曲面上的Steiner问题*

蒋星耀

（上海工业大学，1986年2月26日收到）

摘　要

本文将平面上的Steiner问题的一些结果推广到一般的正则曲面上，主要结果是

定理1　设A，B，C是正则曲面Σ上的三个点，若Σ上另一点P使Σ上的光滑弧长之和$\widehat{AP}+\widehat{BP}+\widehat{CP}$达到极小，则此三弧中每两弧在$P$之交角皆为120°.

古典的Steiner问题几乎是众所周知的[1][2]．问题说：在平面上给定了三个点，求作一点使得它到三定点距离之和为最小．这一问题多年来虽有种种讨论和推广[3][4][5]，但尚未见到将它推广到曲面上的情况．也就是说，在一正则曲面上给定了三个或三个以上的点，求作曲面上的一个点使得它到给定诸点距离之和为最小．这一最优化问题的意义是不言而喻的，因为在实际问题中难得遇到真正的平面．

本文将Steiner问题的几个结论推广到一般的正则曲面上．我们的结果是下列三个定理：

定理1　设A，B，C是正则曲面Σ上的三个点．若Σ上另一点P使Σ上的光滑弧长之和$\widehat{AP}+\widehat{BP}+\widehat{CP}$达到极小，则此三弧中每两弧在$P$之交角皆为120°．

定理2　设A，B，C是正则曲面Σ上的三个点．l，m，n是三个正数，若Σ上另一点P使加权和$l\cdot\widehat{AP}+m\cdot\widehat{BP}+n\cdot\widehat{CP}$达到极小，则有

$$\frac{\sin\angle BPC}{l}=\frac{\sin\angle APC}{m}=\frac{\sin\angle APB}{n}$$

这里$\widehat{AP}$，$\widehat{BP}$，$\widehat{CP}$是Σ上的光滑弧，而$\angle BPC$，$\angle APC$，$\angle APB$分别是这三弧在P处两两所成之角．

定理3　对正则曲面Σ上的n个点A_1，A_2，…，A_n（$n\geqslant3$），若Σ上另一点P使P到各点光滑弧长之和$\sum\limits_{i=1}^{n}\widehat{A_iP}$取到极小，则$P$处诸弧的半切线上的单位向量（方向均指向$P$）之和为0．

下面将证明定理1，同时指出，对证明作适当的修改，即可得另外两个定理．

适当选择坐标系，使P点的坐标为(0，0，0)，使Σ在P点的切平面为$z=0$，于是Σ在

* 钱伟长推荐．

P 点邻域可以用方程 $z=f(x, y)$ 表示，而 f 有连续的偏导数。因为Σ的在 P 处的切平面为 $z=0$，故

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_P=\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_P=0 \tag{1}$$

再设弧$\widehat{AP}$，$\widehat{BP}$，$\widehat{CP}$的参数方程分别为

$$r_A:\begin{cases}x=\varphi_A(t)\\ y=\psi_A(t)\\ z=\chi_A(t)\end{cases}\quad r_B:\begin{cases}x=\varphi_B(t)\\ y=\psi_B(t)\\ z=\chi_B(t)\end{cases}\quad r_C:\begin{cases}x=\varphi_C(t)\\ y=\psi_C(t)\\ z=\chi_C(t)\end{cases} \tag{2}$$
$$(0\leqslant t\leqslant s_A)\qquad(0\leqslant t\leqslant s_B)\qquad(0\leqslant t\leqslant s_C)$$

这里我们取参数t为从P开始计算的弧长。于是：

$$(\varphi_A'(t))^2+(\psi_A'(t))^2+(\chi_A'(t))^2=1 \tag{3}$$

又因为$\widehat{AP}$在曲面Σ上，故

$$\chi_A(t)=f(\varphi_A(t),\ \psi_A(t))$$

从而

$$\chi_A'(0)=\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_P\cdot\varphi_A'(0)+\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_P\cdot\psi_A'(0)=0$$

同理

$$\chi_B'(0)=\chi_C'(0)=0$$

再结合（3）可得

$$\varphi_A'^2(0)+\psi_A'^2(0)=1,\ \varphi_B'^2(0)+\psi_B'^2(0)=1,\ \varphi_C'^2(0)+\psi_C'^2(0)=1 \tag{4}$$

过P作三弧之半切线，使方向与曲线的正向一致，分别记三直线为l_A，l_B，l_C，直线上的点的坐标为

$$l_A:\begin{cases}x=\varphi_A'(0)\cdot t\\ y=\psi_A'(0)\cdot t\\ z=0\end{cases}\quad l_B:\begin{cases}x=\varphi_B'(0)\cdot t\\ y=\psi_B'(0)\cdot t\\ z=0\end{cases}\quad l_C:\begin{cases}x=\varphi_C'(0)\cdot t\\ y=\psi_C'(0)\cdot t\\ z=0\end{cases} \tag{5}$$

由（4）可知，参数t恰为自P至t所对应的点的线段之长。

用A_t，B_t，C_t分别记三条半切线上相应于t的点，用F_t记$\triangle A_tB_tC_t$的Fermat点。设F_t到A_t，B_t，C_t的距离分别为m_A^t，m_B^t，m_C^t，P到A_t，B_t，C_t的距离分别为p_A，p_B，p_C，则有：

引理1　若对某个$t_0>0$，$F_{t_0}\neq P$，则对一切$t>0$亦有$F_t\neq P$，且有与t无关的正数α，使得

$$(p_A+p_B+p_C)-(m_A^t+m_B^t+m_C^t)=\alpha t$$

证明　因为相似三角形的Fermat点是相似点，故由

$$\triangle A_tB_tC_t\backsim\triangle A_sB_sC_s$$

可得

$$\triangle A_tB_tF_t\backsim\triangle A_sB_sF_s$$

又

$$\triangle A_tB_tP\backsim\triangle A_sB_sP$$

故得

$$\frac{m_A^t}{m_A^s}=\frac{m_B^t}{m_B^s}=\frac{A_tB_t}{A_sB_s}=\frac{t}{s}$$

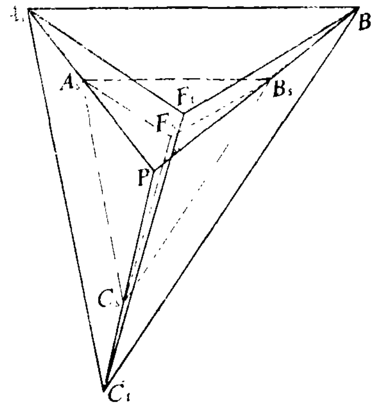

图 1

同理

$$\frac{m_C^t}{m_C^s}=\frac{t}{s}$$

故有：

$$\frac{m_A^t}{t}=\frac{m_A^s}{s}=e,\quad \frac{m_B^t}{t}=\frac{m_B^s}{s}=f,\quad \frac{m_C^t}{t}=\frac{m_C^s}{s}=g$$

这里e，f，g是与t无关的常数，又因$p_A=p_B=p_C=t$，故得

$$(p_A+p_B+p_C)-(m_A^t+m_B^t+m_C^t)=3t-(e+f+g)t$$
$$=(3-(e+f+g))t=\alpha t$$

其中$\alpha=3-(e+f+g)$与t无关。由Fermat点之性质，当$P\neq F_t$时$\alpha t>0$，即$\alpha>0$。引理 1 证毕。

引理2 设F_t^*是曲面Σ上的点，F_t^*在$z=0$平面上的正投影是F_t，即F_t^*：$(x_{F_t},\ y_{F_t},\ f(x_{F_t},\ y_{F_t}))$，则有

$$\lim_{t\to 0}\frac{F_tF_t^*}{t}=0$$

证明 过PF_t与z轴作平面π，设π与Σ的交线为Γ，则PF_t是Γ在P的半切线。不妨设PF_t为正x轴，则Γ的方程为

$$\Gamma:\ \begin{cases}z=f(x,\ y)\\ y=0\end{cases}$$

则$F_tF_t^*=f(PF_t,\ 0)$。又因F_t在以P为中心以t为半径的圆内，故

$$0\leqslant\frac{F_tF_t^*}{t}\leqslant\frac{f(PF_t,0)}{PF_t}$$

$$0\leqslant\lim_{t\to 0}\frac{F_tF_t^*}{t}\leqslant\lim_{PF_t\to 0}\frac{f(PF_t,0)}{PF_t}=\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_P=0$$

引理2证毕。

引理3 设A_t^*，B_t^*，C_t^*表示$\overset{\frown}{AP}$，$\overset{\frown}{BP}$，$\overset{\frown}{CP}$上对应于t的点，则有

$$\lim_{t\to 0}\frac{A_tA_t^*}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{B_tB_t^*}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{C_tC_t^*}{t}=0$$

证明 $$\lim_{t\to 0}\frac{\varphi_A(t)-\varphi_A'(0)t}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\varphi_A(t)}{t}-\varphi_A'(0)=\varphi_A'(0)-\varphi_A'(0)=0$$

同理

$$\lim_{t\to 0}\frac{\psi_A(t)-\psi_A'(0)t}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\chi_A(t)-\chi_A'(0)t}{t}=0$$

再由

$$A_tA_t^*=\sqrt{(\varphi_A(t)-\varphi_A'(0)t)^2+(\psi_A(t)-\psi_A'(0)t)^2+(\chi_A(t)-\chi_A'(0)t)^2}$$

即得

$$\lim_{t\to 0}\frac{A_tA_t^*}{t}$$
$$=\lim_{t\to 0}\sqrt{\left(\frac{\varphi_A(t)-\varphi_A'(0)t}{t}\right)^2+\left(\frac{\psi_A(t)-\psi_A'(0)t}{t}\right)^2+\left(\frac{\chi_A(t)-\chi_A'(0)t}{t}\right)^2}$$
$$=0$$

同理可知
$$\lim_{t\to 0}\frac{B_tB_t^*}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{C_tC_t^*}{t}=0$$
引理 3 证毕。

现在来证明定理 1 本身。用反证法。

设 $\widehat{AP}$，$\widehat{BP}$，$\widehat{CP}$ 在 P 点所成的角不全为120°，则 P 不是 $\triangle A_tB_tC_t$ 的Fermat点。由引理1得
$$(p_A+p_B+p_C)-(m_A^t+m_B^t+m_C^t)=\alpha t \tag{6}$$
其中 $\alpha>0$。

设 F_t^* 与 A_t^*，B_t^*，C_t^* 之曲面距离分别为 M_A^t，M_B^t，M_C^t。它们之间的直线距离分别为 $\bar M_A^t$，$\bar M_B^t$，$\bar M_C^t$。过 $F_tF_t^*A_t^*$ 作平面 π_A，沿 π_A 与 Σ 的交线从 F_t^* 到 A_t^* 这一段弧长记为 $\tilde M_A^t$，则有
$$\bar M_A^t\leqslant M_A^t\leqslant\tilde M_A^t \tag{7}$$
但由弦与弧的关系，对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta_1>0$，使得当 $|t|\leqslant\delta_1$ 时有
$$|\tilde M_A^t-\bar M_A^t|<2t\varepsilon \tag{8}$$
由（7）更有
$$|M_A^t-\bar M_A^t|<2t\varepsilon$$
由引理3，
$$\lim_{t\to 0}\frac{A_tA_t^*}{t}=0$$
故对 $\varepsilon>0$，有 $\delta_2>0$ 使当 $|t|\leqslant\delta_2$ 时有
$$|A_tA_t^*|<t\varepsilon \tag{9}$$
再由引理2，
$$\lim_{t\to 0}\frac{F_tF_t^*}{t}=0$$
故对 $\varepsilon>0$，有 $\delta_3>0$ 使当 $|t|\leqslant\delta_3$ 时有
$$|F_tF_t^*|<t\varepsilon \tag{10}$$

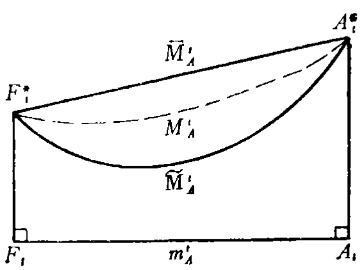

图　2

现在取 $\delta=\min\{\delta_1,\ \delta_2,\ \delta_3\}$，则当 $|t|\leqslant\delta$ 时由(9)，(10)有（见图2）
$$|\bar M_A^t-m_A^t|<2t\varepsilon \tag{11}$$
再由(8)，(11)得
$$|M_A^t-m_A^t|<4t\varepsilon$$
同理
$$|M_B^t-m_B^t|<4t\varepsilon,\quad |M_C^t-m_C^t|<4t\varepsilon$$
如果取 $\varepsilon=\alpha/24$，则对 $0<t\leqslant\delta$ 有
$$(p_A+p_B+p_C)-(M_A^t+M_B^t+M_C^t)\geqslant\alpha t-12t\varepsilon=\frac{1}{2}\alpha t>0$$
故 P 不是极小值点，证毕。

显然，引理 1 可以推广成

引理1′　若 F_t^w 是 $\triangle A_tB_tC_t$ 的带权的Steiner问题的解，即当 $Q=F_t^w$ 时
$$l\cdot A_tQ+m\cdot B_tQ+n\cdot C_tQ$$
取到最小值，若以 m_{Aw}^t，m_{Bw}^t，m_{Cw}^t 记 F_t^w 分别到 A_t，B_t，C_t 的距离，则有
$$(l\cdot p_A+m\cdot p_B+n\cdot p_C)-(l\cdot m_{Aw}^t+m\cdot m_{Bw}^t+n\cdot m_{Cw}^t)=\alpha' t$$
这里 α' 是与 t 无关的常数，当 $F_t^w\neq P$ 时有 $\alpha'>0$。这里 $p_A=p_B=p_C=t$ 为 P 到 A_t，B_t，C_t 的距

离。

引理1″ 在点P所在平面上自P引射线PA_1，PA_2，…，PA_n，分别在各射线上取点A_i^t使$PA_i^t=t>0$。设F_t是平面上关于点组$\{A_i^t$，$i=1$，2，…，$n\}$的铜心问题的解，即当$Q=F_t$时

$$A_1^tQ+A_2^tQ+\cdots+A_n^tQ$$

取到最小值。以m_i^t记F_t到A_i^t的距离，则

$$\sum_{i=1}^{n}PA_i^t-\sum_{i=1}^{n}m_i^t=\alpha''t$$

其中α''是与t无关的常数，当$F_t\neq P$时，$\alpha''>0$。

分别用引理1′和引理1″代替引理1，并将其他有关部份适当修改，即可得到定理2和定理3。兹不赘述。

最后，我们指出本文结果的一些应用前景，应用之一是求最短网络的问题[6]。既然我们已将平面上的Steiner问题推广到一般正则曲面上，所以不难将平面上关于 Steiner 最短树的某些讨论和结果推广到曲面上。众所周知在实际应用问题中难得遇到真正的平面，所以曲面上的最短网络的讨论和结果具有更大的实际应用价值。限于篇幅在本文中只能作初步探讨。

所谓一个“图形”是指某个曲面上点的集合和一些连接两个点的弧段（该曲面上的）的集合。如果任两点间都能由一些弧段连通，则此图形称为“连通图形”。如果任两点间连通的路线只有一条。则此图形称为“树”。现在讨论网络时，除考虑点和弧组成的图形外，我们还要考虑它们的几何，即点的位置和弧的长度。一个点集的网络必须是一连通图形。我们现在的目的是要将所给的网络通过增加一些新的点和连线，测量出这些连线的长度，扩大成一个新的网络。要求在此新网络上找出一个子网络，它是连通的。它包含原图中所有顶点，而且它的所有弧段长度的总和又是具有这种性质的子网络中的最短者。这种子网络被称为该曲面上的一棵Steiner最短树。“最短”这一要求迫使该图形必为一棵树。

在 Steiner 最短树中包含两种不同的点。有一些位置固定的点是我们设计任何网络时必须包含的点，称为“原点”；另一些点的出现只是为了缩短网络，称为 Steiner 点。给定一个图形后容易证明最短树必须满足下列两条件：

甲．任一Steiner点必为由夹角为120°的三弧的交点。

乙．有n个原点的图形最多含（$n-2$）个Steiner点。

曲面上最短树的造法的关键是找一个可以确定任何三个给定点的 Steiner 点的位置的构造性方法。可是至今尚无这种方法（即使是近似方法）。因此这种方法的研究将有很大的理论和应用价值。在特殊曲面上，或特殊曲面上的特殊点集的 Steiner 最小树的研究，以及曲面上的次优树的研究同样是十分有价值和有趣的课题。

参 考 文 献

[1] Courant, R. and H. Robbins, *What Is Mathematics?* Chapter 7, §5, Oxford University Press, New York (1964).

[2] 克莱因, M.,《古今数学思想》, 第三卷, 科技出版社 (1981), 246—250.

[3] Melzak, Z. A., On the problem of Steiner, *Canad. Math. Bull.*, 4 (1961), 143—148.

[4] Pollak, H. O., Some remarks on the Steiner problem, *J. Combinational Thy.*, A, 24 (1978), 278—295.

[5] 王凯宁, 凸n边形内Fermat点问题的初等证明, 中国科学技术大学学报, 11, 4 (1981), 139—141.

[6] 黄光明, 最短网络, 运筹学杂志, 2, 2 (1983), 18—25.

The Steiner Problem on a Surface

Jiang Xin-yao

(*Shanghai University of Technology, Shanghai*)

Abstract

In this paper we generalize the Steiner problem on planes to general regular surfaces. The main result is:

Theorem 1. If A, B, C are three points on a regular surface Σ and if another point P on Σ such that the sum of the lengths of the smoothed arcs $\widehat{AP}+\widehat{BP}+\widehat{CP}$ reaches the minimum, then the angles formed by every two arcs at P are all 120°.