

悬臂矩形板的不对称弯曲

成祥生

(同济大学, 1986年8月12日收到)

摘 要

本文用能量法讨论了悬臂矩形板在多种荷载作用下的不对称弯曲问题。文中举了若干算例, 诸如在板的自由边及角点上作用有不对称的集中力或集中力偶和在自由边上作用有不对称的, 均匀的或非均匀的分布荷载等。

一、引 言

悬臂矩形板的对称弯曲问题曾由 Л. В. Канторович 等人^[1-12]作过理论计算和实验研究, 其中不但计算比较复杂而且关于不对称弯曲问题的讨论则更少, 只有文献[11]作过在有集中力作用之下悬臂矩形板的不对称弯曲问题的讨论, 并使用了迭加法。本文应用能量法讨论悬臂矩形板的不对称弯曲问题, 例如在板的自由边及角点上作用有不对称的集中力或集中力偶, 在自由边上作用有不对称的、均匀或非均匀的分布荷载等等的情形。本文的主要特点之一是选用的挠度函数简单, 因为它们只须要满足薄板的几何边界条件, 若再使其满足一部分内力边界条件, 则可提高计算的精度。第二个主要特点是: 虽然挠度函数有四个参数, 但我们仅按两个参数或一个参数进行变分, 因此计算比较简便。第三个主要特点是: 薄板上所受的荷载的类型可广泛多样, 但所花费的计算工作量仍然较少。

二、关于挠度函数

设有一矩形薄板, 取坐标如图1所示, 薄板沿 $y=0$ 夹支。假定薄板在角点 B 受有一横向的集中力 P 作用。本文仅限于讨论悬臂矩形板的不对称弯曲。今选取如下的挠度函数

$$w = f_1 \frac{y}{b} \sin \frac{\pi}{a} x + \left(f_2 + f_4 \sin \frac{\pi x}{2a} \right) \left(1 - \cos \frac{\pi y}{2b} \right) + f_3 \sin \frac{\pi}{a} x \sin \frac{\pi}{b} y \quad (2.1)$$

其中 a 和 b 分别为薄板沿 x 轴和 y 轴边的长度, 而系数 $f_1 \sim f_4$ 都是待定的参数。该函数仅满足如下的边界条件

• 潘立宙推荐。

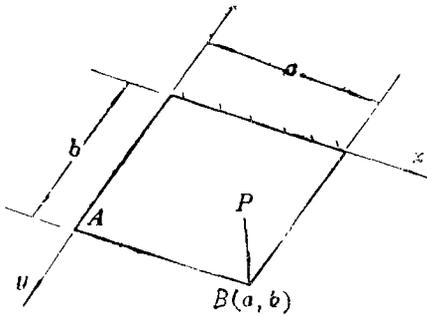


图 1

当 $y=0$ 时

$$w = 0 \tag{2.2}$$

但不满足该边界上转角为零的边界条件, 即

当 $y=0$ 时

$$w_y = 0 \tag{2.3}$$

如欲满足条件(2.3), 则可将(2.1)代入上式,

便得

$$f_1 = -\pi f_3 \tag{2.4}$$

这就是说: 如所选的挠度函数, 要满足条件(2.3), 则挠度函数的各系数之间必须有一约束关系, 即条件(2.4)。于是函数(2.1)的四个系数, 现在只有三个独立的。

现在挠度函数(2.1)已满足问题的全部几何边界条件, 即在 $y=0$ 的固定边上, 挠度及转角都为零, 即(2.2)及(2.3)。如果应用 Rayleigh-Ritz 法^[13,14]分析问题, 则挠度函数仅满足(2.2)和(2.3)就可以了, 但如能满足一部分或全部内力边界条件, 则可提高计算的精确度。由于另外三条边界: $x=0, x=a, y=b$ 是自由的, 如所讨论的是各向同性板, 则应满足如下的内力边界条件^[15], 例如

对于 $x=0, x=a$ 边, 应有

$$[w_{xx} + \mu w_{yy}]_{x=0} = 0 \tag{2.5}$$

$$[w_{xxx} + (2-\mu)w_{xyy}]_{x=0} = 0 \tag{2.6}$$

对于 $y=b$ 边, 应有

$$[w_{yy} + \mu w_{xx}]_{y=b} = 0 \tag{2.7}$$

$$[w_{yyy} + (2-\mu)w_{xyy}]_{y=b} = 0 \tag{2.8}$$

其中(2.5)和(2.7)是边界上的弯矩为零, 而(2.6)和(2.8)是边界上的综合横向剪力为零, 但它们不一定都满足。

今使 $x=0$ 边上的综合横向剪力为零, 即满足条件(2.6)。为此, 现将挠度函数(2.1)代入(2.6)可得到

$$f_4 = \left\{ \frac{\pi}{2} \left[(2-\mu) \frac{a^2}{b^2} + 1 \right] - 1 \right\} f_3 / \left[\frac{2-\mu}{3} \frac{a^2}{b^2} - \frac{1}{24} \right] \tag{2.9}$$

若使 $x=a$ 边上的综合横向剪力为零, 也得同一结果。

于是由(2.4)和(2.9)可将 f_1 和 f_4 写成

$$\left. \begin{aligned} f_1 &= \beta_1 f_3 \\ f_4 &= \beta_4 f_3 \end{aligned} \right\} \tag{2.10}$$

其中已令

$$\left. \begin{aligned} \beta_1 &= -\pi \\ \beta_4 &= \left\{ \frac{\pi}{2} \left[(2-\mu) \frac{a^2}{b^2} + 1 \right] - 1 \right\} / \left[\frac{2-\mu}{3} \frac{a^2}{b^2} - \frac{1}{24} \right] \end{aligned} \right\} \tag{2.11}$$

不难看出, β_1 和 β_4 都是常数。

对于方板, 当 $a/b=1$ 时, 并且取 $\mu=0.3$, 则由(2.11)可得

$$\left. \begin{aligned} \beta_1 &= -3.14159 \\ \beta_4 &= 6.17362 \end{aligned} \right\} \quad (2.12)$$

于是挠度函数(2.1)可表示如下

$$\begin{aligned} w &= f_2 \left(1 - \cos \frac{\pi y}{2b} \right) + f_3 \left[\beta_1 \frac{y}{b} \sin \frac{\pi x}{a} \right. \\ &\quad \left. + \beta_4 \sin \frac{\pi x}{2a} \left(1 - \cos \frac{\pi y}{2b} \right) + \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \right] \end{aligned} \quad (2.13)$$

这样一来,在上式挠度函数 w 中,只包含两个未知参数 f_2 和 f_3 ,而且它们是独立的.这个挠度函数除了满足薄板 $x=0$ 和 $x=a$ 边上的综合横向剪力为零的部分内力边界条件(2.6),而其余的内力边界条件都是自然边界条件,它们可通过变分近似地得到满足^[16].将所选用的挠度函数(2.13)应用于 Rayleigh-Ritz 法中,这样就可提高问题计算的精度.

如果薄板系正交各向异性板,则内力边界条件(2.6)及(2.8)应用下式^[17]来代替

$$\left. \begin{aligned} \left[w_{xxx} + \left(\frac{D_3}{D_1} - \mu_2 \right) w_{xyy} \right]_{x=0} &= 0 \\ \left[w_{yyy} + \left(\frac{D_3}{D_2} - \frac{D_1}{D_2} \mu_2 \right) w_{xxy} \right]_{y=b} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.14)$$

式中各符号也参见文献[17].

三、方法原理

设一悬臂矩形板,受到外荷载作用而弯曲,这时整个系统的形变势能是^[15]

$$U = \frac{D}{2} \iint \left[w_{xx}^2 + w_{yy}^2 + 2\mu w_{xx}w_{yy} + 2(1-\mu)w_{xy}^2 \right] dx dy \quad (3.1)$$

其中 $D = Eh^3/12(1-\mu^2)$,是板的弯曲刚度, E , h , μ 分别为板材料的弹性模量,厚度和波松比.如果是正交各向异性板,则(3.1)式应以下式^[17]来代替

$$U = \frac{1}{2} \iint \left[D_1 w_{xx}^2 + D_2 w_{yy}^2 + 2D_1 \mu_2 w_{xx}w_{yy} + 4D_k w_{xy}^2 \right] dx dy$$

式中各符号也参见[17].

若薄板受分布荷载 $q(x,y)$ 作用,则外力的势能是^[15]

$$W = \iint q(x,y)w(x,y) dx dy \quad (3.2)$$

以上所有二重积分均遍及板的中面.

于是系统的总势能为

$$\Pi = U - W \quad (3.3)$$

根据 Rayleigh-Ritz 法^[13,14],系统在稳定平衡时,其总势能为最小,即

$$\delta \Pi = 0 \quad (3.4)$$

于是可得到包含参数 f_2 和 f_3 的两个代数方程的方程组,从而可确定两个独立的未知参数 f_2 和 f_3 .

四、解 例

(A) 薄板在角点 $B(a, a)$ 受有一个横向集中力 P 作用而弯曲, 如图1所示.

现在先计算整个薄板系统的应变势能. 为此, 将挠度函数(2.13)代入(3.1)进行积分后, 可得

$$U = \frac{D}{2} \sum_i F_i \quad (i=1, 2, 3, 4) \quad (4.1)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} F_1 &= \pi^4 \frac{b}{a^3} (0.16667\beta_1^2 + 0.00709\beta_2^2 + 0.05701\beta_1\beta_4 + 0.31831\beta_1 \\ &\quad + 0.04503\beta_4 + 0.25)f_2^2 \\ F_2 &= \pi^4 \frac{a}{b^3} [0.03125f_2^2 + (0.01563\beta_1^2 - 0.09006\beta_4 + 0.25)f_2^2 \\ &\quad + (0.03979\beta_4 - 0.13509)f_2f_3] \\ F_3 &= 2\mu \frac{\pi^4}{ab} [(-0.00407\beta_1^2 - 0.02455\beta_1\beta_4 - 0.04503\beta_4 + 0.15915\beta_1 \\ &\quad + 0.25)f_2^2 + (-0.03682\beta_1 - 0.00544\beta_4 - 0.06755)f_2f_3] \\ F_4 &= 2(1-\mu) \frac{\pi^4}{ab} (0.05066\beta_1^2 + 0.01563\beta_2^2 + 0.02150\beta_1\beta_4 + 0.20264\beta_1 \\ &\quad - 0.02252\beta_4 + 0.25)f_2^2 \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

其次, 再计算外力的势能. 将挠度函数(2.13)代入(3.2), 进行积分后可得

$$W = (f_2 + \beta_4 f_3)P \quad (4.3)$$

若对于方板, 因 $b=a$, 并取 $\mu=0.3$, 而 β_1 和 β_4 由(2.12)确定, 将它们代入(4.2), (4.1)和(4.3), 最后由(3.3)得到系统的总势能为

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{D}{2} \frac{\pi^4}{a^2} (0.03125f_2^2 + 0.71224f_2^2 + 0.11928f_2f_3) \\ &\quad - (f_2 + 6.17362f_3)P \end{aligned} \quad (4.4)$$

再按(3.4)对两个参数 f_2 和 f_3 进行变分, 可得到关于参数 f_2 和 f_3 的两个代数方程的方程组

$$\begin{bmatrix} 0.03125 & 0.05964 \\ 0.05964 & 0.71224 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6.17362 \end{bmatrix} \frac{Pa^2}{\pi^4 D} \quad (4.5)$$

由上面方程可解出

$$\left. \begin{aligned} f_2 &= 0.18888 \frac{Pa^2}{D} \\ f_3 &= 0.07317 \frac{Pa^2}{D} \end{aligned} \right\} \quad (4.6)$$

于是在自由边 $y=a$ 的两个角点 $B(a, a)$ 和 $A(0, a)$ 的挠度可由(2.13)给出

$$\left. \begin{aligned} w_B &= w(a, a) = 0.64060 \frac{Pa^2}{D} \\ w_A &= w(0, a) = 0.18888 \frac{Pa^2}{D} \end{aligned} \right\} \quad (4.7)$$

同样, 用上述方法还计算了如下(B)~(H)的几种方板的情形, 就是

(B) 板在 $(a, \frac{a}{2})$ 点有一个横向集中力 P 作用而弯曲, 见图2.

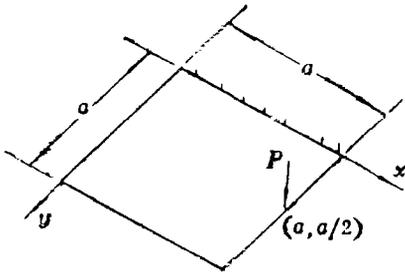


图 2

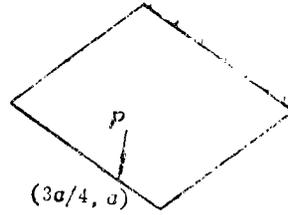


图 3

(C) 板在 $(\frac{3}{4}a, a)$ 点有一个横向集中力 P 作用而弯曲, 见图3.

(D) 板在 (a, a) 点有一绕 y 轴的集中力偶 M_y^0 的作用而弯曲, 见图4.

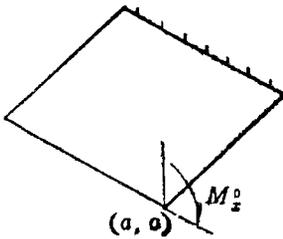


图 4

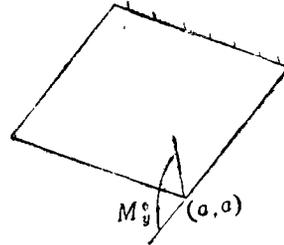


图 5

(E) 板在 (a, a) 点有一绕 x 轴的集中力偶 M_x^0 的作用而弯曲, 见图5.

(F) 板在自由边 $y=a$ 上有一三角形分布荷载作用而弯曲, 见图6.

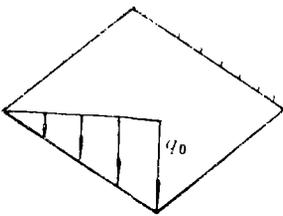


图 6

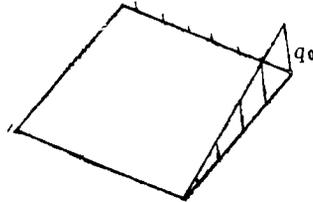


图 7

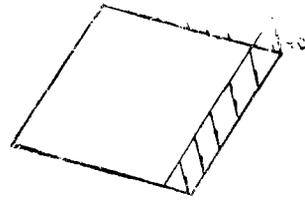


图 8

(G) 板在自由边 $x=a$ 上有一三角形分布荷载作用而弯曲, 见图7.

(H) 板在自由边 $x=a$ 上有一均匀分布荷载 q_0 作用而弯曲, 见图8.

将以上各情形的计算结果列于下面表 1 中.

在文献[11]中曾用迭加法计算了本文的情形(C), 今将两者计算结果列于下面表 2 的前两行, 以资比较.

由表可看出, 两者的计算结果, 除 $w(a, a)$ 相差稍大外, 其它的结果都很接近.

如果我们再在自由边 $y=b$ 上使条件(2.8)得到满足, 则可得到

$$f_2 = \beta_2 f_3 \tag{4.8}$$

表 1

情 形	挠 度	$w(a, a)$	$w(0, a)$	图 号
(A)		0.64060 Pa^2/D	0.18888 Pa^2/D	1
(B)		0.18762 Pa^2/D	0.05532 Pa^2/D	2
(C)		0.44367 Pa^2/D	0.27099 Pa^2/D	3
(D)		0.72233 $M^0 a/D$	-0.32299 $M^0 a/D$	4
(E)		1.00628 $M^0 a/D$	0.29668 $M^0 a/D$	5
(F)		0.26433 $q_0 a^3/D$	0.14632 $q_0 a^3/D$	6
(G)		0.06065 $q_0 a^3/D$	0.01787 $q_0 a^3/D$	7
(H)		0.23279 $q_0 a^3/D$	0.06863 $q_0 a^3/D$	8

表 2

方 法	挠 度	$w(a, a)$	$w(0, a)$	$w\left(\frac{3}{4}a, a\right)$
文 献 [11]		0.39844 Pa^2/D	0.27437 Pa^2/D	0.3850 Pa^2/D
本 文		0.44367 Pa^2/D	0.27699 Pa^2/D	0.37098 Pa^2/D
用 单 参 数 f_3		0.41559 Pa^2/D	0.30261 Pa^2/D	0.36633 Pa^2/D

其中 β_2 是常数, 如对于方板的情形, 则有

$$\beta_2 = 16.53348 \quad (4.9)$$

这样我们只有一个独立的参数 f_3 了。作为例子, 对情形(C), 将一个参数 f_3 变分, 进行类似的计算, 将结果列于表2的最后一行。其中 $w(a, a)$ 与文献[11]的值比较接近。

五、结 束 语

1. 本文用变分法给出了悬臂矩形板在多种荷载作用下不对称弯曲问题的解答(表1)。
2. 在本文中选用的挠度函数简单, 选择范围较宽, 因它们事先不一定满足全部几何边界条件及内力边界条件。
3. 使选用的挠度函数先满足全部几何边界条件之后, 再使其满足一部分内力边界条件, 这样可提高计算精度, 从而得到较好的近似解。
4. 由于上述的理由, 于是得出某些系数之间的约束条件, 因此在挠度函数中有些系数不是独立的, 这样就减少了独立的被变分的系数的数目, 所以使计算过程简单。
5. 研究和计算表明, 挠度函数的项数取得愈多, 以及参与变分的系数愈多, 则计算精度也愈高, 但同时计算就变得很冗赘了。
6. 由大量的数值算例可看出: 用该法分析薄板的弯曲问题是比较方便的, 可以预料到用该法对薄板的稳定性和振动问题的分析以及对其它各种边值问题的应用也都适宜, 从而扩大了 Rayleigh-Ritz 法的使用范围。

参 考 文 献

- [1] Канторович Л. В., Изв. АН СССР, №5 (1933).

- [2] Канторович Л. В. и В. И. Крылов, *Приближенные Методы Высшего Анализа*, Гостехиздат (1941).
- [3] MacGregor, C. W., *Mech, Eng.*, 57 (1935), 225.
- [4] Holl, D. L., *J. Appl. Mech.*, 4 (1937), 8.
- [5] Jaramillo, T. J., *J. Appl. Mech.*, 17 (1950), 67.
- [6] Nash, W. A., *J. Appl. Mech.*, 19 (1952), 33.
- [7] Jung, H., *Math Nachr.*, 6 (1952), 343.
- [8] Girkmann, K., *Flächentragwerke*, Vierte Auflage, Vienna (1956), 233.
- [9] 舒德坚、施振东, 弹性薄板广义变分原理及其应用, 北京航空学院学报, 1 (1957).
- [10] Koiter, W. T., and J. B. Alblas, *Journal of the Netherlands Royal Academy of Sciences*, Amsterdam, 66 (1957), 173.
- [11] 张福范, «弹性薄板», 科学出版社, 第二版 (1984).
- [12] Plass, H. J., J. H. Games Jr., C. D. Newson, *J. Appl. Mech.*, 29 (1962).
- [13] Rayleigh, J. W. S., *Theory of Sound*, Macmillan and Co., Ltd., London (1877).
- [14] Ritz W., *J. Reine u. Angew. Mathe.*, 135 (1908) 1—61.
- [15] Timoshenko, S., S. Woinowsky-Krieger, *Theory of Plates and Shells*, Sec. Edit. (1959).
- [16] 钱伟长, «变分法及有限元» (上册), 科学出版社 (1980).
- [17] Лехницкий С. Г., *Анизотропные Пластинки*, Гостехиздат., М. (1957).

The Unsymmetrical Bending of Cantilever Rectangular Plates

Cheng Xiang-sheng

(Tongji University, Shanghai)

Abstract

This paper discusses the problems of the unsymmetrical bending of cantilever rectangular plates under various loads by the energy method. We illustrate numerous calculating examples such as the plates which are subjected by the concentrated forces or concentrated couples unsymmetrically on free sides and corner points and by a uniformly or nonuniformly distributed loads unsymmetrically on free edges and so forth.