应用数学和力学，第8卷第10期(1987年10月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

迁移理论中一类具扰动的Chandrasekhar H-方程解的存在性定理*

张 石 生

(四川大学数学系，1986 年8月18日收到)

摘 要

本文对迁移理论中一类具扰动的 Chandrasekhar H-方程解(在 $C[0,\ 1]$中)存在性和逼近问题作了某些研究．本文结果改进和发展了引文[1～9]中的某些结果．

一、引 论

在辐射和中子迁移理论中，下面的一类通常称为Chandrasekhar H-方程的非线性积分方程起着极为重要的作用：

$$H(t)=1+H(t)\int_0^1 \frac{t\psi(s)}{t+s} H(s)ds \tag{1.1}$$

关于上述方程解的存在性问题，在不同的空间以及在不同的假定下有不少人讨论过（见[1～10])．

本文的目的是在适当的条件下，讨论下面一类具扰动的Chandrasekhar H-方程

$$H(t)=1+H(t)\int_0^1 K(t,\ s)\psi(s)H(s)ds+\int_0^1 P(t,\ s,\ H(t),\ H(s))ds \tag{1.2}$$

在$C[0,\ 1]$中正解的存在性问题．本文的结果改进和发展了引文[1～9]中的某些结果．

二、预 备 知 识

以后我们用$C[0,\ 1]$表$[0,\ 1]$上一切实连续函数的Banach空间，其范数$\|\cdot\|_C$定义为

$$\|u\|_C=\max_{0\leq t\leq 1}|u(t)|$$

我们用$C_+[0,\ 1]$表$C[0,\ 1]$中的非负函数的锥，并用$C^\alpha[0,\ 1]$，$0<\alpha<1$ 表 $[0,\ 1]$上满足如下条件的一切实连续函数所成的Banach 空间：

$$\sup_{t,s\in[0,1]}\frac{|u(t)-u(s)|}{|t-s|^\alpha}<\infty$$

$C^\alpha[0,\ 1]$上的范数$\|\cdot\|_{C^\alpha}$按下式定义：

* 中国科学院科学基金资助的课题．

$$\|u\|_{C^\alpha}=\|u\|_C+\sup_{t,s\in[0,1]}\frac{|u(t)-u(s)|}{|t-s|^\alpha}$$

定义1　设(X, d)是一完备的度量空间，A是X的任一有界集．我们称

$$\gamma_X(A)=\inf\{\varepsilon\geqslant 0: A\text{可被有限个直径}\leqslant\varepsilon\text{的集合复盖}\}$$

为A的非紧性测度．如果f是映X中的有界集为X的有界集的连续函数，若存在某一数$k\in[0,\infty)$使得对一切有界集$A\subset X$有

$$\gamma_X(f(A))\leqslant k\gamma_X(A)$$

则称f为X上的k-集压缩映象．特别当$0\leqslant k<1$时，则称f为X上的严格集压缩映象．

引理1[2]　设A是Banach代数B的子集，设$T: A\to B$是由下式定义的算子：

$$Tx=x_0+KxLx$$

其中$x_0\in B$；$L: A\to B$满足$\|Lx-Ly\|\leqslant b\|x-y\|$，$\forall x, y\in A$，而$b\geqslant 0$是某一非负常数；$K: A\to B$是紧算子．设

$$a=\sup_{x\in A}\|Kx\|<\infty$$

且$a\cdot b<1$．则$T: A\to B$是严格集压缩映象．

引理2[12]　设$\{H_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$是$C[0, 1]$中某一集合$D$的任意一致有界的序列，若存在$\alpha\in(0, 1)$，使得对每一$n=1, 2, \cdots$，$KH_n(t)\in C^\alpha[0, 1]$，而且$\{KH_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$按$C^\alpha[0, 1]$中的范数为一致有界的．则$K$是$D\to C[0, 1]$的紧算子．

引理3[11]　设A是Banach空间X的有界闭凸集，T是$A\to A$的严格集压缩映象．则T在A中有不动点．

三、解的存在性定理

在本节中我们将假定方程(1.2)中的函数ψ，K，P满足下面的条件：

(Ⅰ)　$P: [0, 1]\times[0, 1]\times R^+\times R^+\to R$，且

$$|P(t, s, u_1, v_1)-P(t, s, u_2, v_2)|\leqslant\gamma_1|u_1-u_2|+\gamma_2|v_1-v_2|$$

$$\forall t, s\in[0, 1],\ u_i, v_i\in R^+,\ i=1, 2$$

$$\sup_{t,s\in[0,1],u,v\in R^+}|P(t, s, u, v)|\leqslant\varepsilon$$

(Ⅱ)　$\psi(t)\geqslant 0$，$t\in[0, 1]$，且$\int_0^1\psi(s)ds\leqslant\dfrac{1}{4(1+\varepsilon)}$

(Ⅲ)　$0\leqslant K(t, s)\leqslant 1$，$(t, s)\in[0, 1]\times[0, 1]$

$$K(t, s)+K(s, t)=1,\ \forall(t, s)\in[0, 1]\times[0, 1]$$

$$\sup_{t_1,t_2,s\in[0,1]}\frac{|K(t_1,s)-K(t_2, s)|}{|t_1-t_2|^\alpha}<\infty,\quad\alpha\in(0, 1)$$

定理1　设函数P，K，ψ满足条件(Ⅰ)～(Ⅲ)．令

$$\beta=\int_0^1\psi(s)ds,\ \mu=1+\varepsilon$$

则对任意满足下之条件的$\delta>0$和$r>0$：

(Ⅳ)　$\delta_1\leqslant\delta\leqslant\delta_2$，　$\dfrac{1}{\delta}(\gamma_1+\gamma_2)<1$

其中 $\delta_1=\frac{1}{2}(1-\sqrt{1-4\beta\mu})$, $\delta_2=\frac{1}{2}(1+\sqrt{1-4\beta\mu})$;

(V) $\beta\delta_1\leqslant r\leqslant\beta\delta_2$.

在集D_δ^r中存在方程(1.2)的解，其中

$$D_\delta^r=\{H(t)\in D_\delta,\ \|H\|_C\leqslant r\}$$

而

$$D_\delta=\{H(t)\in C_+[0,\ 1],\ \int_0^1 K(t,\ s)\psi(s)H(s)ds\leqslant 1-\delta\}$$

证 把方程(1.2)写成下面的形式：

$$H(t)=\frac{1+\int_0^1 P(t,\ s,\ H(t),\ H(s))ds}{1-\int_0^1 K(t,\ s)\psi(s)H(s)ds} \tag{3.1'}$$

并引入算子T:$TH=KHLH$，其中K，L分别定义为：

$$KH(t)=\frac{1}{1-\int_0^1 K(t,\ s)\psi(s)H(s)ds} \tag{*}$$

$$LH(t)=1+\int_0^1 P(t,\ s,\ H(t),\ H(s))ds \tag{**}$$

于是(3.1)′可写成

$$H=TH \tag{3.1}$$

故求解方程(1.2)等价于求T的不动点。另因D_δ^r是$C_+[0,\ 1]$中的非空闭凸集，由引理3只要证明T是$D_\delta^r\to D_\delta^r$的严格集压缩映象。为此，我们先证K是$D_\delta^r\to C[0,\ 1]$的紧算子。

事实上，设$\{H_n\}_{n=1}^{\infty}\subset D_\delta^r$是任一序列，现定义$g_n$如下：

$$g_n(t)=\int_0^1 K(t,\ s)\psi(s)H_n(s)ds,\quad n=1,\ 2,\ \cdots$$

因

$$\begin{aligned}\sup_{t_1,t_2\in[0,1]}\frac{|g_n(t_1)-g_n(t_2)|}{|t_1-t_2|^\alpha}&\leqslant\int_0^1\sup_{t_1,t_2\in[0,1]}\frac{|K(t_1,s)-K(t_2,s)|}{|t_1-t_2|^\alpha}\psi(s)H_n(s)ds\\&\leqslant M\cdot r\cdot\beta\end{aligned}$$

其中

$$M\triangleq\sup_{t_1,t_2,s\in[0,1]}\frac{1}{|t_1-t_2|^\alpha}|K(t_1,\ s)-K(t_2,\ s)|$$

故有

$$\begin{aligned}\|KH_n\|_{C^\alpha}&=\|KH_n\|_C+\sup_{t_1,t_2\in[0,1]}\frac{|KH_n(t_1)-KH_n(t_2)|}{|t_1-t_2|^\alpha}\\&\leqslant\frac{1}{\delta}+\frac{1}{\delta^2}\sup_{t_1,t_2\in[0,1]}\int_0^1\frac{|K(t_1,s)-K(t_2,s)|}{|t_1-t_2|^\alpha}\psi(s)H_n(s)ds\\&\leqslant\frac{1}{\delta}+\frac{1}{\delta^2}M\cdot r\cdot\beta\end{aligned}$$

故由引理2知K是$D_\delta^r\to C[0,\ 1]$的紧算子，且有

$$\sup_{H\in D_\delta^r}\|KH\|_C\leqslant\frac{1}{\delta} \tag{3.2}$$

现考察算子L。由条件(Ⅰ)知

$$\|LH_1-LH_2\|_C=\max_{0\le t\le 1}\left|\int_0^1[P(t,s,H_1(t),\ H_1(s))-P(t,s,H_2(t),H_2(s))]ds\right|$$
$$\le(\gamma_1+\gamma_2)\|H_1-H_2\|_C,\quad \forall H_1,\ H_2\in D_\delta^r \tag{3.3$'$}$$

故L是$D_\delta^r\to C[0,\ 1]$上的Lipschitz算子。

下证当$H\in D_\delta^r$时，$TH\in D_\delta^r$，即要证当$H\in D_\delta^r$时，有

(1) $\displaystyle\int_0^1 K(t,s)\psi(s)\left[\frac{1+\int_0^1 P(s,u,H(s),H(u))du}{1-\int_0^1 K(s,u)\psi(u)H(u)du}\right]ds\le 1-\delta$

(2) $\|TH\|_C\le r$

现证(1)式成立。设相反，有

$$\int_0^1 K(t,s)\psi(s)\left[\frac{1+\int_0^1 P(s,u,H(s),H(u))du}{1-\int_0^1 K(s,u)\psi(u)H(u)du}\right]ds>1-\delta \tag{3.3}$$

但因上式左端

$$\le\frac{1}{\delta}\int_0^1 K(t,s)\psi(s)(1+\varepsilon)ds\le\frac{1}{\delta}\mu\beta \tag{3.4}$$

由(3.3)和(3.4)得$\mu\beta>\delta-\delta^2$，即

$$\delta^2-\delta+\mu\beta>0 \tag{3.5}$$

由条件(Ⅱ)(3.5)的判别式$\Delta=1-4\mu\beta\ge 0$，故应有

$$\begin{cases}\delta>\dfrac{1+\sqrt{1-4\mu\beta}}{2}\ \text{或}\ \delta<\dfrac{1-\sqrt{1-4\mu\beta}}{2}, & \text{当}\Delta>0\text{时}\\[2ex] \delta\ne\dfrac{1}{2}, & \text{当}\Delta=0\text{时}\end{cases}$$

这与关于δ的假设条件相矛盾。由此矛盾知(1)成立。

下证(2)式成立，设相反有

$$\|TH\|_C>r \tag{3.6}$$

但因

$$\|TH\|_C=\max_{0\le t\le 1}\left|\frac{1+\int_0^1 P(t,s,H(t),\ H(s))ds}{1-\int_0^1 K(s,t)\psi(s)H(s)ds}\right|\le\frac{1+\varepsilon}{1-\beta r} \tag{3.7}$$

故由(3.6)和(3.7)得知$1+\varepsilon>r-\beta r^2$，即

$$\beta r^2-r+\mu>0 \tag{3.8}$$

故应有

$$\begin{cases}r<\dfrac{1-\sqrt{1-4\beta\mu}}{2\beta}\ \text{或}\ r>\dfrac{1+\sqrt{1-4\beta\mu}}{2\beta}, & \text{当}\Delta=1-4\beta\mu>0\text{时}\\[2ex] r\ne\dfrac{1}{2\beta}, & \text{当}\Delta=1-4\beta\mu=0\text{时}\end{cases}$$

这又与定理关于r的假定相矛盾。由此矛盾得知(2)式成立。因而得证T是$D_\delta^r\to D_\delta^r$的映象。于是由(3.2)，(3.3)$'$，条件(Ⅳ)及引理1知T是$D_\delta^r\to D_\delta^r$的严格集压缩映象。由引理3知T在

D_δ^r中存在不动点$H_*(t)$，而且该不动点$H_*(t)\in D_\delta^r$即是方程(1.2)在$C_+[0,1]$中的非负解。

定理证毕。

四、解 的 逼 近

定理2 设函数P, K, ψ满足前节中的条件(Ⅰ)，(Ⅱ)，(Ⅲ)。再设函数$P(t, s, u, v)$关于u, v是不减的，并且满足条件

$$\int_0^1[K(t,s)\psi(s)+P(t,s,1,1)]ds\geqslant 0, \quad \forall t\in[0,1] \tag{4.1}$$

设$H_0(t)=1$，并定义

$$H_{n+1}=TH_n, \qquad n=0,1,2,\cdots \tag{4.2}$$

则序列$\{H_n\}_{n=0}^{\infty}\subset D_\delta^r$一致收敛于方程(1.2)的某一解$H_*(t)\in D_\delta^r$，其中$\delta$和$r$分别满足定理1中的条件(Ⅳ)和条件(Ⅴ)。

证 易于证明$H_0(t)\in D_\delta^r$。但由定理1的证明过程得知T是$D_\delta^r\to D_\delta^r$的严格集压缩映象。因而有$A=\{H_n\}_{n=0}^{\infty}\subset D_\delta^r$，而且存在数$k\in(0,1)$，使得

$$\gamma_C(T(A))\leqslant k\gamma_C(A) \tag{4.3}$$

其中γ_C表$C[0,1]$上的非紧性测度。另因$A=\{H_0\}\cup T(A)$，而且有

$$\gamma_C(A)=\max\{\gamma_C(\{H_0\}),\ \gamma_C(T(A))\}=\gamma_C(T(A)) \tag{4.4}$$

由(4.3)和(4.4)即得$\gamma_C(A)=0$，即A是D_δ^r中的一相对紧集。故存在$\{H_n\}_{n=0}^{\infty}$中某一子列$\{H_{n_i}\}$一致收敛于某一点$H_*(t)\in D_\delta^r$。下证整个序列$\{H_n\}$在D_δ^r中一致收敛于H_*。为此，我们只要证明

$$H_{n+1}\geqslant H_n, \qquad n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots \tag{4.5}$$

即可。事实上，当$n=0$时，由(4.1)有

$$1+\int_0^1 P(t,\ s,\ 1,\ 1)ds\geqslant 1-\int_0^1 K(t,\ s)\psi(s)ds$$

故有

$$H_1(t)=TH_0(t)=\frac{1+\int_0^1 P(t,s,1,1)ds}{1-\int_0^1 K(t,s)\psi(s)ds}\geqslant 1=H_0(t)$$

故(4.5)对$n=0$成立。现设(4.5)对n成立，即有

$$H_n\geqslant H_{n-1} \tag{4.6}$$

下证(4.5)对$n+1$也成立($H_{n+1}\geqslant H_n$)。事实上，因

$$TH_n=H_{n+1}=\frac{1+\int_0^1 P(t,s,H_n(t),\ H_n(s))ds}{1-\int_0^1 K(t,s)\psi(s)H_n(s)ds}$$

$$H_{n+1}-H_n=\frac{1+\int_0^1 P(t,s,H_n(t),\ H_n(s))ds}{1-\int_0^1 K(t,s)\psi(s)H_n(s)ds}-\frac{1+\int_0^1 P(t,s,H_{n-1}(t),\ H_{n-1}(s))ds}{1-\int_0^1 K(t,s)\psi(s)H_{n-1}(s)ds}$$

$$=\frac{N}{E} \tag{4.7}$$

其中

$$E=(1-\int_0^1 K(t,s)\psi(s)H_n(s)ds)(1-\int_0^1 K(t,s)\psi(s)H_{n-1}(s)ds) \tag{4.8}$$

$$\begin{aligned}N=&\int_0^1[P(t,s,H_n(t),H_n(s))-P(t,s,H_{n-1}(t),\ H_{n-1}(s))]ds\\&+\int_0^1 K(t,s)\psi(s)[H_n(s)-H_{n-1}(s)]ds\\&-\int_0^1 P(t,s,H_n(t),H_n(s))ds\cdot\int_0^1 K(t,s)\psi(s)H_{n-1}(s)ds\\&+\int_0^1 P(t,s,H_{n-1}(t),\ H_{n-1}(s))ds\cdot\int_0^1 K(t,s)\psi(s)H_n(s)ds\end{aligned} \tag{4.9}$$

因$H_n(t)$，$H_{n-1}(t)\in D_\delta^r$，故$E>0$。另外，直接计算表明，(4.9)中的N又可写成为：

$$\begin{aligned}N=&\left(1+\int_0^1 P(t,s,\ H_{n-1}(t),\ H_{n-1}(s))ds\right)\cdot\int_0^1 K(t,s)\psi(s)[H_n(s)-H_{n-1}(s)]ds\\&+\left(1-\int_0^1 K(t,s)\psi(s)H_{n-1}(s)ds\right)\cdot\int_0^1[P(t,s,H_n(t),\ H_n(s))\\&-P(t,s,H_{n-1}(t),\ H_{n-1}(s))]ds\end{aligned} \tag{4.10}$$

由P的单调性假设，及归纳法的假定，(4.10)式右端第二项非负。又因

$$H_n\geqslant H_{n-1}\geqslant\cdots\geqslant H_0=1$$

其中

$$H_n(t)=\frac{1+\int_0^1 P(t,s,H_{n-1}(t),\ H_{n-1}(s))ds}{1-\int_0^1 K(t,s)\psi(s)H_{n-1}(s)ds}$$

故得

$$1+\int_0^1 P(t,s,H_{n-1}(t),\ H_{n-1}(s))ds\geqslant 1-\int_0^1 K(t,s)\psi(s)H_{n-1}(s)ds\geqslant\delta>0$$

因而(4.10)式右端第一项也是非负的。故由(4.7)有

$$H_{n+1}\geqslant H_n$$

从而$\{H_n\}_{n=0}^{\infty}$在D_δ^r中一致收敛于$H_*(t)\in D_\delta^r$。

现于下式两端让$n\to\infty$：

$$H_{n+1}(t)=\frac{1+\int_0^1 P(t,s,H_n(t),\ H_n(s))ds}{1-\int_0^1 K(t,s)\psi(s)H_n(s)ds}$$

即得

$$H_*(t)=\frac{1+\int_0^1 P(t,s,H_*(t),\ H_*(s))ds}{1-\int_0^1 K(t,s)\psi(s)H_*(s)ds}$$

故$H_*(t)$是方程(1.2)在D_δ^r中的非负解。证毕。

注 本文的定理1和定理2改进和发展了引文[1～9]中的许多重要的结果.

参 考 文 献

[1] Chandrasekhar, S., *Radiative Transfer*, Dover, New York (1960).
[2] Legget, R. W., On certain nonlinear integral equations, *J. Math. Anal. Appl.*, 57 (1977), 462—468.
[3] Stuart, C. A., Existence theorems for a class of nonlinear integral equations, *Math. Z.*, **137** (1974), 49—66.
[4] Hively, G. A., On a class of nonlinear integral equations arising in transport theory, *SIAM Math. Anal.*, **9**, 5 (1978), 787—792.
[5] Cahlon, B. and M. Eskin, Existence theorems for an integral equations of the Chandrasekhar H-equation with perturbation, *J. Math. Anal. Appl.*, 83 (1981), 159—171.
[6] 刘清荣，在迁移理论中一类非线性积分方程的极大解和极小解，科学通报，1 (1982)，4—8.
[7] 白锦东，迁移理论中一类非线性积分方程的唯二性，数学物理学报，**4**, 4 (1984), 393—398.
[8] Legget, R. W., A new approach to the H-equation of Chandrasekhar, *SIAM Math. Anal.*, **7**, 4 (1976), 542—550.
[9] Busbridge, I. W., On the H-function of Chandrasekhar, *Quart. J. Math.*, Oxford Ser., **8** (1957), 133—140.
[10] 张石生，《积分方程》，重庆出版社 (1986).
[11] Istratescu, V. I., *Fixed Point Theory*, D. Reidel Publishing Company, Holland (1981).
[12] Friedman, A., *Partial Differential Equations of Parabolic Type*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J. (1964).

Existence Theorems for a Class of Chandrasekhar H-Equation with Perturbation in Transport Theory

Zhang Shi-sheng
(Department of Mathematics, Sichuan University, Chengdu)

Abstract

In this paper, the existence and approximation theorems of positive solutions in space $C[0, 1]$ for a class of Chandrasekhar H-equations with perturbation in transport theory are proved. The results presented in this paper improve and extend some recent results in [1～9].