应用数学和力学，第 8 卷第10期(1987年10月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

计及表面张力的非传播孤波理论*

颜家壬　　黄国翔

(湘潭大学，1986年 6 月 3 日收到)

摘　　要

本文研究了表面张力对非传播孤波运动的影响，对 Larraza 和 Putterman 的理论进行了修正。发现表面张力使孤波横向振动频率范围增大，振幅增高，宽度减小。当表面张力系数$\alpha=0$时，结果与 Larraza 和 Putterman 的理论相一致。

一、引　　言

近年来，人们对流体的弱非线性表面波问题进行了广泛的研究[1],[2]。前不久，Wu Junru，Keolian 和Rudnick在实验室首次发现了非传播孤立波[3]。随后，Larraza和 Putterman 提出了非传播表面孤波的波导理论[4],[5]。他们考虑三维无粘不可压流体的无旋运动，忽略流体的表面张力，利用多重尺度微扰技术得到了流体运动所满足的非线性 Schrödinger 方程及非传播孤波解。本文考虑了流体的表面张力，对文献[5]的结果进行了修正。发现由于流体的表面张力效应，孤波横向振动频率范围增大；振幅增高；宽度变窄。当表面张力系数 $\alpha=0$ 时，与文献[5]的结果相一致。

二、基　本　方　程

在一宽度为 b 的矩形波导内注入深度为 d 的液体。令宽度方向为 y 方向，深度方向为 z 方向，取流体静止时的液体表面为 $z=0$ 平面。则静止时，$-d\leqslant z\leqslant 0$。当受到扰动时，设流体自由表面偏离平衡位置($z=0$)的位移为 $z=\zeta(x,y,t)$，则计及表面张力时，三维无粘不可压流体无旋运动的速度势满足如下的方程与边界条件

$$\nabla^2\phi=0,\qquad -d\leqslant z\leqslant\zeta(x,y,t) \tag{2.1}$$

$$\phi_z=0,\qquad z=-d \tag{2.2}$$

$$\phi_y=0,\qquad y=0,\ b \tag{2.3}$$

$$\left\{\begin{aligned}&\zeta_t+\phi_x\zeta_x+\phi_y\zeta_y=\phi_z\\&g\zeta+\phi_t+\frac{1}{2}(\nabla\phi)^2\end{aligned}\right. \tag{2.4}$$

$$=\sigma\frac{\zeta_{xx}(1+\zeta_y^2)+\zeta_{yy}(1+\zeta_x^2)-2\zeta_{xy}\zeta_x\zeta_y}{(1+\zeta_x^2+\zeta_y^2)^{\frac{3}{2}}},\qquad z=\zeta(x,y,t) \tag{2.5}$$

---

* 云天铨推荐。
国家自然科学基金资助课题。

其中 $\sigma=\alpha/\rho$，ρ 为流体密度，α 为表面张力系数。右下标代表对该变量求偏导数。

按文献[5]，我们研究在 y 方向以高频 ω 振动，在 x 方向由 $\zeta_1(x,t)$ 所调制的弱非线性表面波运动，引进小参数 ϵ

$$k\zeta_{\max}=\epsilon\ll 1 \tag{2.6}$$

我们寻求满足

$$\frac{1}{k\zeta_1}\frac{\partial\zeta_1}{\partial x}=O(\epsilon),\qquad \frac{1}{\omega\zeta_1}\frac{\partial\zeta_1}{\partial t}=O(\epsilon^2) \tag{2.7a,b}$$

$$\frac{d\log\zeta/dx}{d\log\zeta/dy}=O(\epsilon),\qquad \frac{\omega_2^2}{\omega^2}-1=O(\epsilon^2) \tag{2.7c,d}$$

的解，其中

$$\omega_2^2=(gk+\sigma k^3)T \tag{2.8}$$

$$k=\frac{\pi}{b},\qquad T=\tanh kd \tag{2.9}$$

满足 Laplace 方程(2.1)及边界条件(2.2)，(2.3)的多重尺度解为[5]

$$\begin{aligned}\phi(x,y,z,t)=&\frac{\cosh k(z+d)}{\cosh kd}\cos ky[\phi_1\exp[i\omega t]+c.c]+[\phi_0^{(2)}\exp[2i\omega t]+c.c]\\&+\frac{\cosh 2k(z+d)}{\cosh 2kd}\cos 2ky[(\phi_2\exp[2i\omega t]+c.c)+\phi_2^{(0)}]\\&-\frac{1}{2k}\frac{z\sinh k(z+d)-d\exp[-k(z+d)]}{\cosh kd}\cos ky[\phi_{1xx}\exp[i\omega t]+c.c]\\&+\phi_0(x+i(z+d),t)+\phi_0(x-i(z+d),t)+O(\epsilon^4)\end{aligned} \tag{2.10}$$

以及

$$\begin{aligned}\zeta(x,y,t)=&\cos ky[\zeta_1\exp[i\omega t]+c.c]+\zeta_0(x,t)\\&+\cos 2ky[(\zeta_2\exp[2i\omega t]+c.c)+\zeta_2^{(0)}]+O(\epsilon^3)\end{aligned} \tag{2.11}$$

其中 $c.c$ 代表相应的复共轭项。利用(2.10)，(2.11)即可对问题(2.4)，(2.5)作直到三级的微扰展开。

三、各级近似解

将(2.10)，(2.11)两式代入自由表面的边界条件(2.4)，(2.5)式，比较 $\cos mky\exp[ni\omega t]$ 的系数，即可得到各级近似解

1．一级近似

略去 $O(\epsilon^2)$项，得到一级近似方程

$$i\omega_2\zeta_1=kT\phi_1 \tag{3.1}$$

$$g\zeta_1+i\omega_2\phi_1=-k^2\sigma\zeta_1 \tag{3.2}$$

或

$$\phi_1=\frac{i\omega_2}{kT}\zeta_1 \tag{3.3}$$

$$\omega_2^2=(gk+\sigma k^3)T=\omega_1^2+\sigma k^3T \tag{3.4}$$

其中 $\omega_1^2=gkT$。(3.4)式即为计及表面张力的线性化色散关系[6]。

2. 二级近似

略去 $O(\epsilon^3)$ 项。得到二级近似方程

$$2i\omega\zeta_2-k^2\phi_1\zeta_1=2k\tanh 2kd\cdot\phi_2 \tag{3.5}$$

$$(g+4\sigma k^2)\zeta_2+2i\omega\phi_2+\frac{i\omega kT}{2}\phi_1\zeta_1'+\frac{k^2}{4}\phi_1^2(T^2-1)=0 \tag{3.6}$$

$$g\zeta_0+\frac{k^2}{2}|\phi_1|^2(1+T^2)+i\omega kT\zeta_1^*\phi_1=0 \tag{3.7}$$

$$(g+4\sigma k^2)\zeta_2^{(0)}+\frac{k^2}{2}(T^2-1)|\phi_1|^2+\frac{i\omega kT}{2}(\zeta_1^*\phi_1-\zeta_1\phi_1^*)=0 \tag{3.8}$$

$$2i\omega\phi_0^{(2)}+\frac{i\omega kT}{2}\zeta_1\phi_1+\frac{k^2}{4}\phi_1^2(1+T^2)=0 \tag{3.9}$$

$$\phi_2^{(0)}=0 \tag{3.10}$$

于是得出

$$\zeta_0=\frac{k}{2T}(T^2-1)|\zeta_1|^2 \tag{3.11}$$

$$\zeta_2^{(0)}=\frac{k}{2T}(1+T^2)|\zeta_1|^2\Big/\left(1+\frac{4\sigma k^2}{g}\right) \tag{3.12}$$

$$\zeta_2=\frac{k}{4T^2}(3-T^2)\zeta_1^2\Big/\left(1-\frac{4\sigma k^2}{gT^2}\right) \tag{3.13}$$

$$\phi_0^{(2)}=-\frac{i\omega}{8T^2}(1+3T^2)\zeta_1^2 \tag{3.14}$$

$$\phi_2=-\frac{i\omega}{8T^4}\left[3(T^4-1)-\frac{8\sigma k^2}{g}(1+T^2)\right]\zeta_1^2\Big/\left(1-\frac{4\sigma k^2}{gT^2}\right) \tag{3.15}$$

$$\phi_2^{(0)}=0 \tag{3.16}$$

3. 三级近似

略去 $O(\epsilon^4)$ 项，经过详细计算，三级近似给出 $\zeta_1(x,t)$ 所满足的方程

$$2i\omega\frac{\partial\zeta_1}{\partial t}+(\omega_1^2-\omega^2)\zeta_1-(C^2+\sigma kT)\frac{\partial^2\zeta_1}{\partial x^2}-B\frac{\omega^2}{k^2T^2}|\zeta_1|^2\zeta_1=0 \tag{3.17}$$

或

$$2i\omega\frac{\partial\phi_1}{\partial t}+(\omega_1^2-\omega^2)\phi_1-(C^2+\sigma kT)\frac{\partial^2\phi_1}{\partial x^2}-B|\phi_1|^2\phi_1=0 \tag{3.18}$$

其中

$$C^2=\frac{g}{2k}[T+kd(1-T^2)] \tag{3.19}$$

$$B=A+9\sigma k^6T^2/8g \tag{3.20}$$

$$A=\frac{1}{8}k^4(6T^4-5T^2+16-9T^{-2}) \tag{3.21}$$

(3.17)和(3.18)即非线性 Schrödinger 方程

四、解及结果讨论

1．非传播孤波解

积分(3.18)式，当 $B>0$ 时给出非传播孤波解

$$\phi_1(x,t)=\left[\frac{2(\omega_2^2-\omega^2)}{B}\right]^{\frac{1}{2}}\mathrm{sech}\left[\left(\frac{\omega_2^2-\omega^2}{C^2+\sigma kT}\right)^{\frac{1}{2}}x\right] \tag{4.1}$$

或

$$\zeta_1(x,t)=-\frac{i\omega}{g}\left[\frac{2(\omega_2^2-\omega^2)}{B}\right]^{\frac{1}{2}}\mathrm{sech}\left(\left[\frac{\omega_2^2-\omega^2}{C^2+\sigma kT}\right)^{\frac{1}{2}}x\right] \tag{4.2}$$

流体表面波为

$$\begin{aligned}\zeta(x,y,t)=&\cos ky(\zeta_1\exp[i\omega t]+c.c)+\frac{k^2}{2T}(T^2-1)|\zeta_1|^2\\&+\cos 2ky\left[\frac{3-T^2}{4T^3(1-4\sigma k^2/gT^2)}\exp[2i\omega t]+c.c\right]\\&+\frac{k(1+T^2)}{2T(1+4\sigma k^2/g)}|\zeta_1|^2\cos 2ky+O(\epsilon^3)\end{aligned} \tag{4.3}$$

或

$$\begin{aligned}g\zeta=&\cos ky[-i\omega\phi_1\exp[i\omega t]+c.c]+\frac{k^2}{2}(T^2-1)|\phi_1|^2\\&-\cos 2ky\left[\frac{k^2(3/T^2-1)}{4(1-4\sigma k^2/gT^2)}\phi_1^2\exp[2i\omega t]+c.c\right]\\&+\cos 2ky\cdot\frac{k^2(1+T^2)}{2(1+4\sigma k^2/g)}|\phi_1|^2+O(\epsilon^3)\end{aligned} \tag{4.4}$$

2．孤波横向振动频率范围

不难得到方程(3.18)的色散关系为

$$2\omega^2=(\omega^2-\omega_2^2+B|\phi_1|^2)-k^2(C^2+\sigma kT) \tag{4.5}$$

由此得到 $\omega^2-\omega_2^2+B|\phi_1|^2>0$，而由(4.1)式有 $\omega^2<\omega_2^2$，
故得

$$\omega_2^2-B|\phi_1|^2<\omega^2<\omega_2^2 \tag{4.6}$$

所以当计及表面张力时，孤波的横向振动频率范围（大约为驱动频率的1/2倍[3]）增大。

3．孤波的振幅和宽度与 σ 的关系

由(4.2)式，我们得到，当考虑($\alpha\neq0$)与忽略($\alpha=0$)表面张力这两种情况下，孤波振幅之比为

$$r=\left[\frac{2(\omega_2^2-\omega^2)}{B}\right]^{\frac{1}{2}}\Big/\left[\frac{2(\omega_1^2-\omega^2)}{A}\right]^{\frac{1}{2}}=1+\frac{\sigma}{2}\left[\frac{k^3T}{\omega_1^2-\omega^2}-\frac{9k^6T^2}{8gA}\right]+O(\sigma^2) \tag{4.7}$$

宽度之比为

$$s=\left(\frac{\omega_1^2-\omega^2}{C^2+\sigma kT}\right)^{-\frac{1}{2}}\Big/\left(\frac{\omega_1^2-\omega^2}{C^2}\right)^{-\frac{1}{2}}=1-\frac{\sigma}{2}\left(\frac{k^3T}{\omega_1^2-\omega^2}-\frac{kT}{C^2}\right)+O(\sigma^2) \tag{4.8}$$

如按文献[4]给出的数据：$b=2.54\text{cm}$，$d=2.0\text{cm}$，驱动频率 $\nu_d=10.2\text{Hz}$，经过计算不难得出

$$r=1+0.0046\sigma+O(\sigma^2) \tag{4.9}$$

$$s=1-0.0041\sigma+O(\sigma^2) \tag{4.10}$$

式中 σ 取 c.g.s 制单位。(4.9)，(4.10)表示：表面张力使孤波的振幅增高，宽度变窄。当表面张力为零时($\alpha=0$)，便回到了 Larraza 和 Putterman 的结果。

参 考 文 献

[1] Ablowitz, M. J. and H. Segur, On the evolution of packets of water waves, *J. Fluid Mech.*, 92 (1979), 691—715.

[2] Miles, J. W., Solitary waves, *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 12 (1980), 11—43.

[3] Wu Jun-ru, R. Keolian and I. Rudnick, Observation of a non-propagating hydrodynamic soliton, *Phys. Rev. Lett.*, 52 (1984), 1421—1424.

[4] Larraza, A. and S. Putterman, Theory of non-propagating hydrodynamic solitons, *Phys. Lett.*, 103A (1984), 15—18.

[5] Larraza, A. and S. Putterman, Theory of non-propagating surface-wave solitons, *J. Fluid Mech.*, 118 (1984), 443—449.

[6] 朗道、栗弗席茨，《流体力学》，第七章，孔祥言等译，高等教育出版社 (1983).

Theory of Non-Propagation Solitons Including Surface-Tension Effects

Yan Jia-ren Huang Guo-xiang

(*Xiangtan University, Xiangtan*

Abstract

In this paper, the surface-tension effects to non-propagating solitons is studied. Thus the Larraza and Putterman's theory has been modified. It is found that the surface-tension makes the frequency range of crosswise oscillation of solitons larger, the amplitude higher and the width smaller. When the surface-tension coefficient is equal to zero ($\alpha=0$), the results are consistent with that of Larraza and Putterman.