应用数学和力学，第8卷第9期(1987年9月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

对原始卡鲁扎-克莱因理论的一些意见*

安加德·珀维兹　阿斯加尔·卡迪尔

(巴基斯坦古艾德·艾·亚赞大学数学系，1986年10月30日收)

摘　要

本文严谨地探讨了卡鲁扎-克莱因理论的根据，指出：五维空间的形式不能以原来企图用的方法来运用.并解释了原来没有注意到这个问题的原因.

近来，有很多研究论及到更高维数的理论．尤其在现代超弦线理论和以前的超引力中，都用到10或11维．甚至已经有了506维空间的提议．所有这样的提法基于卡鲁扎的思想，即用增加物理维数的办法，可以达到引力与其它力的统一；也根据了克莱因的建议，那就是：当宇宙被压缩到一个非常小的程度时，过大的维数是不可测的．当然，最初的想法只是企图引入一个另外的物理维数，达到引力与电磁学的统一．由于人们对于维数的数量渐渐开始感兴趣，看起来很值得重复一下卡鲁扎计算，来弄清楚这个思想的根源所在．

卡鲁扎用了一个很小的变符，假设存在五个时空维数，并给出度规

$$ds^2=g_{ab}(x^c)dx^a dx^b \qquad (a,b,c=0,1,2,3,4) \tag{1}$$

其中$a=\mu=0,1,2,3$是普通的时-空指数，$a=4$为附加的第五维数．令$g_{\mu\nu}$为普通的空间度规，$g_{\mu4}$为四矢量电磁势，A_μ和g_{44}为某个场B，同时假设对于第五维空间，没有依赖关系，即$g_{ab,4}=0$．

那么，原来的设想就是：五维短程方程

$$\ddot{x}^a+\Gamma^a_{bc}\dot{x}^b\dot{x}^c=0 \tag{2}$$

给出了爱因斯坦-麦克斯韦运动方程，结合劳伦茨受力定律，有

$$\ddot{x}^\mu+\{\nu^\mu\rho\}\dot{x}^\nu\dot{x}^\rho=\frac{q}{m}F^\mu_\nu\dot{x}^\nu \tag{3}$$

五维时空向四维时空的投影，把五维克里斯托费尔符号分解成一个四维克里斯托费尔符号和麦克斯韦张量．

我们不用(2)式，而是用方程(1)来记下拉氏算符$L=1$和欧勒-拉格朗日方程，即得

$$g_{ab,d}\dot{x}^a\dot{x}^b=2g_{ad}\ddot{x}^a+2g_{ad,b}\dot{x}^a\dot{x}^b \tag{4}$$

令$d=\mu$，$a=\nu,4$，$b=\rho,4$，我们有

$$\begin{aligned}&g_{\mu\nu}\ddot{x}^\nu+g_{\mu4}\ddot{x}^4+g_{\mu\nu,\rho}\dot{x}^\nu\dot{x}^\rho+g_{\mu4,\rho}\dot{x}^4\dot{x}^\rho\\&\quad-g_{\nu4,\mu}\dot{x}^4x^\nu-\frac{1}{2}g_{\nu\rho,\mu}\dot{x}^\nu\dot{x}^\rho-\frac{1}{2}g_{44,\mu}(\dot{x}^4)^2=0\end{aligned} \tag{5}$$

* 余棠推荐．

因此，方程变成

$$g_{\mu\nu}\ddot{x}^{\nu}+[\mu,\nu\rho]\dot{x}^{\nu}\dot{x}^{\rho}-\dot{x}^{4}F_{\mu\nu}\dot{x}^{\nu}$$
$$+A_{\mu}\ddot{x}^{4}-\frac{1}{2}B_{,\mu}(\dot{x}^{4})^{2}=0 \qquad (6)$$

如果令$\dot{x}^4=q/m$，$B_{,\mu}=0$，由于$\dot{x}^4$为常数，$\ddot{x}^4$将等于零。这样，方程(6)就变成方程(3)。这就是卡鲁扎得到的结果。克莱因补充到，由于过大的维数是密集的，则第五速度分量$\dot{x}^4$是量子化的，因此，电荷也是量子化的。

然而，$\dot{x}^4$和q/m的等同是人为的。如果只存在一个电荷——正如人们当时确认的那样，那么就会有很少的缺陷。但对于已知的夸克电荷和轻粒子电荷，随着夸克系的不同聚集，这种等同将成为非常不引人注意的理论要点。这就是：我们将如何容易地捕获五维空间的粒子，并使他们具有第五维空间的速度？显然，原来的想法只依据了一个简单合理的电荷，或者它的负值。

在(4)式中，令$d=4$，所得到的方程出现一个很大的问题。虽然方程式在左边为零，方程仍然是一个很有价值的恒等式。

它给出

$$g_{a4}\ddot{x}^{a}+g_{a4,b}\dot{x}^{a}\dot{x}^{b}=0 \qquad (7)$$

再令$a=\mu,4$，当$g_{a4,4}=0$时，$b=\nu$，则有

$$A_{\mu}\ddot{x}^{\mu}+B\ddot{x}^{4}+A_{\mu,\nu}\dot{x}^{\mu}\dot{x}^{\nu}+\dot{x}^{4}B_{,\nu}\dot{x}^{\nu}=0 \qquad (8)$$

利用B的不变性和$\dot{x}^4$的值，得到

$$A_{\mu}\ddot{x}^{\mu}+A_{\mu,\nu}\dot{x}^{\mu}\dot{x}^{\nu}=0 \qquad (9)$$

用(3)式与(9)式得出

$$\dot{x}^{\mu}(\dot{x}^{\nu}A_{\mu,\nu}+\frac{q}{m}A_{\nu}F^{\nu}_{\mu})=0 \qquad (10)$$

它可改成写

$$\dot{x}^{\mu}(\dot{A}_{\mu}+\frac{q}{m}A_{\nu}F^{\nu}_{\mu})=0 \qquad (11)$$

选择检验粒子的其它系统，方程(11)变成

$$\dot{\phi}=-\frac{q}{m}\underline{A}\cdot\underline{E} \qquad (12)$$

随着非磁矢量势能，让电动势改变一段时间，这个方程显然是不符的。因此，方程(4)一般不能成立。这就意味着卡鲁扎原先的设想不能生效。原先之所以假定它有效是因为把附加方程做为一个非物理量而忽略不计的缘故。然而，方程(4)必须作为一个整体——方程(3)同方程(11)一起产生。拆开这个整体，就得到方程(12)，这当然是不允许的。

以上的讨论没有必要应用卡鲁扎-克莱因理论的更高维数的说法。但当你觉得五维的说法不令人满意时，就必须再探讨一下更高维数的吸引性。

Some Comments on the Original Kaluza-Klein Theory

Amjad Pervez　Asghar Qadir

(*Department of Mathematics Quaid-I-Azam University, Pakistan*)

Abstract

In this note the basis of the Kaluza-Klein theory is examined critically and it is pointed out that the five-dimensional version can't work in the way that was originally intended. The reason why the problem was not noted originally is elucidated.