应用数学和力学，第8卷第10期(1987年10月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

一般空间7R机构位移分析的矩阵法*

陈 惟 荣

（上海第二工业大学，1986年6月28日收到）

摘 要

本文利用文[1]的方法，并以旋转矩阵作为主要数学工具，进行一般空间7R机构的位移分析，得出和文[2]相同的结果，而推导和计算显著简化。文中利用旋转矩阵的性质[3]，容易得出各坐标轴单位矢量的方向余弦的递推公式，求出这些单位矢量的标积和混合积，并且可以方便地导出第六个约束方程，推导颇为简捷。此外，文中根据所得16阶行列式的特点，采用先作行变换再按Laplace定理展开的方法进行计算，使计算工作量大为减轻。

一、前 言

如所周知，一般空间7R机构输出位移的32次代数方程的推导，是空间单环机构分析最困难的问题，Freudenstein称之为“运动学问题的珠穆朗玛峰”[4]。在文[2]中，基于球面和空间多边形的理论[5]导出了该方程，表为16阶行列式等于零的形式。该方程的推导和行列式的计算相当繁琐、复杂。本文利用文[1]的方法，并以旋转矩阵作为主要数学工具，进行一般空间7R机构的位移分析。设想拆离RRR杆组，列出其5个约束方程，即得该机构的位移方程组。为便于消去中间运动参数，得出最低次数的输入输出代数方程，还需补充一个与上述方程线性无关的约束方程，其中各项对每一变量而言是其正弦、余弦的线性函数。本文利用旋转矩阵的性质[3]，容易得出各坐标轴单位矢量的方向余弦的递推公式，求出这些单位矢量的标积和混合积，从而可以把上述约束方程写为简洁的形式，并且可以方便地导出第六个约束方程，推导远较[2]为简捷。从这六个方程用文[2]的方法消去中间运动参数，即得输出位移的32次代数方程，结果与文[2]一致。此外，文中根据所得16阶行列式的特点，采用先作行变换再按Laplace定理展开的方法进行计算，使计算工作量大为减轻。

图1所示为一般空间7R机构，结构参数为l_m，h_m，α_{mn}，转角为$\theta_m(m, n=1,2, \cdots,7)$；其中杆$\psi$为机架，$\theta_3$为输入角，$\theta_4$为输出角。所取坐标系$S_m(x_m, y_m, z_m)$和$S_{m*}(x_{m*}, y_{m*}, z_{m*})$也示于该图中。

本文采用文[3]中坐标轴旋转矩阵和矢量表示式的记号：

$$\mathbf{I}_\theta=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta\\ 0 & \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix},\quad \mathbf{K}_\theta=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

* 郭仲衡推荐。

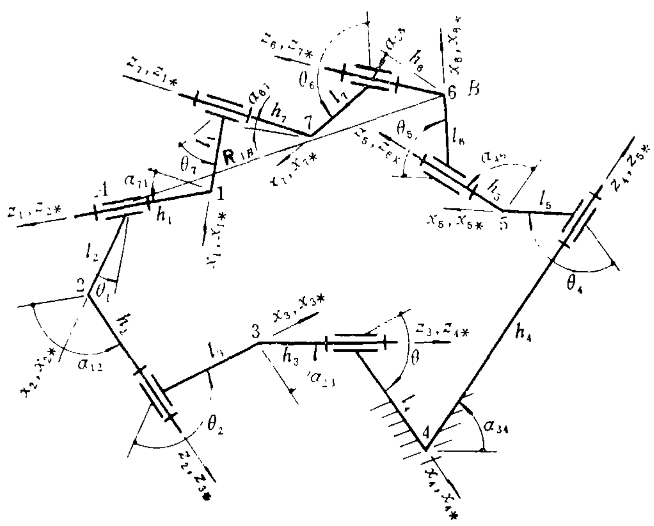

图 1

矢量V在坐标系S_m中的表示式或列阵$\mathbf{V}^{(m)}$为：

$$\mathbf{V}^{(m)}=V_{x_m}\mathbf{i}+V_{y_m}\mathbf{j}+V_{z_m}\mathbf{k},\quad \text{或}\ \mathbf{V}^{(m)}=(V_{x_m}\ V_{y_m}\ V_{z_m})^T$$

式中，V_{x_m}，V_{y_m}，V_{z_m}为矢量V沿相应坐标轴S_m的分量。

下面列出旋转矩阵的一些性质[3]：

$$1.\ \mathbf{I}_\theta^{-1}=\mathbf{I}_{-\theta},\quad \mathbf{K}_\theta^{-1}=\mathbf{K}_{-\theta} \tag{1.1}$$

$$2.\ (\mathbf{M}\mathbf{V}_1^{(m)})(\mathbf{M}\mathbf{V}_2^{(m)})=\mathbf{V}_1^{(m)}\mathbf{V}_2^{(m)} \tag{1.2}$$

$$3.\ (\mathbf{M}\mathbf{V}_1^{(m)})\times(\mathbf{M}\mathbf{V}_2^{(m)})=\mathbf{M}(\mathbf{V}_1^{(m)}\times\mathbf{V}_2^{(m)}) \tag{1.3}$$

式中，M为若干坐标轴旋转矩阵的乘积。

为书写简洁起见，约定矢量在S_1中的表示式省略上角标(1)，即$\mathbf{V}^{(1)}$简写为V；并记

$$\mathrm{s}_m=\sin\theta_m,\quad \mathrm{c}_m=\cos\theta_m;\quad \mathrm{s}_{mn}=\sin\alpha_{mn},\quad \mathrm{c}_{mn}=\cos\alpha_{mn};\quad \mathbf{x}_m=\mathrm{tg}(\theta_m/2)$$

$$\mathbf{M}_m=\mathbf{K}_{\theta_m}\mathbf{I}_{\alpha_{m(m+1)}}=\begin{pmatrix} \mathrm{c}_m & -\mathrm{s}_m\mathrm{c}_{m(m+1)} & \mathrm{s}_m\mathrm{s}_{m(m+1)} \\ \mathrm{s}_m & \mathrm{c}_m\mathrm{c}_{m(m+1)} & -\mathrm{c}_m\mathrm{s}_{m(m+1)} \\ 0 & \mathrm{s}_{m(m+1)} & \mathrm{c}_{m(m+1)} \end{pmatrix} \tag{1.4}$$

显然

$$\mathrm{s}_m=\frac{2\mathrm{x}_m}{1+\mathrm{x}_m^2},\quad \mathrm{c}_m=\frac{1-\mathrm{x}_m^2}{1+\mathrm{x}_m^2} \tag{1.5}$$

$$\mathrm{x}_m\mathrm{s}_m+\mathrm{c}_m=1,\quad \mathrm{x}_m\mathrm{c}_m-\mathrm{s}_m=-\mathrm{x}_m \tag{1.6}$$

二、各方向余弦的递推公式

设m，n为正整数，$1\leqslant m\leqslant n\leqslant 8$（杆1可看作杆8）．坐标系$S_{n+1}$中沿$x_{n+1}$，$y_{n+1}$，$z_{n+1}$轴的单位矢量$\mathbf{i}_{n+1}$，$\mathbf{j}_{n+1}$，$\mathbf{k}_{n+1}$在坐标系$S_m$中的表示式为：

$$\left.\begin{aligned}
\mathbf{i}_{n+1}^{(m)}&=\Big(\prod_{j=m}^{n}\mathbf{M}_j\Big)\mathbf{i}=U_{m\dots n}\mathbf{i}+V_{m\dots n}\mathbf{j}+W_{m+1\dots n}\mathbf{k}\\
\mathbf{j}_{n+1}^{(m)}&=\Big(\prod_{j=m}^{n}\mathbf{M}_j\Big)\mathbf{j}=E_{m\dots n}\mathbf{i}+F_{m\dots n}\mathbf{j}+G_{m+1\dots n}\mathbf{k}\\
\mathbf{k}_{n+1}^{(m)}&=\Big(\prod_{j=m}^{n}\mathbf{M}_j\Big)\mathbf{k}=X_{m\dots n}\mathbf{i}+Y_{m\dots n}\mathbf{j}+Z_{m+1\dots n}\mathbf{k}
\end{aligned}\right\}\tag{2.1}$$

式中，$(U_{m\dots n},\ V_{m\dots n},\ W_{m+1\dots n})$，$(E_{m\dots n},\ F_{m\dots n},\ G_{m+1\dots n})$，$(X_{m\dots n},\ Y_{m\dots n},\ Z_{m+1\dots n})$ 分别表示单位矢量$\mathbf{i}_{n+1}$，$\mathbf{j}_{n+1}$，$\mathbf{k}_{n+1}$在坐标系S_m中沿x_m，y_m，z_m轴的三个分量（即方向余弦）。下角标$m\cdots n$（由m，n之间所有整数顺序构成的序列）表示相应分量对每一变量θ_m，θ_{m+1}，$\cdots$，θ_n而言是其正弦、余弦的线性函数。特别地，当$n>m=1$时有

$$\mathbf{i}_n=\Big(\prod_{j=1}^{n-1}\mathbf{M}_j\Big)\mathbf{i},\quad \mathbf{j}_n=\Big(\prod_{j=1}^{n-1}\mathbf{M}_j\Big)\mathbf{j},\quad \mathbf{k}_n=\Big(\prod_{j=1}^{n-1}\mathbf{M}_j\Big)\mathbf{k}\tag{2.2}$$

容易看出，矩阵

$$\prod_{j=m}^{n}\mathbf{M}_j=\begin{pmatrix}U_{m\dots n} & E_{m\dots n} & X_{m\dots n}\\ V_{m\dots n} & F_{m\dots n} & Y_{m\dots n}\\ W_{m+1\dots n} & G_{m+1\dots n} & Z_{m+1\dots n}\end{pmatrix}\tag{2.3}$$

为由坐标系S_{n+1}至S_m的坐标变换矩阵。

若$m=n$，则由式(2.1)知：

$$\mathbf{i}_{m+1}^{(m)}=\mathbf{M}_m\mathbf{i}=U_m\mathbf{i}+V_m\mathbf{j}+W_{(m+1)m}\mathbf{k}$$

再由式(1.4)知：

$$\left.\begin{aligned}
&U_m=c_m,\ V_m=s_m,\ W_{(m+1)m}=0\\
\text{同理}\quad &E_m=-s_mc_{m(m+1)},\ F_m=c_mc_{m(m+1)},\ G_{(m+1)m}=s_{m(m+1)}\\
&X_m=s_ms_{m(m+1)},\ Y_m=-c_ms_{m(m+1)},\ Z_{(m+1)m}=c_{m(m+1)}
\end{aligned}\right\}\tag{2.4}$$

应当指出，下标$(m+1)m$（逆序）表示该分量是常数。

设$m<n$。记单位矢量$\mathbf{j}_{(m+1)*}$在坐标系S_{n+1}的三个方向余弦为$V^*_{m+1\dots n}$，$F^*_{m+1\dots n}$，$Y^*_{m+1\dots n}$。显然

$$\left.\begin{aligned}
V^*_{m+1\dots n}&=\mathbf{j}\Big[\mathbf{I}a_{m(m+1)}\Big(\prod_{j=m+1}^{n}\mathbf{M}_j\Big)\mathbf{i}\Big]\\
F^*_{m+1\dots n}&=\mathbf{j}\Big[\mathbf{I}a_{m(m+1)}\Big(\prod_{j=m+1}^{n}\mathbf{M}_j\Big)\mathbf{j}\Big]\\
Y^*_{m+1\dots n}&=\mathbf{j}\Big[\mathbf{I}a_{m(m+1)}\Big(\prod_{j=m+1}^{n}\mathbf{M}_j\Big)\mathbf{k}\Big]
\end{aligned}\right\}\tag{2.5}$$

因 $$\Big(\prod_{j=m}^{n}\mathbf{M}_j\Big)\mathbf{i}=\mathbf{K}_{\theta_m}\mathbf{I}a_{m(m+1)}\Big(\prod_{j=m+1}^{n}\mathbf{M}_j\Big)\mathbf{i}$$

将式(2.1)代入上式，并利用(2.5)，经变换后得以下左递推公式：

$$\left.\begin{aligned} &U_{m\ldots n}=c_m U_{m+1\ldots n}-s_m V^*_{m+1\ldots n}\\ &V^*_{m\ldots n}=c_{(m-1)m}V_{m\ldots n}-s_{(m-1)m}W_{m+1\ldots n}\\ &V_{m\ldots n}=s_m U_{m+1\ldots n}+c_m V^*_{m+1\ldots n}\\ &W_{m\ldots n}=s_{(m-1)m}V_{m\ldots n}+c_{(m-1)m}W_{m+1\ldots n} \end{aligned}\right\} \tag{2.6}$$

应当指出，上面第二式当$m=n$时仍成立。将式(2.6)按顺序

$$\overset{U}{X\leftarrow E},\quad \overset{V}{Y\leftarrow F},\quad \overset{W}{Z\leftarrow G}$$

作轮换，即得另两组左递推公式：

$$\left.\begin{aligned} &E_{m\ldots n}=c_m E_{m+1\ldots n}-s_m F^*_{m+1\ldots n}\\ &F^*_{m\ldots n}=c_{(m-1)m}F_{m\ldots n}-s_{(m-1)m}G_{m+1\ldots n}\\ &F_{m\ldots n}=s_m E_{m+1\ldots n}+c_m F^*_{m+1\cdots n}\\ &G_{m\ldots n}=s_{(m-1)m}F_{m\ldots n}+c_{(m-1)m}G_{m+1\ldots n} \end{aligned}\right\} \tag{2.7}$$

$$\left.\begin{aligned} &X_{m\ldots n}=c_m X_{m+1\ldots n}-s_m Y^*_{m+1\cdots n}\\ &Y^*_{m\cdots n}=c_{(m-1)m}Y_{m\ldots n}-s_{(m-1)m}Z_{m+1\ldots n}\\ &Y_{m\ldots n}=s_m X_{m+1\ldots n}+c_m Y^*_{m+1\cdots n}\\ &Z_{m\ldots n}=s_{(m-1)m}Y_{m\ldots n}+c_{(m-1)m}Z_{m+1\ldots n} \end{aligned}\right\} \tag{2.8}$$

由式(2.6)～(2.8)和(2.4)知：

$$\left.\begin{aligned} &V^*_m=c_{(m-1)m}s_m\\ &F^*_m=c_{(m-1)m}c_{m(m+1)}c_m-s_{(m-1)m}s_{m(m+1)}\\ &Y^*_m=-c_{(m-1)m}s_{m(m+1)}c_m-s_{(m-1)m}c_{m(m+1)} \end{aligned}\right\} \tag{2.9}$$

$$\left.\begin{aligned} &W_m=s_{(m-1)m}s_m\\ &G_m=s_{(m-1)m}c_{m(m+1)}c_m+c_{(m-1)m}s_{m(m+1)}\\ &Z_m=-s_{(m-1)m}s_{m(m+1)}c_m+c_{(m-1)m}c_{m(m+1)} \end{aligned}\right\} \tag{2.10}$$

又 $$\left(\prod_{j=m}^{n}\mathbf{M}_j\right)\mathbf{k}=\left(\prod_{j=m}^{n-1}\mathbf{M}_j\right)(\mathbf{M}_n\mathbf{k})$$

将式(2.3)代入上式，得以下右递推公式：

$$\left.\begin{aligned} &X_{m\ldots n}=s_{n(n+1)}(U_{m\ldots n-1}s_n-E_{m\ldots n-1}c_n)+c_{n(n+1)}X_{m\ldots n-1}\\ &Y_{m\ldots n}=s_{n(n+1)}(V_{m\ldots n-1}s_n-F_{m\ldots n-1}c_n)+c_{n(n+1)}Y_{m\ldots n-1}\\ &Z_{m\ldots n}=s_{n(n+1)}(W_{m\ldots n-1}s_n-G_{m\ldots n-1}c_n)+c_{n(n+1)}Z_{m\ldots n-1} \end{aligned}\right\} \tag{2.11}$$

同理，可得另两组右递推公式：

$$\left.\begin{aligned} &U_{m\ldots n}=U_{m\ldots n-1}c_n+E_{m\ldots n-1}s_n\\ &V_{m\ldots n}=V_{m\ldots n-1}c_n+F_{m\ldots n-1}s_n\\ &W_{m\ldots n}=W_{m\ldots n-1}c_n+G_{m\ldots n-1}s_n \end{aligned}\right\} \tag{2.12}$$

$$\left.\begin{aligned}E_{m\dots n}&=c_{n(n+1)}(-U_{m\dots n-1}s_n+E_{m\dots n-1}c_n)+s_{n(n+1)}X_{m\dots n-1}\\F_{m\dots n}&=c_{n(n+1)}(-V_{m\dots n-1}s_n+F_{m\dots n-1}c_n)+s_{n(n+1)}Y_{m\dots n-1}\\G_{m\dots n}&=c_{n(n+1)}(-W_{m\dots n-1}s_n+G_{m\dots n-1}c_n)+s_{n(n+1)}Z_{m\dots n-1}\end{aligned}\right\}\qquad(2.13)$$

利用左递推公式(2.7)～(2.9)，可以把下标序列左边的变量θ_m分离出来；而利用右递推公式(2.11)～(2.13)，可以把右边的变量θ_n分离出来。

三、各坐标轴单位矢量的标积和混合积

设$1\leqslant m<n\leqslant 8$．由旋转矩阵的性质(1.2)，容易求出两坐标轴单位矢量的标积：

$$\mathbf{i}_m\mathbf{i}_n=\left[\left(\prod_{j=1}^{m-1}\mathbf{M}_j\right)\mathbf{i}\right]\left[\left(\prod_{j=1}^{n-1}\mathbf{M}_j\right)\mathbf{i}\right]=\mathbf{i}\left[\left(\prod_{j=m}^{n-1}\mathbf{M}_j\right)\mathbf{i}\right]$$

故 $\mathbf{i}_m\mathbf{i}_n=U_{m\dots n-1}$

同理

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{i}_m\mathbf{i}_n&=U_{m\dots n-1}\\\mathbf{i}_m\mathbf{k}_n&=X_{m\dots n-1}\\\mathbf{k}_m\mathbf{i}_n&=W_{m+1\dots n-1}\\\mathbf{k}_m\mathbf{k}_n&=Z_{m+1\dots n-1}\end{aligned}\right\}\qquad(3.1)$$

特别地，当$n=m+1$时有

$$\left.\begin{aligned}&\mathbf{i}_m\mathbf{i}_{m+1}=U_m,\quad \mathbf{i}_m\mathbf{k}_{m+1}=X_m\\&\mathbf{k}_m\mathbf{i}_{m+1}=0,\quad \mathbf{k}_m\mathbf{k}_{m+1}=c_{m(m+1)}\end{aligned}\right\}\qquad(3.2)$$

设$l<m<n$．各坐标轴单位矢量的混合积为

$$(\mathbf{k}_m,\ \mathbf{k}_l,\ \mathbf{k}_n)=\left(\left(\prod_{j=1}^{m-1}\mathbf{M}_j\right)\mathbf{k},\ \left(\prod_{j=1}^{l-1}\mathbf{M}_j\right)\mathbf{k},\ \left(\prod_{j=1}^{n-1}\mathbf{M}_j\right)\mathbf{k}\right)$$

根据旋转矩阵的性质(1.2)、(1.3)，用 $\prod\limits_{j=m-1}^{1}\mathbf{M}_j^{-1}$左乘混合积中每一因子其值不变，于是得：

$$(\mathbf{k}_m,\ \mathbf{k}_l,\ \mathbf{k}_n)=\left(\mathbf{k},\ \left(\prod_{j=m-1}^{l}\mathbf{M}_j^{-1}\right)\mathbf{k},\ \left(\prod_{j=m}^{n-1}\mathbf{M}_j\right)\mathbf{k}\right)$$

而由旋转矩阵的正交性及式(2.3)知：

$$\prod_{j=m}^{l}\mathbf{M}_j^{-1}=\left(\prod_{i=l}^{m}\mathbf{M}_j\right)^{-1}=\begin{pmatrix}U_{l\dots m}&V_{l\dots m}&W_{l+1\dots m}\\E_{l\dots m}&F_{l\dots m}&G_{l+1\dots m}\\X_{l\dots m}&Y_{l\dots m}&Z_{l+1\dots m}\end{pmatrix}$$

故 $$(\mathbf{k}_m,\ \mathbf{k}_l,\ \mathbf{k}_n)=W_{l+1\dots m-1}Y_{m\dots n-1}-G_{l+1\dots m-1}X_{m\dots n-1}\qquad(3.3)$$

又 $$(\mathbf{i}_m,\ \mathbf{k}_l,\ \mathbf{k}_n)=\left(\mathbf{i},\left(\prod_{j=m-1}^{l}\mathbf{M}_j^{-1}\right)\mathbf{k},\ \left(\prod_{j=m}^{n-1}\mathbf{M}_j\right)\mathbf{k}\right)$$

$$=G_{l+1\dots m-1}Z_{m+1\dots n-1}-Z_{l+1\dots m-1}Y_{m\dots n-1}\qquad(3.4)$$

$$(\mathbf{i}_m,\mathbf{k}_m,\mathbf{k}_n)=-\mathbf{j}_m\mathbf{k}_n=-\mathbf{j}\left[\left(\prod_{j=m}^{n-1}\mathbf{M}_j\right)\mathbf{k}\right]=-Y_{m\dots n-1}\qquad(3.5)$$

$$(\mathbf{i}_n,\ \mathbf{k}_m,\ \mathbf{k}_n)=\mathbf{k}_m\mathbf{j}_n=\mathbf{k}\Big[\Big(\prod_{j=m}^{n-1}\mathbf{M}_j\Big)\mathbf{j}\Big]=G_{m+1\dots n-1} \tag{3.6}$$

设$1<m<n<6$。记

$$\left.\begin{aligned}&L_{2\cdots 5}^{(mn)}=(\mathbf{i}_m\times\mathbf{k}_1)(\mathbf{i}_n\times\mathbf{k}_6),M_{2\cdots 5}^{(mn)}=(\mathbf{i}_m\times\mathbf{k}_1)(\mathbf{k}_n\times\mathbf{k}_6)\\&N_{2\cdots 5}^{(mn)}=(\mathbf{k}_m\times\mathbf{k}_1)(\mathbf{i}_n\times\mathbf{k}_6),\ H_{2\cdots 5}^{(mn)}=(\mathbf{k}_m\times\mathbf{k}_1)(\mathbf{k}_n\times\mathbf{k}_6)\end{aligned}\right\} \tag{3.7}$$

则
$$\begin{aligned}L_{2\cdots 5}^{(mn)}&=\Big[\mathbf{i}\times\Big(\prod_{j=m-1}^{1}\mathbf{M}_j^{-1}\Big)\mathbf{k}\Big]\Big[\Big(\prod_{j=m}^{n-1}\mathbf{M}_j\Big)\Big(\mathbf{i}\times\Big(\prod_{j=n}^{5}\mathbf{M}_j\Big)\mathbf{k}\Big)\Big]\\&=Z_{2\dots m-1}(F_{m\dots n-1}Z_{n+1\dots 5}-Y_{m\dots n-1}Y_{n\dots 5})\\&\quad-G_{2\dots m-1}(G_{m+1\dots n-1}Z_{n+1\dots 5}-Z_{m+1\dots n-1}Y_{n\dots 5})\end{aligned} \tag{3.8}$$

同理
$$\begin{aligned}M_{2\cdots 5}^{(mn)}&=Z_{2\dots m-1}(V_{m\dots n-1}Y_{n\dots 5}-F_{m\dots n-1}X_{n\dots 5})\\&\quad-G_{2\dots m-1}(W_{m+1\dots n-1}Y_{n\dots 5}-G_{m+1\dots n-1}X_{n\dots 5})\end{aligned} \tag{3.9}$$

$$\begin{aligned}N_{2\cdots 5}^{(mn)}&=G_{2\dots m-1}(E_{m\dots n-1}Z_{n+1\dots 5}-X_{m\dots n-1}Y_{n\dots 5})\\&\quad-W_{2\dots m-1}(F_{m\dots n-1}Z_{n+1\dots 5}-Y_{m\dots n-1}Y_{n\dots 5})\end{aligned} \tag{3.10}$$

$$\begin{aligned}H_{2\cdots 5}^{(mn)}&=G_{2\dots m-1}(U_{m\dots n-1}Y_{n\dots 5}-E_{m\dots n-1}X_{n\dots 5})\\&\quad-W_{2\dots m-1}(V_{m\dots n-1}Y_{n\dots 5}-F_{m\dots n-1}X_{n\dots 5})\end{aligned} \tag{3.11}$$

式(3.3)～(3.11)中每一项各因子的下角标不重复出现，因此，它们对每一变量θ_j($j=2$, 3, 4, 5)而言是其正弦、余弦的线性函数。

四、一般7R机构的位移方程组

在图1所示7R机构中，设想拆离RRR杆组（杆1和7），列出其约束方程，即得机构的位移方程组[1]：

$$\mathbf{R}_{A_2B_6}\mathbf{k}_1=\mathbf{R}_{A_1B_7}\mathbf{k}_8 \tag{4.1}$$

$$\mathbf{R}_{A_2B_6}\mathbf{k}_6=\mathbf{R}_{A_1B_7}\mathbf{k}_6 \tag{4.2}$$

$$(\mathbf{R}_{A_2B_6},\ \mathbf{k}_1,\ \mathbf{k}_6)=(\mathbf{R}_{A_1B_7},\ \mathbf{k}_8,\ \mathbf{k}_6) \tag{4.3}$$

$$\mathbf{k}_1\mathbf{k}_6=\mathbf{k}_6\mathbf{k}_8 \tag{4.4}$$

$$(\mathbf{R}_{A_2B_6})^2=(\mathbf{R}_{A_1B_7})^2 \tag{4.5}$$

式中
$$\mathbf{R}_{A_2B_6}=\sum_{m=2}^{6}l_m\,\mathbf{i}_m+\sum_{m=2}^{6}h_m\mathbf{k}_m \tag{4.6}$$

$$\mathbf{R}_{A_1B_7}=-\sum_{m=7}^{8}l_m\,\mathbf{i}_m-\sum_{m=6}^{8}h_m\mathbf{k}_m \tag{4.7}$$

利用式(4.6)、(4.7)、(3.1)～(3.6)、(2.4)和(2.10)，可将式(4.1)～(4.5)化为：

$$Q_1=s_{71}(h_6s_{67}c_7-l_7s_7) \tag{4.1$'$}$$

$$Q_2=s_{67}(h_1s_{71}c_7-l_1s_7) \tag{4.2$'$}$$

$$Q_3=K_4c_7-h_7s_{67}s_{71}s_7 \tag{4.3$'$}$$

$$Z_{2\dots 6}=K_5-s_{67}s_{71}c_7 \tag{4.4$'$}$$

$$Q_4=K_7c_7+K_8s_7 \tag{4.5$'$}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}
Q_1&=\sum_{m=3}^{6}l_m W_{2\ldots m-1}+\sum_{m=3}^{5}h_m Z_{2\ldots m-1}+K_1\\
Q_2&=\sum_{m=2}^{5}l_m X_{m\ldots 5}+\sum_{m=2}^{4}h_m Z_{m+1\ldots 5}+K_2\\
Q_3&=\sum_{m=3}^{4}l_m(G_{2\ldots m-1}Z_{m+1\ldots 5}-Z_{2\ldots m-1}Y_{m\ldots 6})+\sum_{m=3}^{5}h_m(W_{2\ldots m-1}Y_{m\ldots 5}\\
&\quad-G_{2\ldots m-1}X_{m\ldots 5})+l_2(s_{12}Z_{345}-c_{12}Y_{2\ldots 5})\\
&\quad+l_5(c_{56}G_{234}-Z_{234}Y_5)+l_6G_{2\ldots 5}-h_2s_{12}X_{2\ldots 5}-K_3\\
Q_4&=\sum_{m=2}^{5}\sum_{n=m+1}^{6}l_ml_n U_{m\ldots n-1}+\sum_{m=2}^{4}\Big(\sum_{n=m+1}^{5}l_mh_nX_{m\ldots n-1}\\
&\quad+\sum_{n=m+2}^{6}h_ml_nW_{m+1\ldots n-1}\Big)+\sum_{m=2}^{3}\sum_{n=m+2}^{5}h_mh_nZ_{m+1\ldots n-1}+K_6
\end{aligned}\right\}\tag{4.8}$$

$$K_1=h_6c_{67}c_{71}+h_7c_{71}+h_1+h_2c_{12}$$
$$K_2=h_6c_{56}+h_6+h_7c_{67}+h_1c_{67}c_{71}$$
$$K_3=l_7s_{67}c_{71}+l_1c_{67}s_{71}$$
$$K_4=l_7c_{67}s_{71}+l_1s_{67}c_{71},\quad K_5=c_{67}c_{71}$$
$$K_6=\Big(\sum_{m=2}^{6}l_m^2+\sum_{m=2}^{5}h_m^2-\sum_{m=7}^{8}l_m^2-\sum_{m=6}^{8}h_m^2\Big)\Big/2$$
$$+\sum_{m=2}^{4}h_mh_{m+1}c_{m(m+1)}-\sum_{m=6}^{7}h_mh_{m+1}c_{m(m+1)}-h_6h_1c_{67}c_{71}$$
$$K_7=l_7l_1-h_6h_1s_{67}s_{71},\quad K_8=h_6l_1s_{67}+l_7h_1s_{71}$$

$K_i(i=1,\ 2,\ \cdots)$ 是常数；容易看出，Q_i 是s_j，c_j $(j=2,\ 3,\ 4,\ 5)$ 的线性函数。下面的推导表明，$Q_4Z_{2\ldots 5}-Q_1Q_2$ 也是 s_j，c_j 的线性函数。因此，可以简捷地导出另一与方程(4.1)′～(4.5)′线性无关的约束方程。

将式(4.4)′和(4.5)′的两边相乘，得：

$$\sum_{m=2}^{5}\sum_{n=m+1}^{6}l_ml_n(\mathbf{i}_m\mathbf{i}_n)(\mathbf{k}_1\mathbf{k}_6)+\sum_{m=2}^{4}\Big[\sum_{n=m+1}^{5}l_mh_n(\mathbf{i}_m\mathbf{k}_n)(\mathbf{k}_1\mathbf{k}_6)$$
$$+\sum_{n=m+2}^{6}h_ml_n(\mathbf{k}_m\mathbf{i}_n)(\mathbf{k}_1\mathbf{k}_6)\Big]+\sum_{m=2}^{3}\sum_{n=m+2}^{5}h_mh_n(\mathbf{k}_m\mathbf{k}_n)(\mathbf{k}_1\mathbf{k}_6)$$
$$+K_6Z_{2\ldots 5}=(K_7c_7+K_8s_7)(K_5-s_{67}s_{71}c_7)\tag{4.9}$$

再将式(4.1)′和(4.2)′的两边相乘，并把左边s_j，c_j 的线性函数分离出来，经整理后得：

$$\sum_{m=2}^{5}\sum_{n=m+1}^{6}l_ml_n(\mathbf{i}_m\mathbf{k}_6)(\mathbf{k}_1\mathbf{i}_n)+\sum_{m=2}^{4}\Big[\sum_{n=m+1}^{5}l_mh_n(\mathbf{i}_m\mathbf{k}_6)(\mathbf{k}_1\mathbf{k}_n)$$

$$+\sum_{n=m+2}^{6} h_m l_n(\mathbf{k}_m\mathbf{k}_6)(\mathbf{k}_1\mathbf{i}_n)\Big]+\sum_{m=2}^{3}\sum_{n=m+2}^{5} h_m h_n(\mathbf{k}_m\mathbf{k}_6)(\mathbf{k}_1\mathbf{k}_n)+Q_5$$

$$=s_{67}s_{71}(h_6 s_{67}c_7-l_7 s_7)(h_1 s_{71}c_7-l_1 s_7) \tag{4.10}$$

式中 $$Q_5=\sum_{m=3}^{5}\Big[\sum_{n=m}^{5} l_n(l_m W_{2\ldots m-1}X_{n\ldots 5}+h_m Z_{2\ldots m-1}X_{n\ldots 5})$$

$$+\sum_{n=m-1}^{4} h_n(l_m W_{2\ldots m-1}Z_{n+1\ldots 5}+h_m Z_{2\ldots m-1}Z_{n+1\ldots 5})\Big]$$

$$+K_1Q_2+K_2(Q_1-K_1) \tag{4.11}$$

然后将式(4.9)和(4.10)的两边相减，并利用拉格朗日恒等式

$$(\mathbf{i}_m\mathbf{i}_n)(\mathbf{k}_1\mathbf{k}_6)-(\mathbf{i}_m\mathbf{k}_6)(\mathbf{k}_1\mathbf{i}_n)=(\mathbf{i}_m\times\mathbf{k}_1)(\mathbf{i}_n\times\mathbf{k}_6)$$

……

和式(3.7)，经变换后得：

$$Q_6=K_6(K_7c_7+K_8s_7) \tag{4.12}$$

式中 $$Q_6=\sum_{m=2}^{5}\sum_{n=m+1}^{6} l_m l_n L_{2\cdots 5}^{(mn)}+\sum_{m=2}^{4}\Big[\sum_{n=m+1}^{6} l_m h_n M_{2\cdots 5}^{(mn)}+\sum_{n=m+2}^{6} h_m l_n N_{2\cdots 5}^{(mn)}\Big]$$

$$+\sum_{m=2}^{3}\sum_{n=m+2}^{5} h_m h_n H_{2\cdots 5}^{(mn)}+K_6Z_{2\ldots 5}-Q_5+l_7l_1s_{67}s_{71} \tag{4.13}$$

式(4.12)就是所寻求的第六个约束方程。

五、一般7R机构的输入输出方程

用文[2]的方法从方程组(4.1)′～(4.5)′、(4.12)消去变量θ_7，θ_2和θ_5，即得输入输出方程。先从(4.4)′和(4.1)′中解出c_7和s_7，得：

$$c_7=(K_5-Z_{2\ldots 5})/(s_{67}s_{71}),\quad s_7=[h_6(K_5-Z_{2\ldots 5})-Q_1]/(l_7s_{71}) \tag{5.1}$$

再将以上两式代入式(4.2)′、(4.3)′、(4.5)′和(4.12)，经整理后得：

$$Q_2=K_{10}(K_5-Z_{2\ldots 5})+K_9Q_1 \tag{5.2}$$

$$Q_3=K_{12}(K_5-Z_{2\ldots 5})+K_{11}Q_1 \tag{5.3}$$

$$Q_4=K_{14}(K_5-Z_{2\ldots 5})-K_{13}Q_1 \tag{5.4}$$

$$Q_6=K_6[K_{14}(K_5-Z_{2\ldots 5})-K_{13}Q_1] \tag{5.5}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}&K_9=l_1s_{67}/(l_7s_{71}),\quad K_{10}=h_1-K_9h_6\\&K_{11}=h_7s_{67}/l_7,\qquad K_{13}=h_1+K_9h_6\\&K_{12}=l_7c_{67}/s_{67}+l_1c_{71}/s_{71}-h_6K_{11}\\&K_{14}=l_7l_1/(s_{67}s_{71})+K_9h_6^2\end{aligned}\right\} \tag{5.6}$$

为从方程组(5.2)～(5.5)中消去变量θ_2，θ_5，可利用前述递推公式将θ_2，θ_5分离出来，再按式(1.5)，用x_2，x_5代替θ_2，θ_5，即得以下代数方程组：

$$(a_ix_5^2+b_ix_5+c_i)x_2^2+(d_ix_5^2+e_ix_5+f_i)x_2+(g_ix_5^2+h_ix_5+j_i)=0 \tag{5.7}$$

式中，$i=1, 2, 3, 4$；系数$(a_i, b_i, \cdots, j_i)$是x_3，x_4的二次函数。

将上面四个方程分别乘以x_2，x_5和x_2x_5，连同(5.7)共有16个方程，从中消去含x_2和x_5的15个未知量，($x_5^3x_2^3$，…，x_5，x_2)，即得x_4的32次代数方程[2]：

$$\Delta_{16}=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & j_i & 0 & 0 & g_i & h_i & 0 & 0 & c_i & f_i & a_i & b_i & d_i & e_i \\ 0 & 0 & g_i & 0 & 0 & 0 & h_i & j_i & a_i & d_i & 0 & 0 & b_i & c_i & e_i & f_i \\ 0 & c_i & 0 & 0 & a_i & b_i & 0 & 0 & 0 & 0 & f_i & j_i & d_i & e_i & g_i & h_i \\ a_i & 0 & 0 & 0 & b_i & c_i & 0 & 0 & d_i & g_i & 0 & 0 & e_i & f_i & h_i & j_i \end{vmatrix}=0,$$

$$(i=1,\ 2,\ 3,\ 4) \tag{5.8}$$

16阶行列式Δ_{16}中，第1～12列有一半或更多元素为零。为减轻计算工作量，可根据这一特点采用以下方法计算Δ_{16}。先对该行列式作行变换，使第1～4列中除a_4，c_4，g_4，j_4外其余元素均为零；然后应用Laplace定理[6]将它按1～4列展开，得：

$$\Delta_{16}=a_4c_4g_4j_4\Delta_{12} \tag{5.9}$$

式中

$$\Delta_{12}=\begin{vmatrix} 0 & 0 & A_{k1} & A_{k2} & 0 & 0 & A_{k3} & A_{k4} & A_{k5} & A_{k6} & A_{k7} & A_{k8} \\ 0 & 0 & A_{l1} & A_{l2} & A_{l3} & A_{l4} & 0 & 0 & A_{l5} & A_{l6} & A_{l7} & A_{l8} \\ A_{m1} & A_{m2} & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{m3} & A_{m4} & A_{m5} & A_{m6} & A_{m7} & A_{m8} \\ A_{n1} & A_{n2} & 0 & 0 & A_{n3} & A_{n4} & 0 & 0 & A_{n5} & A_{n6} & A_{n7} & A_{n8} \end{vmatrix}$$

$$(k=1,\ 2,\ 3;\ l=4,\ 5,\ 6;\ m=7,\ 8,\ 9;\ n=10,\ 11,\ 12)$$

再作以下行变换，使Δ_{12}的1～4列中除1、2、7、8行的元素外其余元素均为零。为使第i行(i=3～6)第3、4列的元素为零，可用E_i乘第1行、F_i乘第2行，然后和第i(i=3，4，5，6)行相加；其中

$$E_i=-(A_{i1}A_{22}-A_{21}A_{i2})/D,\ D=A_{11}A_{22}-A_{12}A_{21},\ F_i=-(A_{11}A_{i2}-A_{i1}A_{12})/D \tag{5.10}$$

同理，为使第j行(j=9，10，11，12)第1、2列的元素为零，可用E_j乘第7行，F_j乘第8行，然后和第j行相加；其中E_j，F_j可在式(5.10)中将行号1、2、i分别改为7、8、j得出。

然后再应用Laplace定理按1～4列展开，得Δ_{12}

$$\Delta_{12}=\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} A_{71} & A_{72} \\ A_{81} & A_{82} \end{vmatrix}|B_{kl}| \tag{5.11}$$

式中，k，l=1～8；$|B_{kl}|$为8阶行列式，其中第1、2列可由Δ_{12}的第5、6列划去第1、2、7、8行得出。

行列式$|B_{kl}|$也可用上述方法经行变换后再展开，于是问题归结为一个四阶行列式的计算。用本文的方法计算Δ_{16}，较之文[2]的方法工作量大为减轻。

对于给定的输入角θ_3($-\pi\leqslant\theta_3\leqslant\pi$)，由方程(5.8)可解出相应的输出角$\theta_4$。对于每一$\theta_3$及相应的$\theta_4$值，可以求出各系数($a_i$，$b_i$，…，$j_i$)之值。于是，$x_5$和$x_2$之值可用文[2]的方法求出。$x_7$可由式(5.1)求出。用$x_7$乘其中第二式，然后和第一式相加，再利用式(1.6)，即得：

$$x_7=\frac{l_7[s_{71}-(K_5-Z_{2\ldots5})/s_{67}]}{h_6(K_5-Z_{2\ldots5})-Q_1}. \tag{5.12}$$

下面求x_6记x_1。记$\mathbf{E}$为单位矩阵，则

$$\prod_{j=1}^{7}\mathbf{M}_j=\mathbf{E}$$

故 $$\mathbf{M}_6\mathbf{M}_7\mathbf{k}=\left(\prod_{j=5}^{1}\mathbf{M}_j^{-1}\right)\mathbf{k}$$

即 $$X_{67}\mathbf{i}+Y_{67}\mathbf{j}+Z_7\mathbf{k}=W_{2\ldots5}\mathbf{i}+G_{2\ldots5}\mathbf{j}+Z_{2\ldots5}\mathbf{k}$$

令上式两边i，j的系数相等，并利用递推公式(2.8)，得：

$$X_7c_6-Y_7^*s_6=W_{2\ldots5} \tag{5.13}$$

$$X_7s_6+Y_7^*c_6=G_{2\ldots5} \tag{5.14}$$

用x_6乘式(5.14)，然后和(5.13)相加，并利用式(1.6)，即得：

$$x_6=(X_7-W_{2\ldots6})/(Y_7^*+G_{2\ldots6}) \tag{5.15}$$

同理，由 $$\left(\prod_{j=1}^{5}\mathbf{M}_j\right)\mathbf{k}=\left(\prod_{j=7}^{6}\mathbf{M}_j^{-1}\right)\mathbf{k}$$

可得 $$x_1=(X_{2\ldots6}-W_7)/(Y_{2\ldots6}^*+G_7) \tag{5.16}$$

参 考 文 献

[1] 陈惟荣，应用图论的优化方法进行空间机构的位移分析和自由度计算，机械设计，2 (1986).

[2] Duffy, J. and C. Crane, A displacement analysis of the general spatial 7-link, 7R mechanism, *Mechanism and Machine Theory*, 15,3-A (1980),153—169.

[3] 陈惟荣，空间啮合解析理论，煤炭学报，11,2 (1979),49—64.

[4] Freudenstein, F., Kinematics: past, present and future, *Mechanism and Machine Theory*, 8,2 (1973),151—161.

[5] Duffy, J., *Analysis of Mechanisms and Robot Manipulators*, Edward Arnold, London (1980), 56—120.

[6] 北京大学代数小组，《高等代数》，人民教育出版社，北京 (1978),87—91.

A Matrix Method of Displacement Analysis of the General Spatial 7R Mechanism

Chen Wei-rong

(*Shanghai Second Polytechnical University, Shanghai*)

Abstract

An input-ouptut equation of the general spatial 7R mechanism is derived in this paper by using the method in [1] and applying the rotation matrices. The result is the same as [2], but the process of derivation is simpler. Applying the character of rotation matrices, it is not difficult to obtain the recurrence formulas of direction cosines of Cartesian unit vectors, to calculate the scalar products and triple products of these unit vectors, and to derive the 6th constraint equation. Moreover, an algorithm, which consists of successive applications of row transformation and expansion based on Laplace's Theorem, is given to evaluate the 16×16 determinant according to its characteristic, so that the evaluation is much simplified.