应用数学和力学，第8卷第11期（1987年11月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

中心受集中载荷的固定夹支边圆板和圆底扁球壳的卡门方程的精确解*

郑晓静** 周又和

（华中工学院力学系，1986年9月20日收到）

摘　　要

由于卡门方程的非线性性和耦合性，使得寻求精确解的困难很大．迄今为止，除了少数未从数学上严格证明其收敛性的精确解外，大多数均采用近似方法求解．本文将卡门方程化为非线性奇异耦合的积分方程组，运用迭代法求得了连续函数序列．通过证明其一致收敛性，得到了中心受集中载荷作用的固定夹紧边界的圆板和圆底扁球壳的卡门方程的精确解的解析式及其收敛性证明．

一、引　　言

1910年V．Kármán[1]首先建立了接近实际问题的圆薄板大挠度方程．由于方程的非线性性和耦合性，使之寻求精确解异常困难．S．Way[2]（1934年）在幂级数展开的基础上给出了均布载荷作用的轴对称圆板的解．随后有些作者将其推广到类似的其它问题中[3]．然而，众多的是采用摄动法求解．如Vincent[4]（1931年）、钱伟长[5]（1947年）、胡海昌[6]等人分别提出以载荷、中心挠度、广义位移和挠角等作为摄动参数．文[7]、[8]研究了圆板受均布载荷时的摄动参数的优化选择，指出钱氏解优越．[9]运用计算机求得了钱氏解的高阶摄动解，研究了其收敛范围和渐近特性．叶开沅、刘人怀[10]（1965年）提出的修正迭代法，用来解决壳体问题尤为有效．然而，所有这些方法，其收敛性的研究还未能获得圆满的解决．文[11]虽曾获得了均布载荷圆板大挠度问题的迭代解的收敛性证明，但采用的差分法的具体计算而未能指出S．Way的幂级数解的收敛性．

本文首先将无量纲化的Kármán方程化为与之等价的积分方程，运用迭代方法得到了问题的连续函数序列的解析结构，通过证明其一致收敛性，得到了中心受集中载荷的轴对称圆薄板和圆底扁球壳的精确解的解析结构和收敛性．由本文方法显见，由文[11]关于均布载荷情形的迭代解的收敛性证明即可得到S．Way的幂级数解的收敛性证明．

二、问题的概述

中心受集中载荷的轴对称圆薄板和圆底扁球壳的Kármán方程可化为以下的无量纲化边

* 叶开沅推荐．　** 现为兰州大学数力系固体力学专业博士生．

值问题：

$$\left.\begin{aligned}&y^2\frac{d^2\varphi}{dy^2}=S(y)[\varphi(y)+\gamma y]+py\\&y^2\frac{d^2S}{dy^2}=-\frac{1}{2}\varphi(y)[\varphi(y)+2\gamma y]\end{aligned}\quad(y\in(0,1))\right\}\tag{2.1}$$

和

$$\left.\begin{aligned}&y=0:\ \varphi(y)=0,\ S(y)=0\\&y=1:\ \varphi(y)=\frac{\lambda}{\lambda-1}\frac{d\varphi}{dy},\ S(y)=\frac{\mu}{\mu-1}\frac{dS}{dy}\end{aligned}\right\}\tag{2.2}$$

这里：$y=\dfrac{r^2}{a^2}$，$W=\sqrt{3(1-\nu^2)}\dfrac{w}{h}$，$\varphi(y)=y\dfrac{dw}{dy}$，$S(y)=3(1-\nu^2)\dfrac{a^2N_r}{Eh^2}\cdot y$

$$p=\frac{3}{4}(1-\nu^2)\sqrt{3(1-\nu^2)}\frac{a^2P}{Eh^4\pi},\ \gamma=\frac{1}{2}\sqrt{3(1-\nu^2)}\frac{a^2}{Rh}.$$

其中：r为径向坐标；a为板（或壳体底面）的半径；w为挠度；h为厚度；N_r为径向单位长度张力；p为在中心施加的集中载荷；E为杨氏弹性模量；ν为泊松比；λ和μ是与边界有关的弹性常数，对于固定夹紧边界，$\lambda=0$，$\mu=2/(1-\nu)$，其余情况参见[12]；对于圆板，$\gamma=0$；对于圆底扁球壳，R为壳的曲率半径，是常数。

由格林函数法，边值问题(2.1)和(2.2)可化为对应的积分方程：

$$\left.\begin{aligned}&\varphi(y)=-\int_0^1K(y,\xi)\frac{1}{\xi^2}S(\xi)[\varphi(\xi)+\gamma\xi]d\xi+\varphi_1(y)\\&S(y)=\frac{1}{2}\int_0^1G(y,\xi)\frac{1}{\xi^2}\varphi(\xi)[\varphi(\xi)+2\gamma\xi]d\xi\end{aligned}\quad y\in[0,1]\right\}\tag{2.3}$$

其中核函数$K(y,\xi)$、$G(y,\xi)$为：

$$K(y,\xi)=\begin{cases}[(\lambda-1)y+1]\xi & (\xi\leqslant y)\\ [(\lambda-1)\xi+1]y & (\xi>y)\end{cases}\tag{2.4}$$

$$G(y,\xi)=\begin{cases}[(\mu-1]y+1]\xi & (\xi\leqslant y)\\ [(\mu-1)\xi+1]y & (\xi>y)\end{cases}\tag{2.5}$$

而$\varphi_1(y)$为：

$$\varphi_1(y)=-\int_0^1K(y,\xi)\frac{p}{\xi}d\xi=py\ln y-\lambda py\tag{2.6}$$

三、逐次迭代解的几个结论

由(2.3)～(2.6)，取迭代过程如下：

$$\left.\begin{aligned}&\varphi_{n+1}(y)=-\int_0^1K(y,\xi)\frac{1}{\xi^2}S_n(\xi)[\varphi_n(\xi)+\gamma\xi]d\xi+\varphi_1(y)\\&S_n(y)=\frac{1}{2}\int_0^1G(y,\xi)\frac{1}{\xi^2}\varphi_n(\xi)[\varphi_n(\xi)+2\gamma\xi]d\xi\end{aligned}\quad y\in[0,1]\right\}\tag{3.1}$$

其中：$n=1,2,\cdots$；$\varphi_1(y)$由(2.6)式决定。

由(3.1)式的迭代过程可得：

结论1 由(3.1)式所确定的迭代函数序列$\{\varphi_n(y)\}$，$\{S_n(y)\}$对于任意有限的正整数n，$\varphi_n(y)$，$S_n(y)$均在[0,1]上连续。即函数序列$\{\varphi_n(y)\}$，$\{S_n(y)\}$对任意正整数n为连续函数序列。

结论2 $\varphi_n(y)$，$S_n(y)$的函数结构形式

$$\varphi_n(y)=\sum_{i=1}^{3^{n-1}}\sum_{j=0}^{i}A_{ij}^{(n)}y^i\ln^j y \qquad S_n(y)=\sum_{i=1}^{2\times 3^{n-1}}\sum_{j=0}^{i}B_{ij}^{(n)}y^i\ln^j y \tag{3.2}$$

对任意正整数n成立。其中$A_{ij}^{(n)}$，$B_{ij}^{(n)}$为不依赖于y的常数。

证明 此处只对函数序列$\{\varphi_n(y)\}$，$y\in[0,1]$的结论进行证明。对于函数序列$\{S_n(y)\}$的结论的证明，可同理进行。

归纳法证明如下：对固定夹支边界，有

当$n=1$时，$\varphi_n(y)=\varphi_1(y)=py\ln y$。取$A_{11}^{(1)}=p$，$A_{10}^{(1)}=0$则结论1和结论2显然成立。现设对于$n=k$时，结论2的第一式成立。显然$\varphi_k(y)$在[0,1]内为连续函数，于是对于$n=k+1$有：

$$\begin{aligned}S_k(y)&=\frac{1}{2}\int_0^1 G(y,\xi)\frac{1}{\xi^2}\varphi_k(\xi)[\varphi_k(\xi)+2\gamma\xi]d\xi\\&=\sum_{i=1}^{2\times 3^{k-1}}\sum_{j=0}^{i}B_{ij}^{(k)}y^i\ln^j y\end{aligned} \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned}\varphi_{k+1}(y)&=-\int_0^1 K(y,\xi)\frac{1}{\xi^2}S_k(\xi)[\varphi_k(\xi)+\gamma\xi]d\xi\\&=\sum_{i=1}^{3^k}\sum_{j=0}^{i}A_{ij}^{(k+1)}y^i\ln^j y\end{aligned} \tag{3.4}$$

其中：
$$\begin{aligned}B_{10}^{(k)}=&\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3^{k-1}}\sum_{j=0}^{i}\sum_{r=1}^{3^{k-1}}\sum_{S=0}^{r}A_{ij}^{(k)}A_{rs}^{(k)}(j+s)!(-1)^{j+s}\left[\frac{\mu-1}{(i+r)^{j+s+1}}+\frac{1}{(i+r-1)^{j+s+1}}\right]\\&+\gamma\sum_{i=1}^{3^{k-1}}\sum_{j=0}^{i}A_{ij}^{(k)}\cdot j!(-1)^j\left[\frac{\mu-1}{(i+1)^{j+1}}+\frac{1}{i^{j+1}}\right]\end{aligned} \tag{3.5}$$

$$B_{11}^{(k)}=0 \tag{3.6}$$

$$\begin{aligned}B_{ij}^{(k)}=&\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{i-1}\sum_{t=j}^{i}\sum_{s=0}^{t}A_{i-r,t-s}^{(k)}A_{rs}^{(k)}\frac{(-1)^{t-j}\cdot t!}{j!}\left[\frac{1}{(i+1)^{t+1-j}}-\frac{1}{i^{t+1-j}}\right]\\&+\gamma\sum_{t=j}^{i}A_{i-1,t}^{(k)}\frac{(-1)^{t-j}\cdot t!}{j!}\left[\frac{1}{i^{t+1-j}}-\frac{1}{(i-1)^{t+1-j}}\right]\end{aligned} \tag{3.7}$$

$(i=2,3,\cdots,3^{k-1}+1;\ j=0,1,\cdots i)$

$$B_{ij}^{(k)}=\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{i-1}\sum_{t=j}^{i}\sum_{s=0}^{t}A_{i-r,t-s}^{(k)}A_{rs}^{(k)}\frac{(-1)^{t-j}\cdot t!}{j!}\left[\frac{1}{(i+1)^{t+1-j}}-\frac{1}{i^{t+1-j}}\right] \tag{3.8}$$

$(i=3^{k+1}+2,\cdots,2\times 3^{k-1};\ j=0,1,\cdots,i)$

$$A_{10}^{(k+1)}=-\sum_{i=1}^{3^{k-1}}\sum_{j=0}^{i}\sum_{r=1}^{2\times 3^{k-1}}\sum_{s=0}^{r}A_{ij}^{(k)}A_{rs}^{(k)}(j+s)!(-1)^{j+s}\left[\frac{-1}{(i+r)^{j+s+1}}+\frac{1}{(i+r-1)^{j+s+1}}\right]-\gamma\sum_{i=1}^{2\times 3^{k-1}}\sum_{j=0}^{i}B_{ij}^{(k)}\cdot j!\left[\frac{\lambda-1}{(i+1)^{j+1}}+\frac{1}{i^{j+1}}\right] \tag{3.9}$$

$$A_{11}^{(k+1)}=p \tag{3.10}$$

$$A_{ij}^{(k+1)}=-\sum_{r=1}^{i-1}\sum_{t=j}^{i}\sum_{s=0}^{t}A_{i-r,t-s}^{(k)}B_{rs}^{(k)}\frac{(-1)^{t-j}\cdot t!}{j!}\left[\frac{1}{(i+1)^{t-j+1}}-\frac{1}{i^{t-j+1}}\right]-\gamma\sum_{t=j}^{i}B_{i-1,t}^{(k)}\frac{(-1)^{t-j}\cdot t!}{j!}\left[\frac{1}{i^{t-j+1}}-\frac{1}{(i-1)^{t-j+1}}\right] \tag{3.11}$$

$$(i=2,3,\cdots,2\times 3^{n-1}+1;\ j=0,1,2\cdots,i)$$

$$A_{ij}^{(k+1)}=-\sum_{r=1}^{i-1}\sum_{t=j}^{i}\sum_{s=0}^{t}A_{i-r,t-s}^{(k)}B_{rs}^{(k)}\frac{(-1)^{t-j}\cdot t!}{j!}\left[\frac{1}{(i+1)^{t-j+1}}-\frac{1}{i^{t-j+1}}\right] \tag{3.12}$$

$$(i=2\times 3^{k-1}+1,\cdots,3^k;\ j=0,1,\cdots,i)$$

由 (3.4) 和 (3.9)～(3.12) 可见，$y^i\ln^j y(i=1,\cdots,3^k;\ j=0,1,\cdots,i)$ 均为连续函数．故 $\varphi_{k+1}(y)(y\in[0,1])$为连续函数．于是结论 1 得证．

由(3.4)显见，(3.2)中的第一式在 $n=k+1$ 时成立．由数学归纳法得：结论 2 成立．证毕．

结论 3　对于固定夹紧边界的圆板$\left(\text{即：}\lambda=0,\ \mu=\frac{2}{1-\nu},\ \gamma=0\right)$，当

$$p\leqslant p_1=\min_{0<y<1}\left|\frac{y\ln y}{E(y)}\right|^{1/2} \tag{3.13}$$

时，有

$$\left.\begin{array}{l}\varphi_1(y)=py\ln y\leqslant\varphi_n(y)\leqslant 0\\ 0\leqslant S_n(y)\leqslant S_1(y)\end{array}\quad y\in[0,1]\right\} \tag{3.14}$$

对任意正整数 n 成立．这里

$$E(y)=\frac{1}{p^3}\int_0^1 K(y,\xi)\frac{1}{\xi^2}\varphi_1(\xi)S_1(\xi)d\xi \tag{3.15}$$

证明　当 $\gamma=0$ 时，(3.1)式为：

$$\left.\begin{array}{l}\varphi_{n+1}(y)=-\int_0^1 K(y,\xi)\frac{1}{\xi^2}S_n(\xi)\varphi_n(\xi)d\xi+\varphi_1(y)\\ S_n(y)=\frac{1}{2}\int_0^1 G(y,\xi)\frac{1}{\xi^2}\varphi_n^2(\xi)d\xi\end{array}\right\} \tag{3.16}$$

只要从(3.16)式证得(3.14)式成立，则结论 3 得证．

当$n=1$时，$\varphi_n(y)=\varphi_1(y)=py\ln y$，结论 3 显然成立．由(3.15)显然可见：$E(y)$与 p 无关．又由(3.13)式有：

$$p\leqslant\left|\frac{p^3y\ln y}{\int_0^1 K(y,\xi)\frac{1}{\xi^2}\varphi_1S_1d\xi}\right|^{1/2} \tag{3.17}$$

即　$$\left|\int_0^1 K(y,\xi)\frac{1}{\xi^2}\varphi_1(\xi)S_1(\xi)d\xi\right|\leqslant|\varphi_1(y)| \tag{3.18}$$

由于 $\varphi_1(y)\leqslant 0$，$S_1(y)\geqslant 0$，$K(y,\xi)\geqslant 0$，$G(y,\xi)\geqslant 0$，故

$$\varphi_1(y)\leqslant\int_0^1 K(y,\xi)\frac{1}{\xi^2}\varphi_1(\xi)S_1(\xi)d\xi\leqslant 0 \tag{3.19}$$

故由(3.16)式有：

$$\varphi_2(y)=-\int_0^1 K(y,\xi)\frac{1}{\xi^2}\varphi_1(\xi)S_1(\xi)d\xi+\varphi_1(y)\leqslant 0 \tag{3.20}$$

和 $$\varphi_2(y)\geqslant\varphi_1(y) \tag{3.21}$$

现假定：当 $n=k$ 时，(3.14)式成立。即

$$\varphi_1(y)\leqslant\varphi_k(y)\leqslant 0 \qquad y\in[0,1] \tag{3.22}$$

则对于 $n=k+1$，由(3.16)式有：

$$0\leqslant S_k(y)=\frac{1}{2}\int_0^1 G(y,\xi)\frac{1}{\xi^2}\varphi_k^2(\xi)d\xi\leqslant S_1(y) \tag{3.23}$$

于是，由(3.16)，(3.4)，(3.13)式有：

$$\begin{aligned}\varphi_{k+1}(y)&=-\int_0^1 K(y,\xi)\frac{1}{\xi^2}\varphi_k(\xi)S_k(\xi)d\xi+\varphi_1(y)\\&\leqslant-\int_0^1 K(y,\xi)\frac{1}{\xi^2}\varphi_1(\xi)S_1(\xi)d\xi+\varphi_1(y)\leqslant 0\end{aligned} \tag{3.24}$$

又因 $\varphi_k(y)\leqslant 0$，$S_k(y)\geqslant 0$，故

$$-\int_0^1 K(y,\xi)\frac{1}{\xi^2}\varphi_k(\xi)S_k(\xi)d\xi\geqslant 0$$

于是： $$\varphi_{k+1}(y)\geqslant\varphi_1(y) \tag{3.25}$$

由(3.14)、(3.15)便得：

$$\varphi_1(y)\leqslant\varphi_{k+1}(y)\leqslant 0 \qquad (y\in[0,1]) \tag{3.26}$$

成立。即(3.14)式中的第一式对 $n=k+1$ 成立。依归纳法便得到了此式对任意正整数 n 成立。由(3.16)第二式很快可以得到结论 3 的(3.14)中第二式。于是结论 3 得证。

四、集中载荷圆板的精确解及其收敛性证明

定义 范数 $\|\varphi\|=\max\limits_{0\leqslant y\leqslant 1}|\varphi(y)|$，$\varphi(y)\in C_0[0,1]$。这里 $C_0[0,1]$ 为 $[0,1]$ 内连续函数构成的集合。

依泛函分析知，此范数构成的空间为 Hilbert 空间，其内任一收敛的子序列的极限均在该空间内，即极限函数为连续函数。

由前节的三个结论，我们可得到固定夹紧边界圆板受集中载荷作用的迭代解的收敛性定理。

定 理 1 设 $M=\|f_1\|$，则对于集中载荷作用的固定夹紧边界圆板（即 $\lambda=0,\mu=2/(1-\nu)$，$\gamma=0$），当 $p<p_2=2\sqrt{2}/\sqrt{M}$ 和结论 3 的条件成立时，由(3.1)确定的连续函数序列 $\{\varphi_n(y)\}$ 和 $\{S_n(y)\}$ 在 $[0,1]$ 内一致收敛。其中

$$\begin{aligned}f_1(y)=&(25+6\mu)y-(\mu+7)y\ln y+(25+6\mu)y^2\\&+(27+4\mu)y^2\ln y-12y^2\ln^2 y+2y^2\ln^3 y\end{aligned} \tag{4.1}$$

证明 由(3.16)式第一式得

$$\|\varphi_{n+1}-\varphi_n\|=\left\|\int_0^1 K(y,\xi)\frac{1}{\xi^2}[\varphi_n(\xi)S_n(\xi)-\varphi_{n-1}(\xi)S_{n-1}(\xi)]d\xi\right\|$$

$$\leqslant\left\|\int_0^1 K(y,\xi)\frac{1}{\xi^2}(|\varphi_n(\xi)|\cdot|S_n(\xi)-S_{n-1}(\xi)|\right.$$

$$\left.+|S_{n-1}(\xi)|\cdot|\varphi_n(\xi)-\varphi_{n-1}(\xi)|)d\xi\right\| \tag{4.2}$$

分别由(3.14)和(3.16)的第二式得：

$$|S_n(y)-S_{n-1}(y)|=\frac{1}{2}\left|\int_0^1 G(y,\xi)\frac{1}{\xi^2}\ (\varphi_n^2(\xi)-\varphi_{n-1}^2(\xi))d\xi\right|$$

$$\leqslant\int_0^1 G(y,\xi)\ \frac{1}{\xi^2}\ |\varphi_1(\xi)|d\xi\cdot\|\varphi_n-\varphi_{n-1}\|$$

$$=-p\int_0^1 G(y,\xi)\frac{1}{\xi}\ln\xi d\xi\cdot\|\varphi_n-\varphi_{n-1}\| \tag{4.3}$$

即：

$$|S_n(y)-S_{n-1}(y)|\leqslant\left(\mu y-y\ln y+\frac{1}{2}y\ln^2 y\right)p\cdot\|\varphi_n-\varphi_{n-1}\| \tag{4.4}$$

而

$$S_1(y)=\frac{1}{2}\int_0^1 G(y,\xi)\frac{1}{\xi^2}\ p^2\xi^2\ln^2\xi d\xi$$

$$=\frac{p^2}{8}\ [(7+\mu)y-2y^2\ln^2 y+6y\ln^2 y-7y^2] \tag{4.5}$$

将(3.14)、(3.17)、(3.20)和(3.21)式代入(4.2)式，得

$$\|\varphi_{n+1}-\varphi_n\|\leqslant\frac{p^2}{8}\ \|f_1\|\cdot\|\varphi_n-\varphi_{n-1}\|=\frac{p^2M}{8}\ \|\varphi_n-\varphi_{n-1}\| \tag{4.6}$$

令 $\alpha=p^2M/8$，依定理的条件知$\alpha<1$。于是，(4.6)有

$$\|\varphi_{n+1}-\varphi_n\|\leqslant\alpha\|\varphi_n-\varphi_{n-1}\|\qquad(\alpha<1) \tag{4.7}$$

对任意正整数成立。

对于任给正整数$m>n$，则由(3.23)得

$$\|\varphi_m-\varphi_n\|\leqslant\frac{\alpha^n-\alpha^m}{1-\alpha}\ \|\varphi_2-\varphi_1\| \tag{4.8}$$

所以

$$\lim_{m,n\to\infty}\|\varphi_m-\varphi_n\|=\lim_{m,n\to\infty}\frac{\alpha^n-\alpha^m}{1-\alpha}\ \|\varphi_2-\varphi_1\|=0 \tag{4.9}$$

故连续函数序列$\{\varphi_n(y)\}$在$[0,1]$内一致收敛，记

$$\varphi(y)=\lim_{n\to\infty}\varphi_n(y) \tag{4.10}$$

则$\varphi(y)$在$[0,1]$上连续，且$\varphi_1(y)\leqslant\varphi(y)\leqslant0$

记

$$S(y)=\lim_{n\to\infty}S_n(y) \tag{4.11}$$

则由(3.14)的第二式知

$$0\leqslant S(y)\leqslant S_1(y) \tag{4.12}$$

于是分别由(2.3)，(3.1)的第二式有：

$$\|S_n(y)-S(y)\|\leqslant\|f_2\|\cdot\|\varphi_n-\varphi\| \tag{4.13}$$

由(4.10)有$\lim\limits_{n\to\infty}\|\varphi_n-\varphi\|=0$，故

$$\lim_{n\to\infty}\|S_n(y)-S(y)\|=0$$

即

$$S(y)=\lim_{n\to\infty}S_n(y) \tag{4.14}$$

所以，连续函数序列$\{S_n(y)\}$在$[0,1]$内一致收敛。于是定理证毕。

由结论1、结论2和上述定理1，以下推论成立。

推论 在$p<\min(p_1,p_2)$的条件下，中心受集中载荷的固定夹紧边界圆板的卡门方程的精确解的形式为

$$\varphi(y)=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{i}A_{ij}y^i\ln^j y,\quad S(y)=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{i}B_{ij}y^i\ln^j y \tag{4.15}$$

其中A_{ij}、$B_{ij}(i=1,2,\cdots;\ j=0,1,\cdots,i)$是与$y$无关的常数，可由边值问题(2.1)、(2.2)或积分方程(2.3)得到。由边值问题(2.1)和(2.2)得到的系数递推公式为：

$$A_{ij}=\Big[\sum_{l=1}^{i-1}\sum_{k=0}^{l}A_{i-l,j-k}B_{lk}-(2i-1)(j+1)A_{i,j+1}-(j+1)(j+2)A_{i,j+2}\Big]/i(i-1)$$

$$B_{ij}=\Big[-\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{i-1}\sum_{k=0}^{l}A_{i-l,j-k}A_{lk}-(2i-1)(j+1)B_{i,j+1}-(j+1)(j+2)B_{i,j+2}\Big]/i(i-1)$$

$$(i=2,3,\cdots;\ j=i,i-1,\cdots,0) \tag{4.16}$$

$A_{11}=p$，$B_{11}=0$，A_{10}，B_{10}为独立常数，可由$y=1$的边界条件确定。

五、壳体情形的精确解及其收敛性证明

对于壳体情形，上节关于板受特殊载荷的情形的收敛性证明方法需作修正。本节将对任意情形给出收敛性证明。

在(3.2)式中，取$\varphi_n(y)=y^{\bar\alpha}\Phi_n(y)$，$s_n(y)=y^{\bar\alpha}S_n(y)$。这里$\frac{1}{2}<\bar\alpha<1$，于是由结论1、结论2知$\Phi_n(y)$、$S_n(y)$在$[0,1]$上连续，故其范数存在。于是有：

$$\Phi_{n+1}(y)=\frac{1}{y^{\bar\alpha}}\varphi_{n+1}=-\frac{1}{y^{\bar\alpha}}\int_0^1K(y,\xi)\frac{1}{\xi^2}[\varphi_n(\xi)+\gamma\xi]$$

$$\cdot\frac{1}{2}\int_0^1G(y,\xi)\frac{1}{\eta^2}\varphi_n(\eta)[\varphi_n(\eta)+2\gamma\eta]d\eta d\xi+\Phi_1(y) \tag{5.1}$$

令
$$\beta_1(y)=-\frac{1}{2y^{\bar\alpha}}\int_0^1K(y,\xi)\xi^{\bar\alpha-2}\int_0^1G(\xi,\eta)\eta^{2(\bar\alpha-1)}d\eta d\xi \tag{5.2}$$

$$\beta_2(y)=-\frac{1}{2y^{\bar\alpha}}\int_0^1K(y,\xi)\xi^{\bar\alpha}\int_0^1G(\xi,\eta)\cdot2\eta^{1+\alpha}d\eta d\xi \tag{5.3}$$

$$\beta_3(y)=-\frac{1}{y^{\bar\alpha}}\int_0^1K(y,\xi)\frac{1}{\xi}\int_0^1G(\xi,\eta)\eta^{(\bar\alpha-1)}d\eta d\xi \tag{5.4}$$

$$\bar\beta_1=\|\beta_1\|,\quad\bar\beta_2=\|\beta_2\|,\quad\bar\beta_3=\|\beta_3\| \tag{5.5}$$

则
$$\|\Phi_{n+1}\|\leqslant\bar\beta_1\|\Phi_n\|^3+\bar\beta_2\gamma\|\Phi_n\|^2+\bar\beta_3\gamma^2\|\Phi_n\|+\|\Phi_1\| \tag{5.6}$$

令
$$\|\Phi_n\|\leqslant x\|\Phi_1\|,\ (x>1),\quad a=\bar\beta_1x^3,\quad b=\bar\beta_2x^2\gamma$$

$$c=x-1-\bar\beta_3\gamma^2x>0\qquad\left(\gamma<\sqrt{\frac{x-1}{x\bar\beta_3}}\right) \tag{5.7}$$

则当
$$\|\Phi_1\|\leqslant\frac{\sqrt{b^2+4ac}-b}{2a} \tag{5.8}$$

时，有 $$\|\Phi_{n+1}\|\leqslant x\|\Phi_1\| \tag{5.9}$$
成立。于是由数学归纳法可得：对任意的正整数n，有
$$\|\Phi_n\|\leqslant x\|\Phi_1\| \tag{5.10}$$
成立。令 $f(x)=\dfrac{\sqrt{b^2+4ac}-b}{2a}$，则由$f'(x)=0$求出$x=x_0$，使得
$$f'(x_0)=0 \tag{5.11}$$
和 $$\bar{f}=\max_{x>1}f(x)=f(x_0) \tag{5.12}$$
于是有：当$\|\Phi_1\|<f(x_0)$时，有$\|\Phi_n\|<x_0f(x_0)$对任意的n成立。

令
$$F(x)=af^2(x)+bf(x)-c$$
$$=a\left(f(x)-\frac{\sqrt{b^2+4ac}-b}{2a}\right)\left(f(x)+\frac{\sqrt{b^2+4ac}+b}{2a}\right) \tag{5.13}$$
则 $F(x_0)=0$，$F'(x_0)=0$。于是得
$$F'(x_0)=3\bar{\beta}_1x_0^2f^2(x_0)+2\bar{\beta}_2x_0f(x_0)+\bar{\beta}_3\gamma^2-1=0 \tag{5.14}$$
故有 $$3\bar{\beta}_1x_0^2f^2(x_0)+2\bar{\beta}_2x_0f(x_0)+\bar{\beta}_3\gamma^2=1 \tag{5.15}$$
由(5.1)得：
$$\begin{aligned}\|\Phi_{n+1}-\Phi_n\|=&\Bigg\|-\frac{1}{y^{\bar{\alpha}}}\int_0^1K(y,\xi)\frac{1}{\xi^2}\Bigg[(\varphi_n(\xi)+\xi\gamma)\frac{1}{2}\int_0^1G(\xi,\eta)\frac{1}{\eta^2}\varphi_n(\eta)(\varphi_n(\eta)\\&+2\eta\gamma)d\eta-(\varphi_{n-1}(\xi)+\xi\gamma)\frac{1}{2}\int_0^1G(\xi,\eta)\frac{1}{\eta^2}\varphi_{n-1}(\eta)(\varphi_{n-1}(\eta)\\&+2\eta\gamma)d\eta\Bigg]d\xi\Bigg\|\leqslant[\bar{\beta}_1(\|\Phi_n\|^2+\|\Phi_n\|\cdot\|\Phi_{n-1}\|+\|\Phi_{n-1}\|^2)\\&+\bar{\beta}_2\gamma(\|\Phi_n\|+\|\Phi_{n-1}\|)+\bar{\beta}_3\gamma^2]\cdot\|\Phi_n-\Phi_{n-1}\|=\alpha\|\Phi_n-\Phi_{n-1}\|\end{aligned} \tag{5.16}$$
这里 $$\begin{aligned}\alpha=&\bar{\beta}_1(\|\Phi_n\|^2+\|\Phi_n\|\cdot\|\Phi_{n-1}\|+\|\Phi_{n-1}\|^2)\\&+\bar{\beta}_2\gamma(\|\Phi_n\|+\|\Phi_{n-1}\|)+\bar{\beta}_3\gamma^2\end{aligned} \tag{5.17}$$
由$\|\Phi_n\|<x_0f(x_0)$和(5.15)式得：
$$\alpha<3\bar{\beta}_1x_0^2f^2(x_0)+2\bar{\beta}_2x_0f(x_0)+\bar{\beta}_3\gamma^2=1 \tag{5.18}$$
所以$\{\Phi_n(y)\}$是柯西序列。与前节同理，得到$\Phi_n(y)$在$[0,1]$上一致收敛于$\Phi(y)$。即有
$$\Phi(y)=\lim_{n\to\infty}\Phi_n(y)\quad(y\in[0,1]) \tag{5.19}$$
故令$\varphi(y)=y^{\bar{\alpha}}\Phi(y)$，则函数序列$\{\varphi_n(y)\}$一致收敛于$\varphi(y)$。即
$$\varphi(y)=\lim_{n\to\infty}\varphi_n(y)\quad(y\in[0,1]) \tag{5.20}$$
成立。同理，对$S_n(y)$有
$$S(y)=\lim_{n\to\infty}S_n(y)\quad(y\in[0,1]) \tag{5.21}$$
成立。于是有以下定理：

定 理 2 当$\|\varphi_1\|<f(x_0)$成立时，有

1) 对于任意的正整数n，$\|\Phi_n\|<x_0f(x_0)$成立。

2) 由(3.1)式确定的迭代函数序列$\{\varphi_n(y)\}$和$\{S_n(y)\}$在$[0,1]$内一致收敛。即有
$$\varphi(y)=\lim_{n\to\infty}\varphi_n(y),\quad S(y)=\lim_{n\to\infty}S_n(y)\quad(y\in[0,1]) \tag{5.22}$$

成立。

推论　圆底扁球壳非线性变形问题的精确解的解析结构式为：

$$\varphi(y)=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{i}A_{ij}y^{i}\ln^{j}y,\ \ S(y)=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{i}B_{ij}y^{i}\ln^{j}y\quad(y\in[0,1])\tag{5.23}$$

且在[0,1]内一致收敛。这里A_{ij}、B_{ij}是与y无关的常数，可由边值问题(2.1)、(2.2)或积分方程(2.3)确定。

六、结　　论

本文从理论上构造了轴对称变形的固定夹支边圆板和圆底扁球壳几何非线性问题的精确解的解析式，并给出了其一致收敛的证明。从文中可见，本文的工作不难推广到边界条件和载荷是任意情形的轴对称几何非线性变形的板与扁壳的问题中。虽然圆板情形可由第五节的证明中令$\gamma=0$得到，但对于集中载荷圆板的轴对称变形的特殊情形。第四节的证明其相对要求要弱些。有关固定夹支边圆板受集中载荷作用的大挠度问题在各种泊松比下的p_1，p_2和p_{min}值已列成表格，详见表1。

此外，对于均布载荷情形，采用与本文类似的方法，通过构造得到迭代解的解析式，然后由[11]中关于此类问题迭代解的一致收敛性证明，便可给出S. Way幂级数解的收敛性。

表1　　各种泊松比情况下的p_1，p_2和p_{min}

(固定夹紧边界)

ν	p_1	p_2	p_{min}
0	2.58773	1.2226	1.22260
0.05	2.55598	1.20847	1.20847
0.10	2.52406	1.19332	1.19332
0.15	2.48867	1.17693	1.17693
0.20	2.45042	1.15930	1.15930
0.25	2.40900	1.14025	1.14025
0.30	2.36403	1.11958	1.11958
0.35	2.31490	1.09704	1.09704
0.40	2.26109	1.07231	1.07231
0.45	2.20187	1.04513	1.04513
0.50	2.13635	1.01510	1.01510

参　考　文　献

[1] von Kármán, T., Festigkeits problem in maschinanbau, *Eucyklopadie der Mathematischen Wissenschaften*, 4, 4 (1910), 348.

[2] Way, S., Bending of circular plate with large deflection, ASME. Transactions., *J. Applied Mechanics*, 56 (1934), 637—636.

[3] 刘人怀、施云方，夹层圆板大挠度问的精确解，应用数学和力学，3，1 (1982)，11—23.

[4] Vincent, J. J., The bending of a thin circular plate, *Phil. Mag.* 12 (1931), 185—196.

[5] Chien, W. Z., Large deflection of a circular clamped plate under uniform pressure, 中国物理学报，7，2(1947)，102—113.

[6] 胡海昌，在均布及中心集中载荷作用下圆板大挠度问题，物理学报，10 (1954)，383—394.

[7] DaDeppo, D. A. and R. Schmidt, Moderately large deflections of a loosely clamped circular plate under a uniformly distributed load, *Indus. Math.* **24**, 1 (1975), 17—28.

[8] 陈山林、光积昌，圆薄板大挠度问题的摄动参数，应用数学和力学，**2**，1 (1981)，131—144.

[9] 叶开沅、周又和，关于钱氏摄动法的高阶解的计算机求解和收敛性的研究，应用数学和力学，**7**，4 (1986)，285—293.

[10] 叶开沅、刘人怀等，在对称线布载荷作用的圆底扁球壳的非线性稳定问题，兰州大学学报，**2** (1965)，10—33.

[11] Keller, H. B. and E. L. Reiss, Iterative solutions for the nonlinear bending of circular plates, *Comm. on Pure and Appl. Math.*, XI (1958), 273—292.

[12] 钱伟长、叶开沅，圆板大挠度问题，物理学报，**10**，3 (1954)，209—258.

On Exact Solution of Kármán's Equations of Rigid Clamped Circular Plate and Shallow Spherical Shell under a Concentrated Load

Zheng Xiao-jing Zhou You-he

(*Huazhong University of Science and Technology, Wuhan*)

Abstract

It is extremely difficult to obtain an exact solution of von Kármán's equations because the equations are nonlinear and coupled. So far many approximate methods have been used to solve the large deflection problems except that only a few exact solutions have been investigated but no strict proof on convergence is presented yet. In this paper, first of all, we reduce the von Kármán's equations to equivalent integral equations which are nonlinear, coupled and singular. Secondly the sequences of continuous function with general form are constructed using iterative technique. Based on the sequences to be uniformly convergent, we obtain analytical formula of exact solutions to von Kármán's equation related to large deflection problems of circular plate and shallow spherical shell with clamped boundary subjected to a concentrated load at the centre.