应用数学和力学，第 8 卷第10期(1987年10月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

# Oden 本构关系变分原理的注记*

邢 京 堂

（北京航空学院，1985年11月25日收到）

**摘 要**

文中评述了 Oden[1]所给本构关系变分原理，说明了其欠妥性。按照 Oden 的思想，给出了另外两种互余的本构关系的变分原理。通过简例，说明了本构关系变分原理的应用。

## 一、引 言

弹性力学中本构关系的变分原理可在文献 [1][2] 中见到。笔者在未公开发表的论文[3][4]中说明了Oden所给本构关系变分原理的欠妥性。本注记就此问题给出仔细地讨论。

对Oden 本构关系变分原理的讨论

应用张量分析的记号，采用 Lagrange 坐标，线弹性静力问题基本方程如下：

平衡方程

$$\sigma^{ij}{}_{,i}+\hat{f}^{j}=0 \qquad \text{在}\Omega\text{内} \tag{1.1}$$

应变位移关系

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}) \qquad \text{在}\Omega\text{内} \tag{1.2}$$

本构关系

$$\sigma^{ij}=E^{ijkl}\varepsilon_{kl} \qquad \text{在}\Omega\text{内} \tag{1.3}$$

或

$$\varepsilon_{ij}=C_{ijkl}\sigma^{kl} \qquad \text{在}\Omega\text{内} \tag{1.4}$$

边界条件

$$u_i=\hat{u}_i \qquad \text{在}\partial\Omega_1\text{上} \tag{1.5}$$

$$n_i\sigma^{ij}=\hat{T}^{j} \qquad \text{在}\partial\Omega_2\text{上} \tag{1.6}$$

其中$\hat{f}^j$是体力分量，$\hat{u}_i$是在边界$\partial\Omega_1$上预先给定的位移，$\hat{T}^j$是在边界$\partial\Omega_2$上预先给定的面力；$\Omega$表示弹性体的体域，$\Omega$的表面$\partial\Omega=\partial\Omega_1\cup\partial\Omega_2$，$\partial\Omega_1\cap\partial\Omega_2=\phi$；$n_i$表示表面$\partial\Omega$的外法矢量；$\sigma^{ij}$和$\varepsilon_{ij}$分别是应力张量和应变张量，且$\sigma^{ij}=\sigma^{ji}$，$\varepsilon_{ij}=\varepsilon_{ji}$，$u_i$是位移矢量；$E^{ijkl}$与$C_{ijkl}$分别是弹性常数张量及其逆张量。

Oden 所给本构变分原理从文献[1]引述如下（这里，方程顺序号为本文所加）：

“V.一个本构关系的变分原理

约束：

* 薛大为推荐。

$$\begin{cases}\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i})=\varepsilon_{ij} & \text{在}\Omega\text{内}；\ u_i=\hat{u}_i \quad \text{在}\partial\Omega_1\text{上} \quad (1.7a)\\ -\sigma^{ij}{}_{,i}=f^j & \text{在}\Omega\text{内}；\ n_i\sigma^{ij}=\hat{T}^j \quad \text{在}\partial\Omega_2\text{上} \quad (1.7b)\end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned}&K(\varepsilon)=\int\left(\frac{1}{2}\varepsilon_{ij}E^{ijkl}\varepsilon_{kl}-\varepsilon_{ij}\hat{\sigma}^{ij}\right)dx\\ &\hat{\sigma}^{ij}\in\{\sigma^{ij}:-\sigma^{ij}{}_{,i}=f^j\ \text{在}\Omega\text{内}；\ n_i\sigma^{ij}=\hat{T}^j\ \text{在}\partial\Omega_2\text{上}\}\end{aligned}\right\} \quad (1.8)$$

欧拉方程：

$$E^{ijkl}\varepsilon_{kl}=\sigma^{ij} \qquad \text{在}\Omega\text{内} \qquad (1.9)^*$$

这里对泛函(1.8)评论如下：假定预先选定$\hat{\sigma}_1^{ij}$和$\hat{\sigma}_2^{ij}$满足(1.7b)式，即

$$\hat{\sigma}_1^{ij}\in\{\sigma^{ij}:-\sigma^{ij}{}_{,i}=f^j \quad \text{在}\Omega\text{中}；\ n_i\sigma^{ij}=\hat{T}^j \quad \text{在}\partial\Omega_2\text{上}\}$$

$$\hat{\sigma}_2^{ij}\in\{\sigma^{ij}:-\sigma^{ij}{}_{,i}=f^j \quad \text{在}\Omega\text{中}；\ n_i\sigma^{ij}=\hat{T}^j \quad \text{在}\partial\Omega_2\text{上}\}$$

但$\hat{\sigma}_1^{ij}\neq\hat{\sigma}_2^{ij}$．设$\varepsilon_{ij}$是满足(1.7a)协调的所有允许的应变．于是由泛函(1.8)，有

$$K_1(\varepsilon)=\int_\Omega\left(\frac{1}{2}\varepsilon_{ij}E^{ijkl}\varepsilon_{kl}-\varepsilon_{ij}\hat{\sigma}_1^{ij}\right)dx$$

$$K_2(\varepsilon)=\int_\Omega\left(\frac{1}{2}\varepsilon_{ij}E^{ijkl}\varepsilon_{kl}-\varepsilon_{ij}\hat{\sigma}_2^{ij}\right)dx$$

因此，由(1.9)式得

$$\hat{\sigma}_1^{ij}=E^{ijkl}\varepsilon_{kl}^1,\quad \hat{\sigma}_2^{ij}=E^{ijkl}\varepsilon_{kl}^2$$

这表明：由泛函(1.8)的欧拉方程(1.9)可得出$\hat{\sigma}_1^{ij}$及相应的应变$\varepsilon_{kl}^1$之间的关系与$\hat{\sigma}_2^{ij}$及相应的应变$\varepsilon_{kl}^2$之间的关系．$\varepsilon_{kl}^1$与$\varepsilon_{kl}^2$分别是满足约束(1.7a)的允许应变场$\varepsilon_{ij}$中成员．从而$\hat{\sigma}_1^{ij}$，$\varepsilon_{kl}^1$及相应的位移$u_i^1$与$\hat{\sigma}_2^{ij}$，$\varepsilon_{kl}^2$及相应的位移$u_i^2$分别为线弹性静力问题的解，基于唯一性定理，应有$\hat{\sigma}_1^{ij}=\hat{\sigma}_2^{ij}$，这与假设矛盾．因而泛函(1.8)与唯一性定理矛盾．

事实上，对应于事先选定的满足(1.7b)式的某一应力$\hat{\sigma}^{ij}$，由泛函(1.8)不一定得出满足(1.7a)约束的应变$\varepsilon_{ij}$．一般来讲，只能得出一相应于$\hat{\sigma}^{ij}$的某一非协调应变．下面由一例子来说明．考虑图1示均匀杆轴向拉伸．$\hat{f}$为均匀分布的单位长度的载荷，$S$为杆截面积，$l$为杆长，$E$为弹性模量．杆左端固定，右端由于装配误差引起给定位移值$\hat{f}^*l^2/2ES$，这里$\hat{f}^*$给定．求$\hat{f}$同杆中点位移$u_A$之关系．

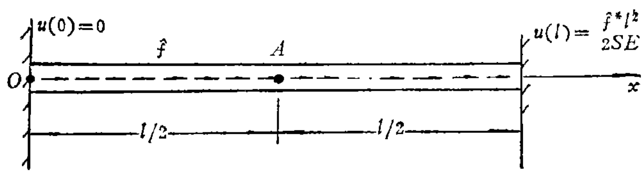


图 1

对这一问题，基本方程为：

平衡方程 $\quad S\dfrac{d\sigma}{dx}+\hat{f}=0 \qquad x\in(0,l) \qquad$ (A.1)

几何关系 $\quad \varepsilon=\dfrac{du}{dx} \qquad x\in(0,l) \qquad$ (A.2)

本构关系 $\quad \sigma=E\varepsilon \qquad x\in(0,l) \qquad$ (A.3)

边界条件 $\quad u(0)=0 \qquad$ (A.4)

$$u(l)=\frac{\hat{f}^*l^2}{2ES} \tag{A.5}$$

易求出，问题的解析解为

$$u(x)=-\frac{\hat{f}}{2ES}(x^2-mlx) \tag{A.6}$$

其中 $m=\hat{f}^*/\hat{f}+1$

杆中点$A$位移$u_A$同$\hat{f}$关系是

$$u_A=\frac{\hat{f}l^2}{8ES}(2m-1) \tag{A.7}$$

下边用泛函(1.8)求解．满足(A.1)的允许应力场为

$$\sigma=-\frac{\hat{f}x}{S}+A$$

按(1.8)要求，取

$$\hat{\sigma}=-\frac{\hat{f}x}{S}+\frac{\hat{A}}{S} \tag{A.8}$$

其中$\hat{A}/S\in A$，$\hat{A}$是事先指定的与$\hat{\sigma}$相应的某常数．由(1.8)式的欧拉方程(1.9)得

$$\hat{\sigma}=E\varepsilon \tag{A.9}$$

于是有

$$\varepsilon=\frac{1}{ES}(-\hat{f}x+\hat{A}) \tag{A.10}$$

由(A.2)式

$$\frac{du}{dx}=\frac{1}{ES}(-\hat{f}x+\hat{A})$$

$$\therefore \qquad u=\frac{1}{ES}\left(-\frac{1}{2}\hat{f}x^2+\hat{A}x+B\right) \tag{A.11}$$

由(A.4)得 $B=0$

由(A.5)得

$$\hat{f}^*=-\hat{f}+\frac{2\hat{A}}{l} \tag{A.12}$$

这表明：对于事先指定的某一$\hat{\sigma}$相应的常数$\hat{A}$，由(1.8)式的欧拉方程(1.9)求得的应变$\varepsilon$按几何关系(A.2)解得的位移$u$，一般不能保证位移边界条件(A.5)（即(A.12)式）也满足．也就是对应于满足(1.7b)式的某一预先给定的$\hat{\sigma}^{ij}$，由(1.8)式的欧拉方程(1.9)得出的$\varepsilon_{ij}$及相应的$u_i$不一定满足(1.7a)约束．

基于上述讨论，笔者认为：Oden所给本构关系的泛函(1.7)、(1.8)、(1.9)似乎欠妥．如果在泛函(1.8)的约束条件中取掉(1.7a)式，即认为(1.8)式中$\varepsilon_{ij}$无任何约束，这样对某一允许的应力$\hat{\sigma}^{ij}$，由(1.8)可得一相应的应变$\varepsilon_{ij}$(不一定协调）由此虽不会引起矛盾，但(1.8)式的用处似乎有待研究．

下面我们给出另外两种互余的本构关系的变分原理．

## 二、两个本构变分原理

首先引入下列定义：

(1) 广义可能应力场和可能应力场

广义可能应力场$\sigma^{ij}$定义为满足平衡方程(1.1)和力边界条件(1.6)，且其变分$\delta\sigma^{ij}$满足方程

$$\begin{cases}\delta\sigma^{ij}{}_{,i}+\delta\hat{f}^{j}=0 & \text{在}\Omega\text{内}\\ n_i\delta\sigma^{ij}=\delta\hat{T}^{j} & \text{在}\partial\Omega_2\text{上}\end{cases} \tag{2.1a}$$

的所有可能应力场．这里$\delta\hat{f}^{j}$及$\delta\hat{T}^{j}$分别是体力$\hat{f}^{j}$和面力$\hat{T}^{j}$的变分．如果进一步限制$\delta\hat{f}^{j}$及$\delta\hat{T}^{j}$恒为零，则相应的广义可能应力场称其为可能应力场．显然可能应力场包含于广义可能应力场之中．

(2) 广义可能位移应变场与可能位移应变场

广义可能位移应变场$u_i$和$\varepsilon_{ij}$定义为满足位移应变关系(1.2)及位移边界条件(1.5)，且其变分$\delta u_i$，$\delta\varepsilon_{ij}$满足方程

$$\begin{cases}\delta\varepsilon_{ij}=\dfrac{1}{2}(\delta u_{i,j}+\delta u_{j,i}) & \text{在}\Omega\text{中}\\ \delta u_i=0 & \text{在}\partial\Omega_1\text{上}\end{cases} \tag{2.1b}$$

但$\delta u_i$不要求三次可微，从而$\delta\varepsilon_{ij}$不要求满足应变协调方程的所有位移场及相应的应变场．如果进一步要求$\delta u_i$三次可微，$\delta\varepsilon_{ij}$满足应变协调方程，则相应的广义可能位移应变场称其为可能位移应变场．同样可能位移应变场包含于广义可能位移应变场之中．

(3) 力位及其余位

假定所有作用于弹性体上的力是位力．取弹性体未变形自然状态作为参考状态．体力$f^{j}$及面力$T^{j}$的位与余位分别定义如下：

体力位：

$$G(u_i)=\int_0^{u_i}-f^{i}du_i \tag{2.1c}$$

体力余位：

$$G^*(f^{j})=-\int_0^{f^{j}}u_j df^{j} \tag{2.1d}$$

面力位：

$$g(u_i)=\int_0^{u_i}-T^{i}du_i \tag{2.1e}$$

面力余位：

$$g^*(T^{j})=-\int_0^{T^{j}}u_j dT^{j} \tag{2.1f}$$

显然，在力位与其余位之间有下列关系，

$$G(u_i)+G^*(f^{i})=-f^{i}u_i \tag{2.2a}$$

$$g(u_i)+g^*(T^{i})=-T^{i}u_i \tag{2.2b}$$

两个本构变分原理分述如下：

1． 导出本构关系(1.4)的本构变分原理

泛函：

$$H[\dot{\sigma}^{ij},\varepsilon_{ij}(u_k)]=\int_\Omega\Big[\sigma^{ij}\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}C_{ijrs}\sigma^{ij}\sigma^{rs}-\hat{f}^{i}u_i-G^*(\hat{f}^{i})\Big]d\Omega-\int_{\partial\Omega_2}(\hat{T}^{i}u_i+g^*(\hat{T}^{i}))ds \tag{2.3}$$

这里$\overset{*}{\sigma}^{ij}$表示泛函(2.3)中有关应力$\sigma^{ij}$，$\hat{f}^i$，$\hat{T}^i$是广义可能应力场，而$\varepsilon_{ij}(u_k)$是可能位移应变场。

**证明** 对泛函(2.3)取一阶变分，并应用约束(2.1b)，易得：

$$\delta H=\int_\Omega\Big[(\varepsilon_{ij}-C_{ijrs}\sigma^{rs})\delta\sigma^{ij}+\sigma^{ij}\delta u_{j,i}$$
$$-\Big(u_j+\frac{\partial G^*}{\partial\hat{f}^j}\Big)\delta\hat{f}^j-\hat{f}^j\delta u_j\Big]d\Omega$$
$$-\int_{\partial\Omega_2}\Big[\Big(u_j+\frac{\partial g^*}{\partial\hat{T}^j}\Big)\delta\hat{T}^j+\hat{T}^j\delta u_j\Big]ds \tag{2.4}$$

由方程(2.1d)和(2.1f)有

$$\left.\begin{aligned}&u_j+\frac{\partial G^*}{\partial\hat{f}^j}=0 &&\text{在}\Omega\text{中}\\ \text{和}\quad &u_j+\frac{\partial g^*}{\partial\hat{T}^j}=0 &&\text{在}\partial\Omega_2\text{上}\end{aligned}\right\} \tag{2.5}$$

应用Green定理

$$\int_\Omega\sigma^{ij}\delta u_{j,i}d\Omega=-\int_\Omega\sigma^{ij}{}_{,i}\delta u_jd\Omega+\int_{\partial\Omega_1+\partial\Omega_2}n_i\sigma^{ij}\delta u_jds \tag{2.6}$$

由于对$\sigma^{ij}$的约束(1.6)及对$\delta u_j$的约束(2.1b)($\delta u_j=0$，在$\partial\Omega_1$上；$n_i\sigma^{ij}=\hat{T}^j$，在$\partial\Omega_2$上)，关系(2.6)可改写为

$$\int_\Omega\sigma^{ij}\delta u_{j,i}d\Omega=-\int_\Omega\sigma^{ij}{}_{,i}\delta u_jd\Omega+\int_{\partial\Omega_2}\hat{T}^j\delta u_jds \tag{2.7}$$

将(2.5)、(2.7)代入(2.4)，并考虑约束(1.1)，(2.4)式可写为

$$\delta H=\int_\Omega(\varepsilon_{ij}-C_{ijrs}\sigma^{rs})\delta\sigma^{ij}d\Omega \tag{2.8}$$

由于变分$\delta\sigma^{ij}$，$\delta\hat{f}^j$，$\delta\hat{T}^j$在$\Omega$内应满足(2.1a)式，$\delta\sigma^{ij}$可保证独立性，因而由$\delta H=0$即可得本构关系(1.4)。

顺便指出，在文[5]中我们由广义可能应力场出发，保证了$\delta\sigma^{ij}$在$\Omega$内的独立性，使位移应变关系(1.2)显含于余能原理的驻值条件中。

2. 导出本构关系(1.3)的本构变分原理

泛函：

$$\Pi[\sigma^{ij},\ \overset{*}{\varepsilon}_{ij}(u_k)]=\int_\Omega\Big[\sigma^{ij}\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}E^{ijrs}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{rs}\Big]d\Omega-\int_{\partial\Omega_1}\hat{u}_i\sigma^{ij}n_jds \tag{2.9}$$

这里$\sigma^{ij}$是可能应力场，而$\overset{*}{\varepsilon}_{ij}(u_k)$是广义可能位移应变场的应变。

**证明** 对泛函(2.9)取一阶变分，并考虑对$\varepsilon_{ij}$的约束(1.2)，有

$$\delta\Pi=\int_\Omega[(\sigma^{ij}-E^{ijrs}\varepsilon_{rs})\delta\varepsilon_{ij}+u_{j,i}\delta\sigma^{ij}]d\Omega-\int_{\partial\Omega_1}\hat{u}_i\delta\sigma^{ij}n_jds \tag{2.10}$$

应用Green定理

$$\int_\Omega u_{j,i}\delta\sigma^{ij}d\Omega=-\int_\Omega u_j\delta\sigma^{ij}{}_{,i}d\Omega+\int_{\partial\Omega_1+\partial\Omega_2}u_jn_i\delta\sigma^{ij}ds \tag{2.11}$$

由于约束(1.5)可得在$\partial\Omega_1$上$u_j=\hat{u}_j$；由于$\delta\sigma^{ij}$是可能应力场变分，于是：在$\Omega$内$\delta\sigma^{ij}{}_{,i}=0$，在$\partial\Omega_2$上$n_i\delta\sigma^{ij}=0$。所以关系(2.11)可变为

$$\int_\Omega u_{j,i}\delta\sigma^{ij}d\Omega=\int_{\partial\Omega_1}\hat{u}_j n_i\delta\sigma^{ij}ds \tag{2.12}$$

代(2.12)入(2.10)得

$$\delta\Pi=\int_\Omega(\sigma^{ij}-E^{ijrs}\varepsilon_{rs})\delta\varepsilon_{ij}d\Omega \tag{2.13}$$

由于广义可能位移场定义，$\delta u_i$不要求三阶可微，由约束关系(2.1b)消不掉$\delta u_i$得出$\delta\varepsilon_{ij}$要满足的应变协调方程，$\delta\varepsilon_{ij}$在$\Omega$内独立可保证。于是由$\delta\Pi=0$可得本构关系(1.3)。

这里我们强调指出：在泛函(2.3)证明中，用到$\delta\sigma^{ij}$在$\Omega$内独立性，所以我们取广义可能应力场$\mathring{\sigma}^{ij}$来比较，而$\delta\varepsilon_{ij}$在$\Omega$内是否独立无关紧要。但是，在泛函(2.9)的证明中，我们要用到$\delta\varepsilon_{ij}$在$\Omega$内的独立性，因而取广义可能应变场$\mathring{\varepsilon}_{ij}(u_k)$比较，而$\delta\sigma^{ij}$在$\Omega$内是否独立无关紧要。若在这两个泛函中，全取广义可能应力场$\mathring{\sigma}^{ij}$与广义可能位移应变场$\mathring{\varepsilon}_{ij}(u_k)$，此时泛函(2.3)形式不变，但泛函(2.9)有所不同。易证明，相应二泛函可写为：

$$H[\mathring{\sigma}^{ij},\ \mathring{\varepsilon}_{ij}]=\int_\Omega\Big[\sigma^{ij}\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}C_{ijrs}\sigma^{ij}\sigma^{rs}-\hat{f}^iu_i-G^*(\hat{f}^i)\Big]d\Omega-\int_{\partial\Omega_2}(\hat{T}^iu_i+g^*(\hat{T}^i))ds \tag{2.14a}$$

$$\Pi[\mathring{\sigma}^{ij},\ \mathring{\varepsilon}_{ij}]=\int_\Omega\Big[\sigma^{ij}\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}E^{ijrs}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{rs}-\hat{f}^ju_j-G(u_j)\Big]d\Omega-\int_{\partial\Omega_1}\hat{u}_i\sigma^{ij}n_jds-\int_{\partial\Omega_2}(\hat{T}^ju_j+g(u_j))ds \tag{2.14b}$$

并且有

$$H[\mathring{\sigma}^{ij},\mathring{\varepsilon}_{ij}]+\Pi[\mathring{\sigma}^{ij},\ \mathring{\varepsilon}_{ij}]=0 \tag{2.15a}$$

应注意的是：若在泛函(2.3)与(2.14a)中采用可能应力场，或在泛函(2.9)与(2.14b)中采用可能位移应变场，对一般问题来讲，由于$\delta\sigma^{ij}$或$\delta\varepsilon_{ij}$在$\Omega$内独立性无法保证，形如(1.3)、(1.4)的本构关系可能由(2.3)、(2.9)导不出。此时，相当缩小了比较函数的范围，由(2.3)、(2.9)或(2.14)可导出某种积分形式的近似本构关系。类似于(2.15a)式，对于这种情形，有关系式

$$H[\sigma^{ij},\varepsilon_{ij}]+\Pi[\sigma^{ij},\varepsilon_{ij}]=0 \tag{2.15b}$$

下面看一个应用简例。

## 三、应 用 简 例

**例B** 应用泛函(2.14)求图1轴力杆中点$A$位移$u_A$同力$\hat{f}$之关系。

**解** 满足方程(A.1)的广义可能应力场为

$$\mathring{\sigma}=-\frac{\hat{f}x}{S}+A \tag{B.1}$$

其变分

$$\delta\mathring{\sigma}=-\frac{x}{S}\delta\hat{f}+\delta A \tag{B.2}$$

这里$A$为常数．

满足方程(A.2)、(A.4)、(A.5)的可能位移场取

$$u=\frac{\hat{f}^*}{2SE}(2x^2-lx)-\frac{4u_A}{l^2}(x^2-lx) \tag{B.3}$$

$$\varepsilon=\frac{\hat{f}^*}{2SE}(4x-l)-\frac{4u_A}{l^2}(2x-l) \tag{B.4}$$

这里$u_A$表示$A$点（图1）位移．$u$和$\varepsilon$的变分为：

$$\delta u=-\frac{4\delta u_A}{l^2}(x^2-lx) \tag{B.5}$$

$$\delta\varepsilon=-\frac{4\delta u_A}{l^2}(2x-l) \tag{B.6}$$

可能位移场包含于广义可能位移场之中，这里我们就用它代入泛函(2.14)来求近似解．对此问题，泛函(2.14)为

$$H[\mathring{\sigma},\varepsilon]=\int_0^l\left[\mathring{\sigma}\varepsilon-\frac{1}{2E}\mathring{\sigma}\mathring{\sigma}-\frac{\hat{f}u}{S}-G^*\left(\frac{\hat{f}}{S}\right)\right]Sdx \tag{B.7}$$

$$\Pi[\mathring{\sigma},\varepsilon]=\int_0^l\left[\mathring{\sigma}\varepsilon-\frac{1}{2}E\varepsilon^2-\frac{\hat{f}u}{S}-G(u)\right]Sdx-\hat{u}(l)\mathring{\sigma}(l)S \tag{B.8}$$

应用关系(2.1)在这里形式

$$\frac{\partial G^*}{\partial\hat{f}}=-\frac{u}{S},\quad\frac{\partial G}{\partial u}=-\frac{\hat{f}}{S}$$

易得

$$\delta H=\int_0^l\left[\mathring{\sigma}\delta\varepsilon+\varepsilon\delta\mathring{\sigma}-\frac{\mathring{\sigma}}{E}\delta\mathring{\sigma}-\frac{\hat{f}}{S}\delta u\right]Sdx \tag{B.9}$$

$$\delta\Pi=\int_0^l\left[\mathring{\sigma}\delta\varepsilon+\varepsilon\delta\mathring{\sigma}-E\varepsilon\delta\varepsilon-\frac{u}{S}\delta\hat{f}\right]Sdx-\hat{u}(l)\delta\mathring{\sigma}(l)S \tag{B.10}$$

将(B.1)～(B.6)代入(B.9)、(B.10)中，积分得

$$\delta H=\left(-\frac{5\hat{f}^*l^3}{12ES}+\frac{2u_Al}{3}-\frac{\hat{f}l^3}{3ES}+\frac{Al^2}{2E}\right)\delta\hat{f}$$
$$+\left[\frac{l^2}{2E}(\hat{f}^*+\hat{f})-\frac{ASl}{E}\right]\delta A+0\cdot\delta u_A \tag{B.11}$$

$$\delta\Pi=0\cdot\delta\hat{f}+0\cdot\delta A+\left(\frac{2}{3}\hat{f}l+\frac{4}{3}\hat{f}^*l-\frac{16u_AES}{3l}\right)\delta u_A \tag{B.12}$$

于是由$\delta H=0$，得

$$A=\frac{l}{2S}(\hat{f}^*+\hat{f}) \tag{B.13}$$

$$-\frac{5\hat{f}^*l^3}{12ES}+\frac{2u_Al}{3}-\frac{\hat{f}l^3}{3ES}+\frac{Al^2}{2E}=0 \tag{B.14}$$

将(B.13)代入(B.14)，得

$$u_A=\frac{\hat{f}l^2}{8ES}(2m-1) \tag{B.15}$$

这里$m$如(A.6)式。

同理，由$\delta\Pi=0$，可得(B.15)式，此即精确解(A.7)式。

由上计算中，易看出：若在泛函(B.7)中不用广义可能应力场$\tilde{\sigma}$，而用可能应力场($\delta\hat{f}\equiv 0$)，则由(B.7)将得不出关系(B.15)式；但对这一问题，由于位移应变关系只有(A.2)一式，取可能位移场并不影响$\delta\varepsilon$在$(0,l)$内独立性，所以由泛函(B.8)仍可得出精确的(B.15)关系式。

上述简例的思想不难推广用于复杂的问题。有关更多的应用有待进一步研究。

## 参 考 文 献


[1] Oden, J. T., *The Classical Variational Principles of Mechanics*, in *Energy Methods in Finite Element Analysis*, Ed. by R. Glowinski et al., John Wiley and Sons (1979).

[2] Oden, J. T. and J. N. Reddy, *Variational Methods in Theoretical Mechanics*, 2nd Ed., Spring-Verlag, Berlin Springer (1983).

[3] 邢京堂、郑兆昌，弹性动力学的某些一般定理及广义与广义分区变分原理，中国力学学会计算结构动力学学术讨论会论文，重庆，1982年12月（清华大学工程力学系，1982年9月）.

[4] 邢京堂，流固耦合振动分析的有限元与子结构一子区域方法的理论及数值计算研究——弹性动力学与微极线弹性动力学的变分原理及其在振动分析中的应用，清华大学博士论文（1984）.

[5] 邢京堂，线弹性静力学余能原理的一个注记(1985,6).（待发表）


# A Note about Oden's Constitutive Variational Principle


Xing Jing-tang

*(Beijing Institute of Aeronautics and Astronautics, Beijing)*



### Abstract

A remark about some unreasoning things of Oden's constitutive variational principle described in Ref. [1] is given in this paper. According to Oden's idea, the two other constitutive variational principles, which are complementary to one another, are developed. An example is performed to demonstrate the application of the constitutive variational principles.