

双参数地基上受任意载荷 的环形基础板

卢文达 王 蜀

(上海市应用数学和力学研究所, 1986年10月15日收到)

摘 要

本文以双参数模型模拟土壤, 用半解析有限元法计算了土壤上受任意载荷的环形基础板的位移及土壤反压力分布, 并在轴对称情况下改进了Vlazov的解^[5], 与有限元解进行对比, 二者结果是一致的。同时还对土壤上环板的边界条件进行了讨论。

一、引 言

近年来, 土壤-结构的相互作用问题越来越受到人们的重视^[4], 在筏式和片筏式基础的分析 and 设计中, 位于变形土介质上的有限板的弯曲状态是颇感兴趣的。最简单的情况是将土介质假设为 Winkle 模型^[6], 再考虑土介质上受轴对称载荷的圆板或环板的性态, 这在五十年代就有多人做过。然而这样的土介质模型是相当粗糙和不合实际的。将土介质考虑为各向同性半无限弹性体 (J. Boussinesq, 1885)^[7], 再计算其上受轴对称载荷的圆板或环板, 这在数学上是相当困难的。Zemochkin(1939)^[8]用Zemochkin法, Ishkova(1951)^[9]用修正的幂级数法分别计算了位于各向同性弹性半空间上受均匀荷载的圆板。而且从实践中发现, 对土壤来说, 远离受载区的表面位移减小得比弹性半空间理论预言的要快得多。本文利用 P. L. Pasternak(1954)^[10]提出的双参数土壤模型模拟土壤, 以半解析有限元法计算了土壤上受任意载荷的环形基础板。对于双参数土壤模型上受轴对称载荷的圆板情况, 本文改进了 Vlazov(1966)^[6]的结果, 得到了任意轴对称载荷下环形板的解, 与半解析有限元得出的解相比, 二者结果是一致的。

二、基本方程及边界条件

P. L. Pasternak提出的双参数土壤模型可用下式表示,

$$q(x, y) = kw(x, y) - G_r \nabla^2 w(x, y) \quad (2.1)$$

其中 $w(x, y)$ 和 $q(x, y)$ 分别是土壤表面的位移和所受压力, k, G_r 是表征土壤特征的两个参数, 可用下列式子表示:

$$k = \int_0^H \frac{E_0}{(1-\nu_0^2)} \left[\frac{dh(z)}{dz} \right]^2 dz, \quad G_r = \frac{1}{2} \int_0^H \frac{Z_0}{(1+\nu_0)} [h(z)]^2 dz \quad (2.2)$$

其中 $E_0 = \frac{E_s}{(1-\nu_s)}$, $\nu_0 = \frac{\nu_s}{(1-\nu_s)}$, E_s 和 ν_s 分别为土壤的杨氏模量和泊桑比, H 为土壤的深度, $h(z)$ 描述 $w(x, y, z)$ 沿深度 z 方向的变化, $w(x, y, z) = w(x, y)h(z)$. $h(z)$ 一般可取为线性变化或指数变化, 即:

$$h(z) = (1-\eta); \quad h(z) = \frac{\text{sh}[\gamma(H-z)/R]}{\text{sh}[\gamma H/R]} \quad (2.3)$$

其中 $\eta = z/H$, 而 γ 和 R 为常数. 可以说常数 k 是压应力作用下对土介质变形的一个量度, 而 G , 则是作用力对邻近单元体可传性的一个量度, 称荷载传播率.

对于轴对称载荷情况, 可得位于双参数土介质上的圆板的控制方程如下:

$$D\nabla^4 w(r) - G_r \nabla^2 w(r) + kw(r) = p(r) \quad (2.4)$$

其中 D 为板的弯曲刚度, p 为载荷.

对于一般载荷情况, 采用极坐标形式, 可得各种应变能如下:

a) 双参数土介质中的应变能:

$$U_s = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^{R_s} \left\{ k[w(r, \theta)]^2 - \frac{1}{2} G_r w(r, \theta) \nabla^2 w(r, \theta) \right\} r dr d\theta \quad (2.5)$$

b) 圆板(可不等厚度)中的应变能:

$$U_p = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_{r_p}^{R_p} D \left\{ [\nabla^2 w(r, \theta)]^2 - 2(1-\nu) \left[\frac{\partial^2 w(r, \theta)}{\partial r^2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w(r, \theta)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w(r, \theta)}{\partial \theta^2} \right] - \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w(r, \theta)}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w(r, \theta)}{\partial \theta} \right)^2 \right\} r dr d\theta \quad (2.6)$$

c) 外载荷所作之功:

$$V = \int_0^{2\pi} \int_{r_p}^{R_p} q(r, \theta) w(r, \theta) r d\theta dr + \sum_i \int_0^{2\pi} p_i w_i r d\theta - \sum_j \int_0^{2\pi} M_{r_j} (w_j) r d\theta \quad (2.7)$$

位于双参数土介质上的圆板或环板, 其边界条件可分下列几种情况:

i) 板边受固定支承的情况

$$[w]_B = 0, \quad \left[\frac{dw}{dr} \right]_B = 0 \quad (2.8)$$

ii) 板边受铰支承的情况

$$[w]_B = 0, \quad \left[\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dw}{dr} \right]_B = M_0 \quad (2.9)$$

M_0 为铰支边所受力矩的集度, 不受力矩时为零.

iii) 当板自由地置于土介质上, 而边界不受人为约束时, 设板内位移为 w_p , 板的区域外的土介质位移为 w_r , 板边界处的半径为 R , 则有:

$$\left. \begin{aligned} w_p(R) &= w_r(R) \\ \left[\frac{d^2 w_p}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dw_p}{dr} \right]_R &= M_0 \\ \left[-D \frac{d}{dr} \nabla^2 w_p + G_r \frac{dw_p}{dr} \right]_R &= G_r \left[\frac{dw_r}{dr} \right]_R + T_0 \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

M_0 和 T_0 分别为自由边所受力矩和剪力的集度.

三、有限元解

由于结构是轴对称的，载荷非轴对称，因此采用半解析有限元较为合理。先将外载荷展为 Fourier 级数：

$$\left. \begin{aligned} q(r, \theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} q_n(r) \cos n\theta \\ p(r, \theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} p_n(r) \cos n\theta \\ M(r, \theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} M_n(r) \cos n\theta \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

则相应地，位移和内力也可展为同样形式的 Fourier 级数：

$$\left. \begin{aligned} w(r, \theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} w_n(r) \cos n\theta, \quad Q_r(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} Q_{p_n}(r) \cos n\theta \\ M_r(r, \theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} M_{r_n}(r) \cos n\theta, \quad M_\theta(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} M_{\theta_n}(r) \cos n\theta \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

从一节可得整个系统的总势能为：

$$\begin{aligned} U &= U_p + U_s - V = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_{r_p}^{R_p} D \left\{ [\nabla^2 w(r, \theta)]^2 \right. \\ &\quad - 2(1-\nu) \left[\frac{\partial^2 w(r, \theta)}{\partial r^2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w(r, \theta)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w(r, \theta)}{\partial \theta^2} \right) \right. \\ &\quad \left. \left. - \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w(r, \theta)}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w(r, \theta)}{\partial \theta} \right)^2 \right] \right\} r dr d\theta + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^{R_s} \left\{ k [w(r, \theta)]^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} G_p w(r, \theta) \nabla^2 w(r, \theta) \right\} r dr d\theta - \int_0^{2\pi} \int_{r_p}^{R_p} q(r, \theta) w(r, \theta) r dr d\theta \\ &\quad - \sum_i \int_0^{2\pi} p_i(r_i, \theta) w_i(r_i, \theta) r_i d\theta + \sum_i \int_0^{2\pi} M_i(r_i, \theta) [w(r_i, \theta)]'_{r_i} d\theta \end{aligned} \quad (3.3)$$

既然位移和内力都沿周向展开成 Fourier 级数，因此圆板的有限元分割只需将其划分为一个个的同心圆环单元。对于在每一级谐波载荷作用下，单元内位移设为三次幂级数径向分布，即：

$$w(r, \theta) = (a_0 + a_1 r + a_2 r^2 + a_3 r^3) \cos n\theta = w(r) \cos n\theta \quad (3.4)$$

以满足单元和单元之间的位移 w 和转角 φ 的连续性。令

$$\{d\} = \{w_1, \varphi_1, w_2, \varphi_2\}^T \quad (3.5)$$

其中 (w_1, φ_1) 和 (w_2, φ_2) 分别为单元内外结线上的位移和转角，则：

$$\left\{ \begin{matrix} w_1 \\ \varphi_1 \\ w_2 \\ \varphi_2 \end{matrix} \right\} = \left[\begin{matrix} 1 & r_1 & r_1^2 & r_1^3 \\ 0 & 1 & 2r_1 & 3r_1^2 \\ 1 & r_2 & r_2^2 & r_2^3 \\ 0 & 1 & 2r_2 & 3r_2^2 \end{matrix} \right] \left\{ \begin{matrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{matrix} \right\} \quad (3.6)$$

其中 r_1 和 r_2 为单元的内外半径, 上式简记为

$$\{d\} = [DA]\{a\} \quad (3.7)$$

这样, $w(r)$ 可表示如下:

$$w(r) = \{1, r, r^2, r^3\}\{a\} = \{1, r, r^2, r^3\}[DA]^{-1}\{d\} = \{N\}\{d\} \quad (3.8)$$

将上式代入总势能(3.3)式中, 得:

$$\begin{aligned} U = & \sum_{j=1}^N \int_0^{2\pi} \int_{r_j}^{r_{j+1}} \frac{1}{2} \{d\}^T [D] \{d\} r dr d\theta \\ & - \sum_{j=1}^N \left\{ \int_0^{2\pi} \int_{r_j}^{r_{j+1}} \{d\}^T [N]^T \cos^2 n\theta q(r) r dr d\theta \right. \\ & + \sum_i \int_0^{2\pi} \{d\}^T [N]^T \cos^2 n\theta P_i(r_i) r_i d\theta \\ & \left. - \sum_i \int_0^{2\pi} \{d\}^T ([N]^T)^T \cos^2 n\theta M_i(r_i) r_i d\theta \right\} \end{aligned} \quad (3.9)$$

将上式对每个单元积分, 则得:

$$U_{unit} = 2^{-1} \{d\}^T [k] \{d\} - \{d\}^T \{p\} \quad (3.10)$$

由静力平衡条件 $\delta U_{unit} = 0$, 得:

$$[k]\{d\} = \{p\} \quad (3.11)$$

其中 $[k]$ 即为单元刚度矩阵, $\{p\}$ 为单元载荷矩阵。

由于各单元的局部坐标和整体坐标是一致的, 所以单刚无需进行坐标变换即可直接组装成总刚度矩阵。

四、轴对称解析解

在第二节中已有了位于双参数土介质上圆板的控制方程

$$D\nabla^4 w(r) - G_p \nabla^2 w(r) + kw(r) = p(r) \quad (2.4)'$$

引入无量纲量 $\xi = r/L_0$, $L_0 = \sqrt{D/k}$, 则有:

$$\nabla_{\xi}^4 w - 2r_{\xi}^2 \nabla_{\xi}^2 w + w = pL_0^4/D \quad (4.1)$$

其中 $r_{\xi}^2 = G_p L_0^2 / 2D$ 。

方程(4.1)的解^[6]可分三部分之和:

$$w = w_1 + w_2 + w_p \quad (4.2)$$

其中 w_p 是方程(4.1)的特解, 视载荷形式而定。而 w_1 和 w_2 为方程(4.1)对应的齐次方程的通解:

$$\left. \begin{aligned} w_1(\xi) &= B_1 J_0(\sqrt{a}\xi) + B_2 H_0^{(1)}(\sqrt{a}\xi) \\ w_2(\xi) &= B_3 J_0(\sqrt{\bar{a}}\xi) + B_4 H_0^{(2)}(\sqrt{\bar{a}}\xi) \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

其中 $J_0(\sqrt{a}\xi)$ 与 $J_0(\sqrt{\bar{a}}\xi)$ 是相应于变量 $\sqrt{a}\xi$ 和 $\sqrt{\bar{a}}\xi$ 的第一种零阶Bessel函数, $H_0^{(1)}(\sqrt{a}\xi)$ 与 $H_0^{(2)}(\sqrt{\bar{a}}\xi)$ 是第一种及第二种的零阶Hankel函数(第三类Bessel函数), 而

$$a = -r_{\xi}^2 + i\sqrt{1 - (r_{\xi}^2)^2}; \quad \bar{a} = -r_{\xi}^2 - i\sqrt{1 - (r_{\xi}^2)^2} \quad (4.4)$$

由于 w 应为实函数, 而 $J_0(\sqrt{a}\xi)$, $J_0(\sqrt{\bar{a}}\xi)$, $H_0^{(1)}(\sqrt{a}\xi)$ 和 $H_0^{(2)}(\sqrt{\bar{a}}\xi)$ 是复变函数, 因

此将 w 的结果表示如下:

$$w = c_1 u_0(\xi) + c_2 v_0(\xi) + c_3 f_0(\xi) + c_4 g_0(\xi) + w_r \quad (4.5)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} u_0(\xi) &= \operatorname{Re} J_0(\sqrt{a} \xi) = (J_0(\sqrt{a} \xi) + J_0(\sqrt{\bar{a}} \xi))/2 \\ v_0(\xi) &= \operatorname{Im} J_0(\sqrt{a} \xi) = (J_0(\sqrt{a} \xi) - J_0(\sqrt{\bar{a}} \xi))/2i \\ f_0(\xi) &= \operatorname{Re} H_0^{(1)}(\sqrt{a} \xi) = (H_0^{(1)}(\sqrt{a} \xi) + H_0^{(2)}(\sqrt{\bar{a}} \xi))/2 \\ g_0(\xi) &= \operatorname{Im} H_0^{(2)}(\sqrt{a} \xi) = (H_0^{(1)}(\sqrt{a} \xi) - H_0^{(2)}(\sqrt{\bar{a}} \xi))/2i \end{aligned} \right\} \quad (4.6)$$

由此可推出各内力如下:

$$\frac{dw}{dr} = -\frac{1}{L_0} \left[c_1 \theta_1(\xi) + c_2 \theta_2(\xi) + c_3 \theta_3(\xi) + c_4 \theta_4(\xi) - \frac{dw_r}{d\xi} \right] \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} M_r = L^{-2} D \{ & c_1 [M_1(\xi) - (1-\nu)\bar{M}_1(\xi)] + c_2 [M_2(\xi) \\ & - (1-\nu)\bar{M}_2(\xi)] + c_3 [M_3(\xi) - (1-\nu)\bar{M}_3(\xi)] \\ & + c_4 [M_4(\xi) - (1-\nu)\bar{M}_4(\xi)] - \left[\nabla_\xi^2 - \frac{1-\nu}{\xi} \frac{d}{d\xi} \right] w_r \} \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} M_\theta = L^{-2} D \{ & c_1 [\nu M_1(\xi) + (1-\nu)\bar{M}_1(\xi)] + c_2 [\nu M_2(\xi) \\ & + (1-\nu)\bar{M}_2(\xi)] + c_3 [\nu M_3(\xi) + (1-\nu)\bar{M}_3(\xi)] \\ & + c_4 [\nu M_4(\xi) + (1-\nu)\bar{M}_4(\xi)] - \left[\nu \nabla_\xi^2 + \frac{1-\nu}{\xi} \frac{d}{d\xi} \right] w_r \} \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$Q_r = -L^{-1} D [c_1 Q_1(\xi) + c_2 Q_2(\xi) + c_3 Q_3(\xi) + c_4 Q_4(\xi) + d \nabla_\xi^2 w_r / d\xi] \quad (4.10)$$

$$Q_\theta = kw + G_r (M_r + M_\theta) / [D(1+\nu)] \quad (4.11)$$

式中引入下列符号:

$$\left. \begin{aligned} \theta_1(\xi) &= u_1(\xi) \cos \varphi - v_1(\xi) \sin \varphi, \quad \theta_3(\xi) = f_1(\xi) \cos \varphi - g_1(\xi) \sin \varphi \\ \theta_2(\xi) &= u_1(\xi) \sin \varphi + v_1(\xi) \cos \varphi, \quad \theta_4(\xi) = f_1(\xi) \sin \varphi + g_1(\xi) \cos \varphi \end{aligned} \right\} \quad (4.12)$$

$$\left. \begin{aligned} M_1(\xi) &= u_0(\xi) \cos 2\varphi - v_0(\xi) \sin 2\varphi, \quad M_3(\xi) = f_0(\xi) \cos 2\varphi - g_0(\xi) \sin 2\varphi \\ M_2(\xi) &= u_0(\xi) \sin 2\varphi + v_0(\xi) \cos 2\varphi, \quad M_4(\xi) = f_0(\xi) \sin 2\varphi + g_0(\xi) \cos 2\varphi \end{aligned} \right\} \quad (4.13)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{M}_1(\xi) &= \xi^{-1} [u_1(\xi) \cos \varphi - v_1(\xi) \sin \varphi] \\ \bar{M}_2(\xi) &= \xi^{-1} [u_1(\xi) \sin \varphi + v_1(\xi) \cos \varphi] \\ \bar{M}_3(\xi) &= \xi^{-1} [f_1(\xi) \cos \varphi - g_1(\xi) \sin \varphi] \\ \bar{M}_4(\xi) &= \xi^{-1} [f_1(\xi) \sin \varphi + g_1(\xi) \cos \varphi] \end{aligned} \right\} \quad (4.14)$$

$$\left. \begin{aligned} Q_1(\xi) &= u_1(\xi) \cos 3\varphi - v_1(\xi) \sin 3\varphi, \quad Q_2(\xi) = u_1(\xi) \sin 3\varphi + v_1(\xi) \cos 3\varphi \\ Q_3(\xi) &= f_1(\xi) \cos 3\varphi - g_1(\xi) \sin 3\varphi, \quad Q_4(\xi) = f_1(\xi) \sin 3\varphi + g_1(\xi) \cos 3\varphi \end{aligned} \right\} \quad (4.15)$$

而 $\varphi = 2^{-1} \arg a, a = -r_0^2 + i\sqrt{1 - (r_0^2)^2}$ (4.16)

$$\left. \begin{aligned} u_1(\xi) &= \operatorname{Re} J_1(\sqrt{a} \xi) = (J_1(\sqrt{a} \xi) + J_1(\sqrt{\bar{a}} \xi))/2 \\ v_1(\xi) &= \operatorname{Im} J_1(\sqrt{a} \xi) = (J_1(\sqrt{a} \xi) - J_1(\sqrt{\bar{a}} \xi))/2i \\ f_1(\xi) &= \operatorname{Re} H_1^{(1)}(\sqrt{a} \xi) = (H_1^{(1)}(\sqrt{a} \xi) + H_1^{(2)}(\sqrt{\bar{a}} \xi))/2 \\ g_1(\xi) &= \operatorname{Im} H_1^{(2)}(\sqrt{a} \xi) = (H_1^{(1)}(\sqrt{a} \xi) - H_1^{(2)}(\sqrt{\bar{a}} \xi))/2i \end{aligned} \right\} \quad (4.17)$$

对于圆环板域外土介质的位移 w_F , 其控制方程为:

$$G_F \nabla_r^2 w_F - k w_F = 0 \quad (0 \leq r \leq R_{in}, R_{out} \leq r < \infty) \quad (4.18)$$

其解可表示为:

$$w_F(r) = c_5 I_0(ar) + c_6 K_0(ar) \quad (4.19)$$

式中 c_5 和 c_6 为待定常数, $\alpha^2=k/G_p$, I_0 和 K_0 分别为第一和第二类修正的零阶Bessel函数。

由于土介质为非受荷区域, 则 w_F 要满足一定的条件:

i) 在环板外域($R_{out} \leq r < \infty$), 有:

$$w_F(\infty)=0 \quad (4.20)$$

从而得 $c_6=0$, 则:

$$w_F(r)=c_5 K_0(\alpha r) \quad (4.21)$$

ii) 在环板的内域($0 \leq r \leq R_{in}$), 有 $w_F(0)$ 为有限值, 因此 $c_5=0$ (因 $K_0(\alpha r)$ 在0点是奇点), 则:

$$w_F(r)=c_5 I_0(\alpha r) \quad (4.22)$$

如果在环板内作用有线载荷, 则将环板在线载荷处分为几个环板分别计算, 再以环板间的连续条件和边界条件决定其待定系数。

五、例题和结论

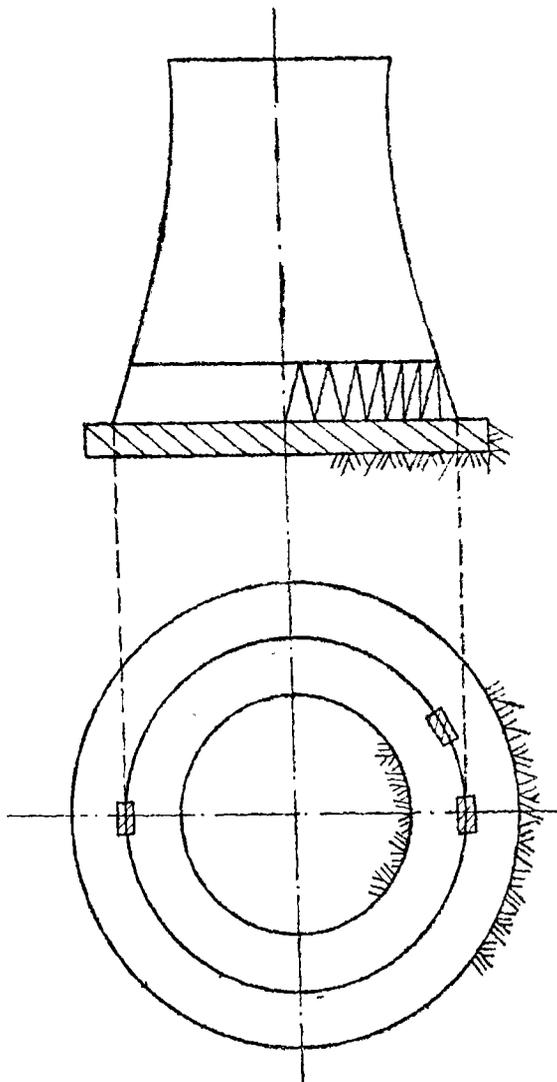


图 1

考虑 3500m^2 双曲线冷却塔的环形基础板(图1)计算。地基为天然地基, 其参数为: 弹性模量 $E_s=6\text{kg/mm}^2$, 泊桑比 $\nu_s=0.25$, 深 $H_s=3\text{m}$ 。环形基础板的内径 $r=34273\text{mm}$, 外径 $R=39273\text{mm}$, 其厚度为等厚时, $h=1700\text{mm}$, 其厚度为变厚时: $h_{\max}=1000\text{mm}$, $h_{\min}=460\text{mm}$, 弹性模量 $E=2700\text{kg/mm}^2$, 泊桑比 $\nu=0.3$ 。所受载荷为人支柱传递给环形基础板的离散点载荷, 通过Fourier级数展开为环形基础板上的集中线载荷。当考虑冷却塔只受自重时, 载荷为轴对称, 其解析解和有限元解(等厚)示于图2中, 从图中可看出两者计算出的位移 w 和土壤反力 Q 是一致的。当考虑冷却塔同时受自重和风载作用时, 则载荷是非轴对称(180° 对称)的, 其土壤反压力沿径向和周向的分布(变厚)如图3所示。通过系列计算可得如下几点结论: (i) 土壤的弹性模量越大, 则基础的位移越小, 而反力却大; (ii) 土壤层的深度越深, 则基础位移越大, 但反压力则越小; (iii) 双参数模型能较好地模拟土壤的静态性质, 且使数学上的表达较为方便。

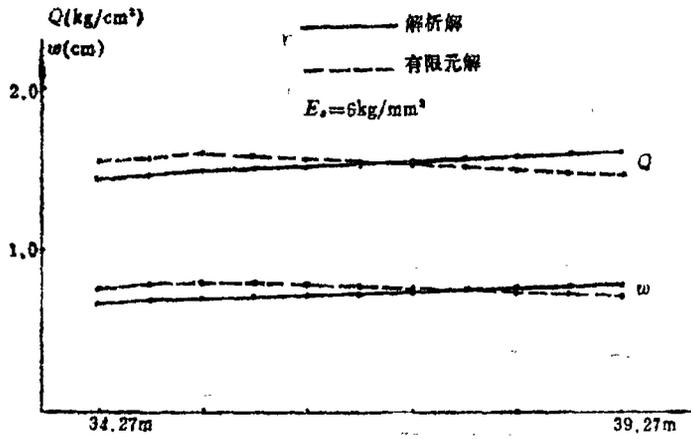


图 2

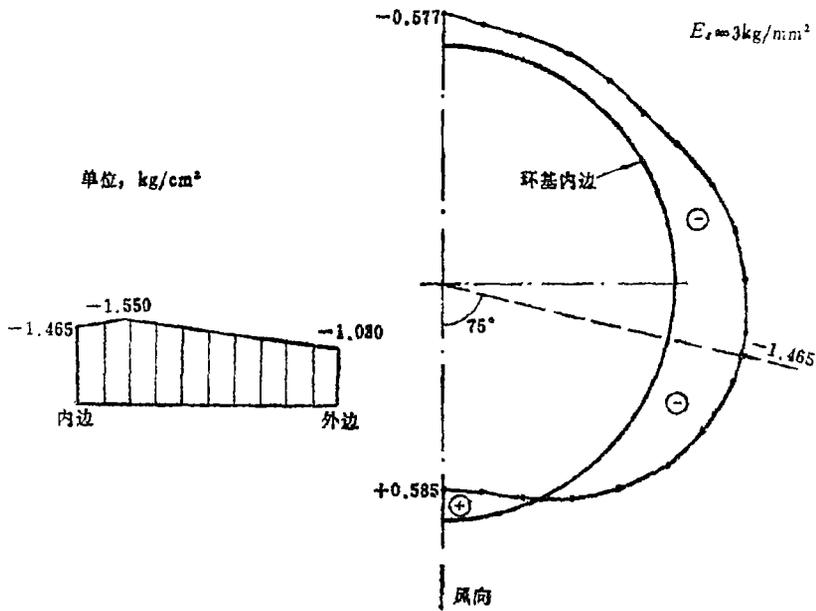


图 3

本文为水电部华北电力设计院支持的研究课题，在此谨表谢意。

参 考 文 献

- [1] Selvadurai, A. P. S., 《土与基础相互作用的弹性分析》, 中国铁道出版社 (1984).
- [2] 钱伟长, 《变分法及有限元》, 科学出版社 (1980).
- [3] Bathe, K. J. and E. L. Wilson, *Numerical Methods in Finite Element Analysis*, Prentice-Hall Inc, Englewood Cliffs, New Jersey, U. S. A.
- [4] 王 蜀, 土与结构相互作用, 上海市应用数学和力学研究所博士生开题报告 (1985).
- [5] Vlazov, V. Z. and U. N. Leontiev, *Beams, Plates and Shells on Elastic Foundations*, Israel Program for scientific Translations, Jerusalem(1966). (translated from Russian)
- [6] Winkler, E., *Die Lehre von der Elastigitat und Festigkeit*, Dominicus, Prague(1867).
- [7] Boussinesq, J., *Application des Potentiels à L'Etude de l'Equilibre et du Mouvement des Solides Elastique*, Gauthier-Villars, Paris (1885).
- [8] Zemochkin, B. N., Analysis of circular plates on elastic foundation, *Mosk. Izd. Voenna. Ingh. Akad.* (1939). (in Russian)
- [9] Ishkova, A. G., Bending of a circular plates on the elastic halfspace under the action of a uniformly distributed axisymmetrical load, *Vch. Zap. Mosk. Gos. Univ.*, (1951), 3:202—225. (in Russian)
- [10] Pasternake, P. L., On a new method of analysis of an elastic foundation by means of two foundation constants, *Gosudarstvennoe Izdatelstro Liberatwri Po Stroitelstvui Arkhitekture*, Moscow (1954). (in Russian)
- [11] 卢文达、蓬静欣, 柱支承双曲冷却塔 的有限元解及电算程序, 水电部西安热工研究所研究报告 (1976).

On the Circular Footing Plates on Two-Parameters Foundation under Arbitrary Loads

Loo Wen-da Wang Shu

(Shanghai Institute of Appl. Math. and Mech., Shanghai)

Abstract

Modelling soils by two-parameter foundation model, this paper calculates the distributions of displacements of circular footing plates on soils and reactions of soils under arbitrary loads using semi-analytical finite element method. And it improves V. Z. Vlazov's solution in the case of axisymmetry. The results agree well in comparison with those by F. E. M. At the same time, the boundary conditions of circular plates on soils are discussed.