}_m+\varepsilon\sigma)=0 \tag{2.25}$$

引入线性算子 $A_0(\bar{h}_m)$的伪逆算子 $\hat{T}:H\to\mathcal{M}_m$[3]

$$\hat{T}f=\begin{cases}0 & (\text{当 } f\in\mathcal{N}_m \text{ 时})\\ w\in\mathcal{M}_m & (\text{当 } f\in\mathcal{M}_m \text{ 时})\end{cases} \tag{2.26}$$

其中 w 是当 $f\in\mathcal{M}_m$ 时，方程 $A_0(\bar{h}_m)w=f$ 在 $\mathcal{M}_m$ 中的唯一解。将算子 $\hat{T}$ 作用于(2.26)式，有

$$\psi+\varepsilon\sigma\gamma'(\bar{h}_m+\theta\varepsilon\sigma)\hat{T}\psi+\varepsilon\hat{T}Q\bar{B}(\varepsilon(\varphi_m+\psi);\ \bar{h}_m+\varepsilon\sigma)=0 \tag{2.27}$$

在这里考虑到 $\psi\in\mathcal{M}_m$，故 $\hat{T}A_0(\bar{h}_m)\psi=\psi$。方程(2.5)等价于方程组(2.24)和(2.27)。

现在取非线性算子 $\mathcal{F}:H\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}\to H\times\mathbf{R}$ 如下：

$$\mathcal{F}(\psi,\sigma,\varepsilon)=\begin{pmatrix}\psi+\varepsilon\sigma\gamma'(\bar{h}_m+\theta\varepsilon\sigma)\hat{T}\psi+\varepsilon\hat{T}Q\bar{B}(\varepsilon(\varphi_m+\psi);\ \bar{h}_m+\varepsilon\sigma)\\ \sigma\gamma'(\bar{h}_m+\theta\varepsilon\sigma)+(P\bar{B}(\varepsilon(\varphi_m+\psi);\ \bar{h}_m+\varepsilon\sigma),\ \varphi_m)\end{pmatrix} \tag{2.28}$$

于是(2.27)和(2.24)又等价于

$$\mathcal{F}(\psi,\ \sigma,\ \varepsilon)=0 \tag{2.29}$$

若取 $\sigma_0=-[\gamma'(\bar{h}_m)]^{-1}(P\bar{B}(0;\ \bar{h}_m),\ \varphi_{m0})$，这里记 $\varphi_{m0}=\lim\limits_{\varepsilon\to0}\varphi_m$，由(2.28)式显然有 $\mathcal{F}(0,\ \sigma_0,\ 0)=0$。此外，由(2.28)见到$\mathcal{F}$对 ψ 和 σ 都是 Fréchet 连续可微的，$\mathcal{F}$在$(0,\ \sigma_0,\ 0)$处对$(\psi,\ \sigma)$的 Fréchet 导数为

$$\mathcal{F}'_{(\psi,\sigma)}(0,\ \sigma_0,\ 0)=\begin{pmatrix}I & 0\\ 0 & \gamma'(\bar{h}_m)\end{pmatrix} \tag{2.30}$$

如果 $\gamma'(\bar{h}_m)\neq0$，则 $\mathcal{F}'_{(\psi,\sigma)}(0,\ \sigma_0,\ 0)$存在有界逆算子。根据 Banach 空间中的隐函数存在定理[9]，在 $\varepsilon=0$ 的某个邻域$(-\varepsilon_1,\ \varepsilon_1)$内存在 $\sigma=\sigma(\varepsilon)$，$\psi=\psi(\varepsilon)\in\mathcal{M}_m$使得 $\sigma(0)=\sigma_0$，$\psi(0)=0$，且有$\mathcal{F}[\psi(\varepsilon),\ \sigma(\varepsilon),\ \varepsilon]=0$。$\sigma(\varepsilon)$和$\psi(\varepsilon)$对 ε 连续可微。当$\mathcal{N}_m$的维数 $k_m=1$ 时，φ_m 为$\mathcal{N}_m$的单位基向量；当 $k_m>1$ 时，φ_m 要由(2.22)解出(例如可用 Newton 图的技巧[4])。

取 $u=\varepsilon(\varphi_m+\psi)$，$h=\bar{h}_m+\varepsilon\sigma$，它们当$|\varepsilon|$足够小时满足方程 $F(u;\ h)=0$，且有$u(0)=0$，$h(0)\bar{h}=\bar{h}_m$。特别地，当$h(\varepsilon)$在$\varepsilon=0$的某个邻域内存在反函数时，非平凡解$u[\varepsilon(h)]$在$\bar{h}_m$的某个邻域内存在，它就是在 $\bar{h}_m$ 处从基本解 $u=0$ 分出去的静态分叉解。定理 2 证毕。

三、稳定性的一般结果

为了研究非线性发展方程(2.1)的平衡解（基本解或静态分叉解）$U(x)$的运动稳定性，

假设在 $t=0$ 时刻有一个初始扰动 $v_0\in H$，然后考察受扰解 $u(t,\ x)$ 随时间的变化性态。如果扰动很小，令 $v=u-U$，则 $v(t,\ x)$ 的变化将近似地由下面的线性化发展方程的初值问题给出（见[6]，[7]）：

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dv}{dt}=F'_u(U;\ h)v \qquad (t>0;\ v\in H)\\ &v|_{t=0}=v_0\end{aligned}\right\} \tag{3.1}$$

这就是一般在应用数学和力学文献中的线性化问题。我们利用线性算子半群的理论（例如见[8]）去研究无限维空间 H 上的抽象线性初值问题(3.1)。

通过计算得到

$$\begin{aligned}F'_u(U;\ h)\varphi&\triangleq A(h)\varphi\\ &=\alpha\int_{-\infty}^{\infty}g(\xi-x,\ U(\xi)-U(x))\varphi(\xi)d\xi\\ &\quad-\left[\alpha\int_{-\infty}^{\infty}d\xi\int_{h}^{U(\xi)}g'_\eta(\xi-x,\ \eta-U(x))d\eta\right]\varphi(x)+\beta\varphi(x)\\ &\equiv\widetilde{L}\varphi-(\Gamma(h)-\beta I)\varphi \qquad (\varphi\in H)\end{aligned} \tag{3.2}$$

在前面关于函数 g 的假设下，类似引理1那样可以证明，如果 $U(x)$ 是有界函数，则 $A(h)$ 是 H 上的有界线性算子。因此 $A(h)$ 是一个在 H 上一致连续的有界线性算子半群 $T(t;h)$ 的无穷小生成元，即 $T(t;h)=\exp[tA(h)]$，且对任何 h 都有 $\lim\limits_{t\to+0}\|T(t;h)-I\|=0$。对于给定的 h 值，(3.1)的解可写成

$$v=T(t;h)v_0=\exp[tA(h)]v_0 \qquad (t>0) \tag{3.3}$$

$v(t,x)$ 随时间变化的性态取决于 $A(h)$ 的谱 $\sigma(A(h))$ 的性质。利用(2.3)式易知 $A(h)$ 是自伴算子，其特征值是实数。

定理3 如果对于给定的 h 值有

$$\mu=\sup\{\mathrm{Re}\lambda:\lambda\in\sigma(A(h))\}<0 \tag{3.4}$$

则对该 h 值，方程(2.1)的平衡解 $U(x)$ 是（线性）渐近稳定的。如果对于给定的 h 值，$A(h)$ 有某个特征值 $\Lambda^*>0$，则对该 h 值，方程(2.1)的平衡解 $U(x)$ 是不稳定的。

事实上，因为 $A(h)$ 是有界线性算子，故 $T(t;h)$ 是一个解析的算子半群。如果(3.4)成立，由[8]可知 $T(t;h)$ 是指数稳定的，即存在常数 $M_1\geqslant1$ 和 $\nu>0$，使得

$$\|T(t;h)\|\leqslant M_1\exp[-\nu t],\ t>0.$$

由(3.3)可知 $\qquad \|v\|\leqslant\|T(t;h)\|\|v_0\|\leqslant M_1\exp[-\nu t]\|v_0\|$

从而 $\lim\limits_{t\to\infty}\|v\|=0$。这表示此时平衡解 $U(x)$ 是线性渐近稳定的。

如果 $A(h)$ 有某个特征值 $\Lambda^*>0$，我们取 Λ^* 对应的某个特征函数 Ψ（$\|\Psi\|$ 足够小）作为初值 v_0，于是由(3.3)得到此时(3.1)的解为

$$V(t,x)=\exp[tA(h)]\Psi=\exp[\Lambda^*t]\Psi$$

由于 $\Lambda^*>0$，对于任给的 $\varepsilon>0$，总可找到 $\tau>0$ 使得 $\exp[\Lambda^*t]>\varepsilon\|\Psi\|^{-1}$。于是当 $t>\tau$ 时有

$$\|V\|=\exp[\Lambda^*\tau]\|\Psi\|\geqslant\exp[\Lambda^*\tau]\|\Psi\|>\varepsilon$$

这表明对于此 h 值，平衡解 $U(x)$ 是不稳定的。

特别地，对于基本解 $U(x)\equiv0$，这时(3.2)中的 $A(h)$，$\widetilde{L}$，$\Gamma(h)$ 就成为上一节中的 $A_0(h)$，L 和 $\gamma(h)$。如果 $\{\lambda_m\}(m\in K)$ 是线性算子 L 的全体非零特征值，并考虑到 $0\in\sigma(L)$（见引理

3)，于是 $A_0(h)$ 的谱由特征值 $\{\lambda_m-\gamma(h)+\beta\}$ $(m\in K)$，以及 $\beta-\gamma(h)$（特征值或连续谱点）组成。利用定理 3，马上可以得到：

推论　对于基本解 $U(x)\equiv 0$，如果对给定的 h 值有

$$\mu_0=\sup\{\lambda_m-\gamma(h)+\beta \quad (m\in K),\ \beta-\gamma(h)\}<0$$

则基本解是（线性）渐近稳定的。如果对给定的 h 值，$A_0(h)$ 至少有一个正特征值，则基本解不稳定。

最后我们证明，在 $\bar{h}_m$ 处从基本解分出去的周期静态分叉解对于在特征子空间 $\mathcal{N}_m$ 中的某些扰动来说，满足稳定性交换原则。为此，我们证明下面的结论：

定理 4　在定理 2 的条件下，假设 $F:H\times \mathbf{R}\to H$ 是二阶 Fréchet 连续可微的。令 $u(\varepsilon)=\varepsilon(\varphi_m+\psi)\in H$ 是在 $\bar{h}_m$ 处从基本解分出去的静态分叉解（见(2.16)式），$\varepsilon\in(-\varepsilon_1,\ \varepsilon_1)$，0是 $F'_u(0;\ \bar{h}_m)=L-\lambda_m I$ 的一个特征值。令 $\Lambda(\varepsilon)$，$\tilde{\Lambda}(\varepsilon)$ 和 $w(\varepsilon)$，$\tilde{w}(\varepsilon)$ 分别为 $F'_u(0;h(\varepsilon))$ 和 $F'_u(u(\varepsilon);\ h(\varepsilon))$ 的特征值和特征函数，即在 $(-\varepsilon_1,\ \varepsilon_1)$ 内有

$$F'_u(0;h(\varepsilon))w(\varepsilon)=\Lambda(\varepsilon)w(\varepsilon) \tag{3.5}$$

$$F'_u(u(\varepsilon);h(\varepsilon))\tilde{w}(\varepsilon)=\tilde{\Lambda}(\varepsilon)\tilde{w}(\varepsilon) \tag{3.6}$$

它们还满足 $w(\varepsilon)=\varphi_m+O(\varepsilon)$，$\tilde{w}(\varepsilon)=\varphi_m+O(\varepsilon)$，$\Lambda(\varepsilon)=O(\varepsilon)$，$\tilde{\Lambda}(\varepsilon)=O(\varepsilon)$，这里取 $h(\varepsilon)=\bar{h}_m+\varepsilon\sigma(\varepsilon)$（见(2.17)式）。此外还假设 $\gamma'(\bar{h}_m)\neq 0$，$\Gamma'(\bar{h}_m)\neq 0$（分别见(2.8)和(3.2)式），则有

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\tilde{\Lambda}(\varepsilon)}{\Lambda(\varepsilon)}=-1 \tag{3.7}$$

现在证明此定理。由 $F'_u(0;h(\varepsilon))$ 和 $F'_u(u(\varepsilon);h(\varepsilon))$ 的表达式(2.6)和(3.2)可知，若 $\varepsilon=0$ 时的特征值 $\Lambda(0)=0$，$\tilde{\Lambda}(0)=0$，但 $\gamma'(\bar{h}_m)\neq 0$，$\Gamma'(\bar{h}_m)\neq 0$，则当 ε 在 0 的某个小邻域内但 $\varepsilon\neq 0$ 时，特征值 $\Lambda(\varepsilon)\neq 0$，$\tilde{\Lambda}(\varepsilon)\neq 0$。不妨仍记此邻域为 $(-\varepsilon_1,\ \varepsilon_1)$。

注意到静态分叉解 $u(\varepsilon)=\varepsilon(\varphi_m+\psi(\varepsilon))$ 存在，且有 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\psi(\varepsilon)=0$（见定理 2），并考虑到 $w(\varepsilon)=\varphi_m+O(\varepsilon)$，$\tilde{w}(\varepsilon)=\varphi_m+O(\varepsilon)$，故有

$$\varepsilon w(\varepsilon)=u(\varepsilon)+\varepsilon p(\varepsilon) \tag{3.8}$$

$$\varepsilon\tilde{w}(\varepsilon)=u(\varepsilon)+\varepsilon q(\varepsilon) \tag{3.9}$$

其中 $p(\varepsilon)=O(\varepsilon)$，$q(\varepsilon)=O(\varepsilon)$。

由 Banach 空间中的 Taylor 公式[9]及平衡态方程(2.5)得到

$$\begin{aligned}0&=F[u(\varepsilon);\ h(\varepsilon)]\\&=F'_u(0;h(\varepsilon))u(\varepsilon)+\frac{1}{2}F''_{uu}(0;h(\varepsilon))[u(\varepsilon)]^2+o(\varepsilon^2)\end{aligned}$$

这里把二次型 $F''_{uu}(0;h)(u,u)$ 简记作 $F''_{uu}(0;h)u^2$。于是

$$F'_u(0;h(\varepsilon))u(\varepsilon)+\frac{1}{2}F''_{uu}(0;h(\varepsilon))[u(\varepsilon)]^2=o(\varepsilon^2) \tag{3.10}$$

将(3.8)代入(3.5)，有

$$F'_u(0;h(\varepsilon))[u(\varepsilon)+\varepsilon p(\varepsilon)]=\Lambda(\varepsilon)[u(\varepsilon)+\varepsilon p(\varepsilon)] \tag{3.11}$$

把(3.10)代入(3.11)，并令 $u(\varepsilon)=\varepsilon(\varphi_m+\Psi(\varepsilon))$，$h(\varepsilon)=\bar{h}_m+\varepsilon\sigma(\varepsilon)$。考虑到当 $\varepsilon\to 0$ 时，$\Lambda(\varepsilon)\to 0$，$\psi(\varepsilon)\to 0$，$p(\varepsilon)\to 0$，保留最低阶项后有

$$\varepsilon\Lambda(\varepsilon)\varphi_m=\varepsilon F'_u(0;\bar{h}_m)p(\varepsilon)-\frac{\varepsilon^2}{2}F''_{uu}(0;\bar{h}_m)\varphi_m^2+o(\varepsilon^2) \tag{3.12}$$

取(3.12)与 φ_m 的内积．因为 $\varphi_m\in\mathcal{N}_m=\mathcal{R}(F'_u(0;\bar{h}_m))^\perp$，故 $(F'_u(0;\bar{h}_m)p(\varepsilon),\ \varphi_m)=0$ 从而有

$$\varepsilon\Lambda(\varepsilon)=-\frac{\varepsilon^2}{2}(F''_{uu}(0;\bar{h}_m)\varphi_m^2,\ \varphi_m)+o(\varepsilon^2) \tag{3.13}$$

然后我们同样由方程(2.5)（此时取 $u=0$）及 Taylor 公式得到

$$\begin{aligned}0&=F[0;h(\varepsilon)]\\&=F'_u(u(\varepsilon);h(\varepsilon))[-u(\varepsilon)]+\frac{1}{2}F''_{uu}(u(\varepsilon);h(\varepsilon))[-u(\varepsilon)]^2+o(\varepsilon^2)\end{aligned}$$

即

$$-F'_u(u(\varepsilon);h(\varepsilon))u(\varepsilon)+\frac{1}{2}F''_{uu}(u(\varepsilon);h(\varepsilon))[u(\varepsilon)]^2=o(\varepsilon^2) \tag{3.14}$$

此外，将(3.9)代入(3.6)，得到

$$F'_u(u(\varepsilon);h(\varepsilon))[u(\varepsilon)+\varepsilon q(\varepsilon)]=\tilde{\Lambda}(\varepsilon)[u(\varepsilon)+\varepsilon q(\varepsilon)] \tag{3.15}$$

类似(3.13)的推导，在保留最低阶项时有

$$\varepsilon\tilde{\Lambda}(\varepsilon)=\frac{\varepsilon^2}{2}(F''_{uu}(0;\bar{h}_m)\varphi_m^2,\ \varphi_m)+o(\varepsilon^2) \tag{3.16}$$

由(3.13)和(3.16)即得

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\tilde{\Lambda}(\varepsilon)}{\Lambda(\varepsilon)}=-1$$

定理 4 证毕．由此可见，当 ε 充分接近零，即 h 充分接近 $\bar{h}_m$ 时，$\tilde{\Lambda}(\varepsilon)$ 与 $\Lambda(\varepsilon)$ 的符号相反．这表明基本解 $u=0$ 和周期静态分叉解 $u(\varepsilon)$ 对于与 φ_m 成正比的小扰动的稳定性正好相反，即遵从稳定性交换原则．

四、应 用 例 子

我们研究下面有指数型积分算子的非线性发展方程

$$\frac{du}{dt}=F(u;h)\qquad(u\in H,\ t>0) \tag{4.1}$$

其中参数 $h\in\mathbf{R}^+$

$$F(u;h)\triangleq\alpha\int_{-\infty}^{\infty}d\xi\int_h^{u(t,\xi)}\exp\{-[(\xi-x)^2+(\eta-u(t,x))^2]\}d\eta+\beta u+\omega$$

和

$$\omega=\sqrt{\pi}\,\alpha\int_0^h\exp[-\eta^2]d\eta$$

显然 $u=0$ 是(4.1)的一个基本平衡解．[1]，[2]中曾研究过(4.1)的空间周期分叉解，在这里用上面得到的一般结果作进一步研究．

在本问题中，Fréchet 微商[2]为

$$F'_u(0;h)\varphi=[L-(\gamma(h)-\beta)I]\varphi\qquad(\varphi\in H) \tag{4.2}$$

其中

$$L\varphi=\alpha\int_{-\infty}^{\infty}\exp[-(\xi-x)^2]\varphi(\xi)d\xi \tag{4.3}$$

$$\gamma(h)=\sqrt{\pi}\alpha(1-\exp[-h^2]) \tag{4.4}$$

L 是H上的有界线性自伴紧算子，它的谱由特征值

$$\lambda_m=\sqrt{\pi}\alpha\exp[-\pi^2m^2/l^2] \qquad (m=0,1,2,\cdots) \tag{4.5}$$

和连续谱点 0 组成．λ_0 对应的特征函数是 ψ_0，λ_m $(m=1,2,\cdots)$ 对应的特征函数是 $\psi_m^{(1)}$ 和 $\psi_m^{(2)}$（见(2.10)式）．

由定理 1 可知分叉点 $\bar{h}$ 必须满足

$$\gamma(\bar{h})=\beta+\lambda_m \qquad (m=0,1,2,\cdots)$$

或

$$\gamma(\bar{h})=\beta$$

因此 $\bar{h}$ 只可能是

$$\bar{h}_m=\sqrt{-\ln\left(1-\exp[-\pi^2m^2/l^2]-\frac{\beta}{\sqrt{\pi}\alpha}\right)} \quad (m=0,1,2,\cdots) \tag{4.6}$$

和

$$\bar{h}_\infty=\sqrt{-\ln\left(1-\frac{\beta}{\sqrt{\pi}\alpha}\right)} \tag{4.7}$$

定理 2 给出了当 $\bar{h}_m\neq 0$ 时，(4.1)的周期静态分叉解 $u(\varepsilon)\in H$ 的存在性，这是因为 $\gamma'(\bar{h}_m)=2\sqrt{\pi}\alpha\bar{h}_m\exp[-\bar{h}_m^2]$，故此时有，$\gamma'(\bar{h}_m)\neq 0$．[2]用奇异摄动法求得了周期静态分叉解．

对于 $A_0(h)\equiv F_u'(0;h)$ 的谱，有

$$\mu_0=\sup\{\mathrm{Re}\lambda:\lambda\in\sigma(A_0(h))\}$$
$$=\begin{cases}\beta-\sqrt{\pi}\alpha(1-\exp[-h^2]), & \text{当 } \alpha<0 \text{ 时}\\ \sqrt{\pi}\alpha\exp[-h^2]+\beta, & \text{当 } \alpha>0 \text{ 时}\end{cases} \tag{4.8}$$

由定理 3 的推论得知，如果 $\mu_0<0$，则基本解是线性渐近稳定的；如果 $\mu_0>0$，基本解不稳定．由定理 4 还得到稳定性交换原则，这个结果与[2]根据最小位能原理得到的类似结论（即对于主部正比于 φ_m 的小扰动，超临界分叉解是线性渐近稳定的，而亚临界分叉解是不稳定的）是一致的．

参 考 文 献

[1] Fusco, G., On example of bifurcation in hydrostatics, *Nonlinear Differential Equations: Invariance, Stability, and Bifurcation* (ed. by P. de Mottoni and L. Salvadori), Academic Press (1981), 145—159.

[2] Lu Qi-shao and Jiang Zheng-xin, A bifurcation problem for free surfaces of liquid layers, *Proceedings of ICNM* (1985), 1071—1075.

[8] Stakgold, I., Branching of solutions of nonlinear equations, *SIAM Review*, **13** (1971), 289—332.

[4] Chow, S. N. and J. K. Hale, *Methods of Bifurcation Theory*, Springer-Verlag (1982).

[5] Crandall, M. G. and P. H. Rabinowitz, Bifurcation, perturbation of simple eigenvalues, and linearized stability, *Arch. Ret. Mech. Anal.*, **52** (1973), 161—180.

[6] Iooss, G. and D. D. Joseph, *Elementary Stability and Bifurcation Theory*, Springer-Verlag (1980).

[7] Weinberg, H. F., On the stability of bifurcating solutions, *Nonlinear Analysis* (ed.

by L. Cesari and R. Kannan), Academic Press (1978), 219—233.

[8] Pazy, A., *Semigroups of Linear Operators and Applications to partial Differential Equations*, Springer-Verlag (1983).

[9] Schwartz, J. T., *Nonlinear Functional Analysis*, New York Univ. (1965).

Bifurcation and Stability of Spatially Periodic Solutions of Nonlinear Evolution Equations with Integral Operators

Lu Qi-shao

(*Beijing Institute of Aeronautics and Astronautics, Beijing*)

Abstract

A more general kind of nonlinear evolution equations with integral operators is discussed in order to study the spatially periodic static bifurcating solutions and their stability. At first, the necessary condition and the sufficient condition for the existence of bifurcation are studied respectively. The stability of the equilibrium solutions is analyzed by the method of semigroups of linear operators. We also obtain the principle of exchange of stability in this case. As an exemple of application, a concrete result for a special case with integral operators of exponential type is presented.