应用数学和力学，第 8 卷第10期(1987年10月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

平均温度分布随时间变化时的 Bénard 对流*

吴 烽

（中国科学技术大学近代力学系，1986年7月13日收到）

摘 要

本文假定上、下平板之间温差随时间按指数规律变化，研究当界于两平板之间流体层的平均温度分布随时间变化时的Bénard对流，文中将临界Rayleigh 数当作时间的函数，并将其按小参数展开成级数．在时间远离零点时，得到临界 Rayleigh 数的一个近似到二阶的非常简单的表达式．

一、引 言

自然界中，在广大的尺度范围内，发生着如此多种多样形式的热对流，以致于我们可以毫不夸张地说，热对流是自然界中最常见的流体流动[1]．同辐射一样，对流是星际之间热交换的重要原因，我们周围大气、海洋中，热对流同样起着重要作用，人们还认为位于地球内部的流体对流是形成地球磁场的原因．不仅在自然环境中，而且在工业中，凡是考虑热交换的地方都可以发现各种形式的热对流存在．理论上，热对流是研究向湍流过度的最基本、简单的系统之一，流体层内的热对流还是研究非线性流体动力学的典型模式．

Bénard (1900, 1901) 在一层很薄的流体层的下方加热，观察到六角形的对流模式．后来，人们就称在下方被加热（或在上方被冷却）的流体层中的对流运动为 Bénard 对流．

由于 Bénard 对流在理论上、实践上的重要意义，吸引着人们越来越多的注意，在过去二十多年里，从各个侧面研究这个题目的论文迅速增多．起初，多数这种研究都假定流体中平均温度分布不随时间变化；但是许多地球物理现象，例如大气、海洋中的对流，温度分布是随时间变化的．Yih 和 Li(1972)[2]，Lick(1965)[3]，Currie(1967)[4]，Foster (1965, 1968)[5],[6]，Davis(1971)[7]，Homsy(1973)[8]，Jhaveri 和 Homsy (1982)[9] 等曾在不同条件下，利用各种方法研究了平均温度随时间变化情形下的Bénard对流．本文假定流体层上、下表面温度差随时间增大，但按指数规律随时间渐近地趋于一定态，从理论上研究在这种情形下流体层内的 Bénard 对流．首先得到平均温度分布，这个分布是随时间变化的，而且随空间变化是非线性的；然后将扰动量和临界Rayleigh数展开成级数；最后求出一个非常简单的、近似到二阶的临界Rayleigh数的表达式，它表明随着时间推移，上、下表面温差逐渐变大时，临界Rayleigh数也逐渐降低这个合理的结果．

* 蔡树棠推荐．

二、平均温度分布

取笛卡尔坐标x_1，x_2，x_3，其中x_3是沿铅直方向的坐标，正方向指向上方。考虑两平板之间的流体层。这两平板相互平行，无限大，都垂直于x_3轴，其中上板位于$x_3=d/2$，下板位于$x_3=-d/2$，d是两板距离，两板之间中点处取为坐标原点。

设上板、下板温度分别是

$$T_0-\frac{1}{2}\Delta T_m(1-\exp[-\beta\tau])$$

和

$$T_0+\frac{1}{2}\Delta T_m(1-\exp[-\beta\tau])$$

这里T_0，ΔT_m是两个正常数，β是一个小的正参数(这意味着板的温度变化是非常缓慢的)，τ是无量纲时间，$\tau=kt/d^2$ (k是热扩散系数，是常数；t是时间)。于是，决定平均温度T_m的方程是：

$$\frac{\partial T_m}{\partial t}=k\frac{\partial^2 T_m}{\partial x_3^2} \tag{2.1}$$

令 $T_m=T_0+T_1(t,x_3)$ 代入(2.1)得关于T_1的方程

$$\frac{\partial T_1}{\partial t}=k\frac{\partial^2 T_1}{\partial x_3^2} \tag{2.2}$$

关于T_1的边界条件是：

$$\left.\begin{aligned} T_1&=-\frac{1}{2}\Delta T_m(1-\exp[-\beta\tau]) \qquad 当x_3=\frac{d}{2}时 \\ T_1&=\frac{1}{2}\Delta T_m(1-\exp[-\beta\tau]) \qquad 当x_3=-\frac{d}{2}时\end{aligned}\right\} \tag*{(2.2)$'$}$$

初始条件是

$$T_1=0 \qquad 当\ t=0时 \tag*{(2.2)$''$}$$

在边界条件(2.2)$'$与(2.2)$''$下的方程(2.2)的解是

$$\frac{T_1}{\Delta T_m}=-z(1-\exp[-\beta\tau])+\frac{\beta}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\sin(2n\pi z)}{n(4n^2\pi^2-\beta)}(\exp[-\beta\tau]-\exp[-4n^2\pi^2\tau])$$

其中$z=x_3/d$。

令 $\bar\theta_1=T_1/\Delta T_m$ 则有

$$\bar\theta_1=-z(1-\exp[-\beta\tau])+\frac{\beta}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\sin(2n\pi z)}{n(4n^2\pi^2-\beta)}(\exp[-\beta\tau]-\exp[-4n^2\pi^2\tau]) \tag{2.3}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\bar\theta_1}{\partial z}&=-(1-\exp[-\beta\tau])+2\beta\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cos(2n\pi z)}{4n^2\pi^2-\beta}(\exp[-\beta\tau]-\exp[-4n^2\pi^2\tau])\\ &=-(1-\exp[-\beta\tau])+\beta\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n^2\pi^2}\left\{1+\frac{\beta}{4n^2\pi^2}+\frac{\beta^2}{(4n^2\pi^2)^2}+\cdots\right\}\\ &\quad\cdot(\exp[-\beta\tau]-\exp[-4n^2\pi^2\tau])\cos(2n\pi z)\end{aligned} \tag{2.4}$$

或者将(2.4)写成下面的形式：

$$\frac{\partial\bar{\theta}_1}{\partial z}=-(1-\exp[-\beta\tau])+\beta h_1+\beta^2 h_2+O(\beta^3) \tag{2.5}$$

其中 $$h_1=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n^2\pi^2}(\exp[-\beta\tau]-\exp[-4n^2\pi^2\tau])\cos(2n\pi z)$$

$$h_2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n^2\pi^2}\cdot\frac{1}{4n^2\pi^2}(\exp[-\beta\tau]-\exp[-4n^2\pi^2\tau])\cos(2n\pi z)$$

这些式子表明，平均温度不是z的线性函数，而且随时间变化。

三、稳定性问题微分方程组

流体密度ρ与流体温度T之间关系是

$$\rho=\rho_0[1-\alpha(T-T_0)] \tag{3.1}$$

α是热膨胀系数。

平均压力分布是

$$\frac{\partial\bar{p}}{\partial x_3}=-\rho_0 g[1-\alpha(T_m-T_0)] \tag{3.2}$$

其中g是重力加速度，$\bar{p}$是平均压力。

现在给流体一个小扰动：

$$T=T_m+T',\qquad p=\bar{p}+p' \tag{3.3}$$

T'，p'是扰动温度与扰动压力。

由于没有平均流动，所以扰动速度就是$u_i(i=1,2,3)$。

在忽略二阶小量情形下，运动方程成为[10]：

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}=(0,\ 0,\ g\alpha T')-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p'}{\partial x_i}+\nu\nabla^2 u_i \tag{3.4}$$

能量方程是

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-k\nabla^2\right)T'=-u_3\frac{\partial T_m}{\partial x_3}=-u_3\frac{\partial T_1}{\partial x_3} \tag{3.5}$$

其中ν是运动学粘性系数，假定为常数，∇^2是拉普拉斯算子。在得到这些方程时，我们认为Boussinesq假设是成立的。

从(3.4)、(3.5)式中消去变量u_1，u_2和p'[10]可以得到

$$\frac{\partial}{\partial t}\nabla^2 u_3=g\alpha\nabla_1^2 T'+\nu\nabla^2\nabla^2 u_3$$

即

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-\nu\nabla^2\right)\nabla^2 u_3=g\alpha\nabla_1^2 T' \tag{3.6}$$

这里

$$\nabla_1^2\equiv\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$$

边界条件是：

$$u_i=0\qquad(i=1,2,3)\quad 在x_3=\pm\frac{d}{2}处$$

注意到在两板处有：

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1}=0, \quad \frac{\partial u_2}{\partial x_2}=0$$

利用连续方程得到

$$\frac{\partial u_3}{\partial x_3}=0 \qquad \text{在 } x_3=\pm\frac{d}{2}\text{ 处}$$

于是对u_3我们有：

$$u_3=\frac{\partial u_3}{\partial x_3}=0 \qquad \text{在 } x_3=\pm\frac{1}{2}d\text{ 处} \tag{3.7}$$

如果板的热传导比流体热传导大得很多，则关于T'的边界条件可以写为

$$T'=0 \qquad \text{在 } x_3=\pm\frac{d}{2}\text{ 处} \tag{3.8}$$

(3.5)、(3.6)、(3.7)、(3.8)式组成稳定性问题的微分方程组系统。

下面进一步引进无量纲变量：

$$(x,\ y,\ z)=\left(\frac{x_1}{d},\ \frac{x_2}{d},\ \frac{x_3}{d}\right)$$

并假定 $u_3=\dfrac{k}{d}\exp[\sigma\tau]f(x,y)w(z,\tau)$，$T'=-\Delta T_m\exp[\sigma\tau]f(x,y)\theta(z,\tau)$　　(3.9)

其中f满足关系式：

$$f_{xx}+f_{yy}+a^2f=0 \tag{3.10}$$

式中f_{xx}，f_{yy}分别是f的对x和对y的二阶导数，a是水平方向上的波数。于是方程(3.5)和(3.6)在代入(3.9)和引用无量纲$(x,\ y,\ z)$后，变成为：

$$\left[\frac{\sigma}{Pr}-(D^2-a^2)\right](D^2-a^2)w=Ra^2\theta-\frac{1}{Pr}(D^2-a^2)\frac{\partial w}{\partial\tau} \tag{3.11}$$

$$[\sigma-(D^2-a^2)]\theta=w\frac{\partial\bar{\theta}_1}{\partial z}-\frac{\partial\theta}{\partial\tau} \tag{3.12}$$

其中

$$D=\frac{\partial}{\partial z}, \quad R=\frac{\Delta T_m g\alpha d^3}{k\nu}, \quad Pr=\frac{\nu}{k} \tag{3.13}$$

R是 Rayleigh 数，Pr是Prandtl数。

相应的边界条件是：

$$\left.\begin{aligned} &w=0=Dw && \text{在 } z=\pm\frac{1}{2}\text{ 处} \\ &\theta=0 && \text{在 } z=\pm\frac{1}{2}\text{ 处} \end{aligned}\right\} \tag{3.14}$$

我们认为流体的临界状态是$\sigma=0$，在(3.11)和(3.12)中令$\sigma=0$就得到

$$(D^2-a^2)^2w=-R_0a^2\theta+\frac{1}{Pr}(D^2-a^2)\frac{\partial w}{\partial\tau} \tag{3.15}$$

$$(D^2-a^2)\theta=-w\frac{\partial\bar{\theta}_1}{\partial z}+\frac{\partial\theta}{\partial\tau} \tag{3.16}$$

式中 R_0 是临界 Rayleigh 数。

四、求 解 方 法

现在来解方程(3.15)和(3.16)，其边界条件是(3.14)。

首先，必须注意到(3.15)式中临界 Rayleigh 数R_c是时间τ的函数。这是因为流体层内平均温度分布是时间τ的函数，相应不同的时间有不同的平均温度分布，也就有不同的临界Rayleigh 数R_c与之对应。

我们从(3.15)和(3.16)两式中消去θ后，可以得到下面关于w的方程：

$$(D^2-a^2)^3w=a^2R_c w\frac{\partial\tilde{\theta}_1}{\partial z}-\frac{1}{R_c}\frac{dR_c}{d\tau}(D^2-a^2)^2w$$

$$+\left[\left(1+\frac{1}{Pr}\right)(D^2-a^2)+\frac{1}{Pr}\cdot\frac{1}{R_c}\frac{dR_c}{d\tau}\right](D^2-a^2)\frac{\partial w}{\partial\tau}$$

$$-\frac{1}{Pr}(D^2-a^2)\frac{\partial^2 w}{\partial\tau^2} \tag{4.1}$$

由(3.14)式，并注意到(3.15)式，则边界条件是：

$$w=0=Dw,\quad (D^2-a^2)^2w=\frac{1}{Pr}(D^2-a^2)\frac{\partial w}{\partial\tau}\qquad 当\ z=\pm\frac{1}{2}时 \tag{4.2}$$

然后，将w与R_c展开成小参数β的级数：

$$w=w_0+w_1\beta+w_2\beta^2+\cdots+\beta\sum_{n=1}^{\infty}w_{1n}\exp[-4n^2\pi^2\tau]+\beta^2\sum_{n=1}^{\infty}w_{2n}\exp[-4n^2\pi^2\tau]+\cdots$$

$$+\beta^2\sum_{n,m=1}^{\infty}w_{2n,m}\exp[-4(n^2+m^2)\pi^2\tau]+\cdots \tag{4.3}$$

$$R_c=R_0+R_1\beta+R_2\beta^2+\cdots \tag{4.4}$$

其中w_0，$w_1,\cdots,w_{1n},w_{2n},\cdots,w_{2n,m},\cdots$是$z$与$\tau$的函数；$R_0$，$R_1$，$R_2,\cdots$是$\tau$的函数。

将(4.3)、(4.4)式代入(4.1)式，并利用(2.5)式，我们可以得到关于w_0，w_1，$w_2,\cdots$，w_{1n}，$w_{2n},\cdots,w_{2n,m},\cdots$等的方程及相应的边界条件。

为了简化这些方程，我们考虑τ不是很小的情况，这时凡包含因子

$$\exp[-4n^2\pi^2\tau],\ \exp[-4(n^2+m^2)\pi^2\tau],\cdots$$

的那些项都是非常小的，可以略去。于是我们就可以仅限于讨论w_0，w_1，$w_2,\cdots$。

首先讨论一阶近似情形。

关于w_0的方程是：

$$[(D^2-a^2)^3+a^2\widetilde{R}_0]w_0=0 \tag{4.5}$$

式中 $$\widetilde{R}_0=R_0(1-\exp[-\beta\tau])$$

从(4.5)式易知，对于较大τ值时有：

$$\frac{\partial w_0}{\partial\tau}\sim O(\beta),\qquad \frac{\partial^2 w_0}{\partial\tau^2}\sim O(\beta^2),\cdots \tag{4.6}$$

所以相应于(4.5)方程的边界条件就是：

$$w_0=Dw_0=0,\ (D^2-a^2)^2w_0=0\qquad 当\ z=\pm\frac{1}{2}时 \tag{4.7}$$

方程(4.5)及边界条件(4.7)完全与[10]第444页上方程(50)及(51)一样，于是我们可以

直接写出它的解是：

$$w_0 = A_0 \cos q_0 z + A_1 \cosh qz + A_2 \cosh q^* z \tag{4.8}$$

其中

$$q_0 = a\left[\left(\frac{\tilde{R}_0}{a^4}\right)^{\frac{1}{3}} - 1\right]^{\frac{1}{2}},\quad q^2 = a^2\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\tilde{R}_0}{a^4}\right)^{\frac{1}{3}}(1 + i\sqrt{3})\right]$$

q^*是q的共轭复数．利用边界条件，我们可以得到一组关于A_0，A_1和A_2的代数方程组．因为A_0，A_1和A_2不能全部为零，所以可以得到系数行列式等于零，这正是$\tilde{R}_0$与a之间关系式．由于我们只关心临界Rayleigh数，所以，相应于$a=3.117$，最小的 $\tilde{R}_0$ 值是 1707.76，也即 $\tilde{R}_0=1707.76$[10]．

于是我们有

$$R_0 = \frac{\tilde{R}_0}{1-\exp[-\beta\tau]} = \frac{1707.76}{1-\exp[-\beta\tau]} \tag{4.9}$$

同时相应的有

$$A_0 = 1,\quad A_1 = -\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\,\frac{\cos(q_0/2)}{\cosh(q/2)} = -0.03075 - i0.05194,\quad A_2 = A_1^* \tag{4.10}$$

此处 A_1^*是A_1的共轭复数．

现在转到二阶近似的计算．

注意到(4.6)式，我们可以有关于w_1的方程

$$[(D^2-a^2)^3 + a^2\tilde{R}_0]w_1 = -a^2\tilde{R}_1 w_0 + \frac{R_0-\tilde{R}_0}{\tilde{R}_0}(D^2-a^2)^2 w_0$$

$$+ a^2 w_0(R_0-\tilde{R}_0)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n^2\pi^2}\cos 2n\pi z \tag{4.11}$$

其中 $\tilde{R}_1 = R_1(1-\exp[-\beta\tau])$ (4.12)

从(4.11)式易知，当τ不是很小时有

$$\frac{\partial w_1}{\partial\tau} \sim O(\beta),\qquad \frac{\partial^2 w_1}{\partial\tau^2} \sim O(\beta^2) \tag{4.13}$$

所以，关于w_1的边界条件是：

$$w_1 = Dw_1 = 0,\ \beta(D^2-a^2)^2 w_1 = \frac{1}{Pr}(D^2-a^2)\frac{\partial w_0}{\partial\tau}\qquad \text{当 } z = \pm\frac{1}{2}\text{时}$$

但是已求出的w_0与τ无关，故w_1的边界条件是：

$$w_1 = Dw_1 = 0,\ (D^2-a^2)^2 w_1 = 0\qquad \text{当 } z = \pm\frac{1}{2}\text{时} \tag{4.14}$$

设方程(4.11)、(4.14)的解是

$$w_1 = B_0 \cos q_0 z + B_1 \cosh qz + B_2 \cosh q^* z + w_{1P} \tag{4.15}$$

这里

$$w_{1P} = P_4 z \sin q_0 z + P_6 z \sinh qz + P_6 z \sinh q^* z + \sum_{n=1}^{\infty} P_{7n_1}\cos 2n\pi z \cos q_0 z$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} P_{8n_1}\cos 2n\pi z \cosh qz + \sum_{n=1}^{\infty} P_{9n_1}\cos 2n\pi z \cosh q^* z$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty} P_{7n2}\sin 2n\pi z\sin q_0 z+\sum_{n=1}^{\infty} P_{8n2}\sin 2n\pi z\sinh qz$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty} P_{9n2}\sin 2n\pi z\sinh q^* z \tag{4.16}$$

其中
$$\left.\begin{aligned}
P_4&=-\frac{A_0a^2\widetilde{R}_1}{6q_0(q_0^2+a^2)^2}+\frac{R_0-\widetilde{R}_0}{6q_0\widetilde{R}_0}A_0\\
P_5&=-\frac{A_1a^2\widetilde{R}_1}{6q(q^2-a^2)^2}+\frac{R_0-\widetilde{R}_0}{6q\widetilde{R}_0}A_1\\
P_6&=P_5^*=-\frac{A_2a^2\widetilde{R}_1}{6q^*(q^{*2}-a^2)^2}+\frac{R_0-\widetilde{R}_0}{6q^*\widetilde{R}_0}A_2\\
P_{7n1}&=\frac{(-1)^{n+1}}{2n^2\pi^2}\frac{\widetilde{R}_0a^2+f_n(-q_0^2)}{[\widetilde{R}_0a^2+f_n(-q_0^2)]^2-q_0^2[g_{n0}(-q_0^2)]^2}a^2A_0(R_0-\widetilde{R}_0)\\
P_{7n2}&=\frac{(-1)^{n}}{2n^2\pi^2}\frac{q_0\,g_{n0}(-q_0^2)}{[\widetilde{R}_0a^2+f_n(-q_0^2)]^2-q_0^2[g_{n0}(-q_0^2)]^2}a^2A_0(R_0-\widetilde{R}_0)\\
P_{8n1}&=\frac{(-1)^{n+1}}{2n^2\pi^2}\frac{\widetilde{R}_0a^2+f_n(q^2)}{[\widetilde{R}_0a^2+f_n(q^2)]^2+q^2[g_n(q^2)]^2}a^2A_1(R_0-\widetilde{R}_0)\\
P_{8n2}&=\frac{(-1)^{n}}{2n^2\pi^2}\frac{q\,g_n(q^2)}{[\widetilde{R}_0a^2+f_n(q^2)]^2+q^2[g_n(q^2)]^2}a^2A_1(R_0-\widetilde{R}_0)\\
P_{9n1}&=P_{8n1}^*,\qquad P_{9n2}=P_{8n2}^*
\end{aligned}\right\} \tag{4.17}$$

式中函数

$$f_n(x)=[x-a^2-(2n\pi)^2]^3-48n^2\pi^2x[x-a^2-(2n\pi)^2]$$
$$g_n(x)=(4n\pi)^3x-12n\pi[x-a^2-(2n\pi)^2]$$
$$g_{n0}(x)=-(4n\pi)^3x-12n\pi[x-a^2-(2n\pi)^2]$$

而P_5^*，P_{8n1}^*，P_{8n2}^*分别是P_5，P_{8n1}，P_{8n2}的共轭复数。

由边界条件(4.14)，我们可以决定(4.15)式中系数B_0，B_1，B_2和$\widetilde{R}_1$，事实上由(4.14)及(4.15)我们可以得到：

$$\left.\begin{aligned}
&B_0\cos\frac{q_0}{2}+B_1\cosh\frac{q}{2}+B_2\cosh\frac{q^*}{2}=-w_{1P}\left(\frac{1}{2}\right)\\
&-B_0q_0\sin\frac{q_0}{2}+B_1q\sinh\frac{q}{2}+B_2q^*\sinh\frac{q^*}{2}=-Dw_{1P}\left(\frac{1}{2}\right)\\
&B_0(q_0^2+a^2)^2\cos\frac{q_0}{2}+B_1(q^2-a^2)^2\cosh\frac{q}{2}+B_2(q^{*2}-a^2)^2\cosh\frac{q^*}{2}\\
&\qquad=(D^2-a^2)^2w_{1P}\left(\frac{1}{2}\right)
\end{aligned}\right\} \tag{4.18}$$

注意到(4.18)式左边B_0，B_1，B_2的系数行列式等于零，

即

$$\begin{vmatrix} \cos\dfrac{q_0}{2} & \cosh\dfrac{q}{2} & \cosh\dfrac{q^*}{2} \\ -q_0\sin\dfrac{q_0}{2} & q\sinh\dfrac{q}{2} & q^*\sinh\dfrac{q^*}{2} \\ (q_0^2+a^2)^2\cos\dfrac{q_0}{2} & (q^2-a^2)^2\cosh\dfrac{q}{2} & (q^{*2}-a^2)^2\cosh\dfrac{q^*}{2} \end{vmatrix}=0$$

因为B_0，B_1，B_2不可能是无限大，所以一定会有

$$\begin{vmatrix} w_{1P}\left(\dfrac{1}{2}\right) & \cosh\dfrac{q}{2} & \cosh\dfrac{q^*}{2} \\ Dw_{1P}\left(\dfrac{1}{2}\right) & q\sinh\dfrac{q}{2} & q^*\sinh\dfrac{q^*}{2} \\ (D^2-a^2)^2 w_{1P}\left(\dfrac{1}{2}\right) & (q^2-a^2)^2\cosh\dfrac{q}{2} & (q^{*2}-a^2)^2\cosh\dfrac{q^*}{2} \end{vmatrix}=0 \tag{4.19}$$

(4.19)式就是关于$\tilde{R}_1$的方程，从这个式子我们可以计算$\tilde{R}_1$；然后令$B_0=0$，再利用(4.18)式去计算B_1和B_2；当第二阶近似计算完成后就可以转到下一级近似计算，如此类推。

五、结 果 和 讨 论

通过数值计算，第二级近似的结果是：

$$\left.\begin{aligned} &B_1=(0.00091+0.00184i)\frac{\exp[-\beta\tau]}{1-\exp[-\beta\tau]}, \qquad B_2=B_1^* \\ &R_1=0.03635\frac{\tilde{R}_0\exp[-\beta\tau]}{(1-\exp[-\beta\tau])^2} \end{aligned}\right\} \tag{5.1}$$

其中B_1^*是B_1的共轭复数。

所以归纳起来，只取一阶近似的临界Rayleigh数是：

$$R_c=R_0=\frac{\tilde{R}_0}{1-\exp[-\beta\tau]} \tag{5.2}$$

直到二阶近似的临界Rayleigh数是：

$$R_c=R_0+R_1\beta=\frac{\tilde{R}_0}{1-\exp[-\beta\tau]}(1+\delta) \tag{5.3}$$

其中 $$\delta=0.03635\beta\frac{\exp[-\beta\tau]}{1-\exp[-\beta\tau]}$$

(5.2)式、(5.3)式中$\tilde{R}_0=1707.76$，是上、下平板温度差不随时间变化时的临界Rayleigh数。

当时间$\tau\to\infty$时，无论是一阶近似还是直到二阶近似的临界Rayleigh数都以$\tilde{R}_0=1707.76$为极限。此时，$w\to w_0$，这就回到平均温度不依赖时间时的结果，这正是期望的结果，因为$\tau\to\infty$时，上、下板温差就是常数ΔT_m了。

由(5.2)、(5.3)式，我们还可以看出，随时间推移，上、下板温差逐渐变大，而临界Rayleigh数R_c却逐渐下降，但始终比$\tilde{R}_0=1707.76$大。这就是说，若ΔT_m取得使$\Delta T_m g\alpha d^3/(k\nu)\leqslant\tilde{R}_0=1707.76$，则在整个上、下板温度差变化过程中不会达到临界状态而出现热对流运动，这也是预料之中的事。如果ΔT_m取得足够大，则达到一定时间后，两板之间温度差大

到一定程度，就会出现热对流运动。这时可利用下式计算热对流开始发生的时间τ_c

$$\frac{\Delta T_m g\alpha d^3}{k\nu}=\frac{\tilde{R}_0}{1-\exp[-\beta\tau_c]}(1+\delta_c) \tag{5.4}$$

其中 $$\delta_c=0.03635\beta\frac{\exp[-\beta\tau_c]}{1-\exp[-\beta\tau_c]}$$

由(5.4)得到：

$$\frac{\Delta T_m(1-\exp[-\beta\tau_c])g\alpha d^3}{k\nu}=\tilde{R}_0(1+\delta_c) \tag{5.5}$$

这表明若以两板温度差来定义 Rayleigh 数R^*，即

$$R^*=\frac{\Delta T_m(1-\exp[-\beta\tau])g\alpha d^3}{k\nu}$$

当取一阶近似时，R^*的临界值R^*_c正是$\tilde{R}_0$，这与两板温差固定时的临界Rayleigh数一样。这就是说，两板温度差固定时的情形是两板温差缓慢变化情形的一阶近似。当取二阶近似时，由于$\delta>0$，所以显然有$R^*_c>\tilde{R}_0$，即温度差随时间变化时的临界 Rayleigh 数大于温度差不变时的临界Rayleigh数。

另外，虽然(5.2)、(5.3)在$\tau\to 0$时给出$R_c\to\infty$的结果是合理的（因为$\tau\to 0$，上、下两板温差趋于零，流体中当然不会发生热对流），但是(5.3)式却不能被应用于$\tau\to 0$的情形。(5.3)式成立的条件是$(1-\exp[-\beta\tau])$不能很小，因为当$(1-\exp[-\beta\tau])$很小时，δ就可能大于1，这表明展开式(4.3)与(4.4)不能应用于非常小的τ值。我们可以估计能应用的τ值范围。事实上，当$\beta\tau\to 0$时，$\delta\to 0.03635/\tau$，所以如果$\tau>0.36$则δ总是小于0.1，这说明$\tau>0.36$已是可以应用的范围了。

我们的结论是，对于时间τ不等于0，且大于某一个数值时，(4.1)和(4.2)式的解可以展开成w和R_c级数(4.3)和(4.4)，并且可以进一步得到临界Rayleigh数的随时间变化的一个简单表达式。

这个工作是在美国密执安大学易家训教授指导和帮助下完成的，在这里仅表示衷心感谢。

参 考 文 献

[1] Busse, F. H., Non-linear properties of thermal convection, *Pep. Prog. Phys.*, **41** (1978), 1929—1967.

[2] Yih, C. S. and C. H. Li, Instability of unsteady flows or configurations, Part 2. Convective instability, *J. Fluid Mech.*, 54 (1972), 143—152.

[3] Lick, W., The instability of a fluid layer with time-dependent heating, *J. Fluid Mech.*, 21 (1965), 565—576.

[4] Currie, I. G., The effect of heating rate on the stability of stationary fluids, *J. Fluid Mech.*, 29 (1967), 337—347.

[5] Foster, T. D., Stability of a homogeneous fluid cooled uniformly from above, *Phys. Fluids*, **8** (1965), 1249—1257.

[6] Foster, T. D., Effect of boundary conditions on the onset of convection, *Phys. Fluids*, **11** (1968), 1257—1262.

[7] Davis, S. H., Finite amplitude instability of time-dependent flows, *J. Fluid Mech.*, 45 (1971), 33—48.
[8] Homsy, G. M., Global stability of time-dependent flows: impulsively heated or cooled fluid layers, *J. Fluid Mech.*, 60 (1973), 129—139.
[9] Jhaveri, B. S. and G. M. Homsy, The onset of convection in fluid layers heated rapidly in a time-dependent manner, *J. Fluid Mech.*, 114 (1982), 251—260.
[10] Yih, C. S., *Fluid Mechanics*, West River Press, Ann Arbor (1977), 440—446.

The Bénard Convection in a Layer of Fluid with a Time-Dependent Mean Temperature

Wu Feng

(Department of Modern Mechanics, University of Science and Technology of China, Hefei)

Abstract

The onset of Bénard convection, or the critical Rayleigh number in a layer of fluid with a time-dependent mean temperature has been investigated theoretically. The critical Rayleigh number is regarded as a function of time and is expanded in series of a small parameter. Up to second approximation a simple expression of critical Rayleigh number is obtained for the time region far away from the point of zero.