

非对称成长的三角洲

陶明德

(复旦大学, 1986年4月30日收到)

摘 要

推导了岸线变化的非线性偏微分方程, 把解展成某一小参数的渐近级数。然后使用Fourier变换求得Green函数, 解就用Green函数来表示。所得的结果表明由于来自河流和沿岸流的输沙, 三角洲的成长是非对称的, 并对长江三角洲的非对称成长试作解释。

一、引 言

由于沿岸输沙造成的侵蚀和堆积, 沙质海滩的岸线会缓慢地变化。此外河流作为一个点源把沙提供给海滩, 在确定岸线形状时也起着重要作用。所以当要在海岸带选择建筑物的适当位置时, 预测岸线变化的问题就很重要。由于河流和沿岸流的共同作用而对岸线变化的影响必须予以注意。然而这问题是很困难的, 因为岸线变化要受到水流、波浪和地形等因素的影响。

在对岸线变化的研究中, 值得一提的是在1956年Pelnard-Considère^[1]创立的一维理论。在这理论中, 向岸-离岸的输沙是被忽略, 而仅讨论沿岸输沙。沿岸输沙率使用经验公式来计算。这一模型不仅对数值模拟很有用, 而且由于它的简单还能得到解析解。在[2]中罗列了一些解析解。

[3]使用上述模型来分析三角洲的成长, 其中把河流作为一个集中的沙源, 沿岸输沙起到扩散作用。但因为在[3]中使用的方程是线性扩散方程, 只能得到三角洲对称成长的结果。本文把扩散系数作为一个变量, 因此导出了非线性的扩散方程, 从该方程得到了非对称成长的结果。最后对长江三角洲的非对称成长试作解释。

二、方 程

如图1所示, x 轴取为水平方向, y 轴取为垂直方向, 波峰线保持恒定方向, 与 x 轴的夹角为 $\pi - \alpha_0$ ($0 < \alpha_0 < \pi/2$), 故沿岸流从右向左流动。岸线与波峰线的交角为 α , 岸线方程为 $y = y(x, t)$ 。由图1可见

• 欧阳晔推荐。

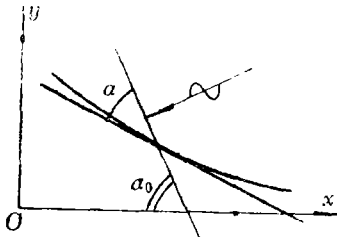


图 1

$$\alpha = \arctg y' - (\pi - \alpha_0) \quad (2.1)$$

沿岸输沙率公式可以取为

$$Q_i = -K' g H_0^3 T \sin \frac{7}{4} \alpha \quad (2.2)$$

其中 Q_i 为海滩天然土的以体积计的输沙率, K' 为一个与波浪尺度和泥沙粒径有关的常数, g 为重力加速度, H_0 为深水处的有效波高, T 为波浪周期. (2.2) 式中的负号“-”表示沿岸流从右沿 x 轴向左流动. 岸线变化方程为

$$\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{1}{K_n} \frac{\partial Q_i}{\partial x} = \frac{Q_r}{D_0} \delta(x) \quad (2.3)$$

其中 $K_n = D_0(1-n)$, D_0 为临界推移水深, n 为泥沙的空隙率, 一般取为 0.4. 河流的出口处位于 $x=0$, Q_r 为河流的以体积计的输沙率. $\delta(x)$ 为 Dirac 函数.

在 (2.3) 式中的 $\partial Q_i / \partial x$ 可以化为

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_i}{\partial x} &= \frac{\partial Q_i}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial x} \\ &= -\frac{7}{4} K' g H_0^3 T \cos \frac{7}{4} [\alpha_0 - (\pi - \arctg y')] \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \end{aligned}$$

在余弦函数中的 $\pi - \arctg y'$ 是小量, 因此当忽略高价小量后, 可得

$$\frac{\partial Q_i}{\partial x} = -\frac{7}{4} K' g H_0^3 T \cos \frac{7}{4} \alpha_0 \left(1 - \frac{7}{4} \operatorname{tg} \frac{7}{4} \alpha_0 \frac{\partial y}{\partial x} \right) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

故方程 (2.3) 化为

$$\frac{\partial y}{\partial t} = A \left(1 - B \frac{\partial y}{\partial x} \right) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{Q_r}{D_0} \delta(x) \quad (2.4)$$

其中 $A = \frac{7}{4 K_n} K' g H_0^3 T \cos \frac{7}{4} \alpha_0 = |Q_i| \frac{7}{4 K_n} \cot \frac{7}{4} \alpha_0$, $B = \frac{7}{4} \operatorname{tg} \frac{7}{4} \alpha_0$. 设 x 和 y 方向的特征长度分别为 L 和 l , 特征时间为 L^2/A , 无量纲量 ξ 、 θ 和 τ 分别取为

$$\xi = \frac{x}{L}, \quad \theta = \frac{y}{l}, \quad \tau = \frac{t}{L^2/A}$$

则方程 (2.4) 的无量纲形式为

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \left(1 - B \frac{l}{L} \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right) \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} + \frac{Q_r}{D_0 A} \frac{L}{l} \delta(\xi)$$

取比值

$$\frac{l}{L} = \frac{1.2}{7} \operatorname{tg} \frac{7}{4} \alpha_0 \cdot \frac{Q_r}{|Q_i|} \quad (2.5)$$

其理由在下面将予以说明. 因此上述方程又可化为

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \left(1 - \varepsilon \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right) \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} + 2\delta(\xi) \quad (2.6)$$

其中 $\varepsilon = 0.3 \operatorname{tg}^2(7\alpha_0/4) \cdot Q_r / |Q_i|$. 在本问题中, 初始条件为

$$\text{当 } \tau=0 \text{ 时, } \quad \theta=0 \quad (2.7)$$

边界条件为

$$\text{当 } \xi = \pm \infty \text{ 时, } \quad \theta=0 \quad (2.8)$$

方程 (2.6) 为非线性的非齐次偏微分方程, 精确解是很难得到的. 因此当 $\varepsilon \ll 1$ 时, 把 θ 展

成关于 ε 的渐近级数

$$\theta = \theta_0 + \varepsilon\theta_1 + \varepsilon^2\theta_2 + \dots \quad (2.9)$$

把级数(2.9)代入方程(2.6)和(2.7)、(2.8)两式, 我们可以得到

$$\frac{\partial\theta_0}{\partial\tau} = \frac{\partial^2\theta_0}{\partial\xi^2} + 2\delta(\xi) \quad (2.10)$$

$$\text{当}\tau=0\text{时,} \quad \theta_0=0 \quad (2.11)$$

$$\text{当}\xi=\pm\infty\text{时,} \quad \theta_0=0 \quad (2.12)$$

以及

$$\frac{\partial\theta_1}{\partial\tau} = \frac{\partial^2\theta_1}{\partial\xi^2} - \frac{\partial\theta_0}{\partial\xi} \frac{\partial^2\theta_0}{\partial\xi^2} \quad (2.13)$$

$$\text{当}\tau=0\text{时,} \quad \theta_1=0 \quad (2.14)$$

$$\text{当}\xi=\pm\infty\text{时,} \quad \theta_1=0 \quad (2.15)$$

在此不再求得更高阶量的修正, 因为已经能看出三角洲的非对称成长了。

三、用 Green 函数求解

因为方程(2.10)和(2.13)是线性的非齐次方程, 故利用 Green 函数后我们可以求解这些方程。空间变量 ξ 从 $-\infty$ 变化到 $+\infty$, 故可对 ξ 作 Fourier 变换, 再利用 Fourier 变换来求得 Green 函数。首先求如下问题的解

$$\frac{\partial u}{\partial\tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2} + \delta(\xi - \xi_0)\delta(\tau - \tau_0) \quad (3.1)$$

$$u(\xi, \tau; \xi_0, \tau_0)|_{\tau=\tau_0} = \delta(\xi - \xi_0) \quad (3.2)$$

其中 δ 函数表示在 $\xi = \xi_0$ 处在 $\tau = \tau_0$ 时起作用的单位强度的瞬时点源。

设 $U(\alpha_1, \tau; \xi_0, \tau_0)$ 是 Green 函数 $u(\xi, \tau; \xi_0, \tau_0)$ 的 Fourier 变换, 则方程(3.1)就变换为

$$\frac{dU}{d\tau} + \alpha_1^2 U = \frac{\exp[i\alpha_1 \xi_0]}{\sqrt{2\pi}} \delta(\tau - \tau_0) \quad (3.3)$$

(3.2) 式变换为

$$U(\alpha_1, \tau_0; \xi_0, \tau_0) = \frac{\exp[i\alpha_1 \xi_0]}{\sqrt{2\pi}} \quad (3.4)$$

故(3.3)满足(3.4)的解为

$$U(\alpha_1, \tau; \xi_0, \tau_0) = \frac{\exp[i\alpha_1 \xi_0]}{\sqrt{2\pi}} \exp[-\alpha_1^2 (\tau - \tau_0)] \quad (3.5)$$

逆变换为

$$u(\xi, \tau; \xi_0, \tau_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-\alpha_1^2 (\tau - \tau_0) - i\alpha_1 (\xi - \xi_0)] d\alpha_1$$

即

$$u(\xi, \tau; \xi_0, \tau_0) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(\tau - \tau_0)}} \exp[-(\xi - \xi_0)^2 / 4(\tau - \tau_0)] \quad (3.6)$$

我们将使用 Green 函数(3.6)来求解 θ_0 和 θ_1 。对于 θ_0 来说, 我们有 $\xi_0 = 0$, τ_0 从 0 增加到 τ , 而源的强度为 2。故方程(2.10)的解为

$$\theta_0(\xi, \tau) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\tau \frac{1}{\sqrt{\tau - \tau_0}} \exp[-\xi^2 / 4(\tau - \tau_0)] d\tau_0$$

积分后得

$$\theta_0(\xi, \tau) = 2 \left(\sqrt{\frac{\tau}{\pi}} \exp\left[-\frac{\xi^2}{4\tau}\right] - \frac{|\xi|}{2\sqrt{\pi}} \int_{\frac{|\xi|}{\sqrt{\tau}}}^{\infty} \exp\left[-\frac{\eta^2}{4}\right] d\eta \right) \quad (3.7)$$

从(3.7)式可得

$$\frac{\partial \theta_0}{\partial \xi} = -\frac{\text{sign}(\xi)}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{|\xi|}{\sqrt{\tau}}}^{\infty} \exp\left[-\frac{\eta^2}{4}\right] d\eta \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial^2 \theta_0}{\partial \xi^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi\tau}} \exp\left[-\frac{\xi^2}{4\tau}\right] \quad (3.9)$$

在(3.8)式中, $\text{sign}(\xi)$ 为符号函数, 即当 $\xi > 0$ 时取正值, 当 $\xi < 0$ 时取负值。把以上两式代入方程(2.13)的左边, 再利用(3.6)式我们可得

$$\begin{aligned} \theta_1(\xi, \tau) = & \frac{1}{2(\sqrt{\pi})^3} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\tau} \left(\frac{\text{sign}(\xi_0)}{\sqrt{\tau_0(\tau-\tau_0)}} \right. \\ & \left. \cdot \exp\left\{-\left[\frac{\xi_0^2}{4\tau_0} + \frac{(\xi-\xi_0)^2}{4(\tau-\tau_0)}\right]\right\} \int_{\frac{|\xi_0|}{\sqrt{\tau_0}}}^{\infty} \exp\left[-\frac{\eta^2}{4}\right] d\eta \right) d\xi_0 d\tau_0 \end{aligned} \quad (3.10)$$

四、结 果

让我们先来说明一下在(2.5)式中取 l/L 为 $(1.2/7)\text{tg}(7\alpha_0/4) \cdot Q_r/|Q_l|$ 的理由。在(3.8)式中取 $\xi \rightarrow +0$ 的极限, 即求得在河口处岸线的斜率

$$\left| \frac{\partial \theta_0}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} = 1$$

变换到有量纲的量, 并注意到在(2.6)式中无量纲的 $2 = Q_r L / D_0 A l$, 我们有

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial y}{\partial x} \Big|_{x=0} \right| &= \frac{1}{2} \frac{Q_r}{D_0 A} \\ &= \frac{1.2}{7} \text{tg} \frac{7}{4} \alpha_0 \cdot \frac{Q_r}{|Q_l|} \end{aligned}$$

由该式可见, 两个特征长度之比 l/L 是零价近似的河口处岸线的斜率。

零价近似 θ_0 就是把扩散系数看作常数后的解, 由(3.7)式可知 θ_0 是 ξ 的偶函数, 因此三角洲的成长是对称的。但利用变量变换从(3.10)式可以证明修正项 θ_1 是 ξ 的奇函数, 因此岸线不再对称。从方程(2.4)也可知当沿岸流从右向左流动时, 在 $x > 0$ 时 $\partial y / \partial x < 0$, 故 $\partial y / \partial t$ 就较大, 岸线推进得较快一点; 而当 $x < 0$ 时, 情况就相反。由于岸线推进与斜率有关, 因此三角洲的成长是不对称的。

在图2中给出了当 $\tau = 0.9$ 和 $\epsilon = 0, 0.15, 0.25$ 时岸线所取的不同形状。当 $\epsilon = 0$ 时岸线是对称的。 ϵ 越大, 岸线的不对称性就越明显。当时间和位置不同时, 引起不对称性的 θ_1 也不同。但对于某一固定时刻, 大约在 $\xi = \pm 1.2$ 处, θ_1 取得极大值。设 $\epsilon = 0.25$ 和 $\tau = 0.9$, 则当 $\xi = \pm 1.2$ 时, $|\theta_1 / \theta_0|$ 的值大约为23%。

在图3中给出了当 $\epsilon = 0.25$ 时在不同的时刻岸线推进的例子。由图可知, 右侧岸线由于修正而推进得更快一点, 特别在 $\xi = 1.2$ 处推进得最快, 因此使右侧岸线呈现直线状。而左倾岸线由于相反的原因向下凹, 显见三角洲是非对称成长。

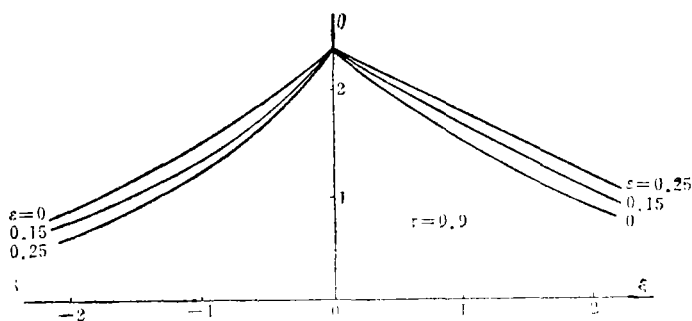


图 2

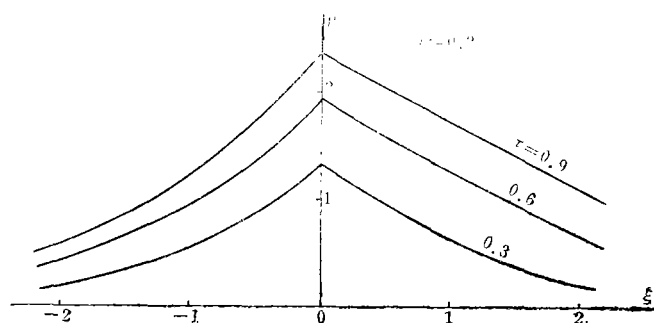


图 3

五、长江三角洲的非对称成长

我们用上述结果来定性解释长江三角洲的成长，长江三角洲主要是由长江挟带的泥沙在出口处淤积而成，但沿岸流在形成三角洲的过程中也起了一定的作用。六千年前长江的出口在镇江。据[4]说，从水下沉积物判断，长江三角洲可分为六期亚三角洲，各期亚三角洲自西向东依次退复叠置（图4）。从图4中可见，历来北岸一直要比南岸成长得快。

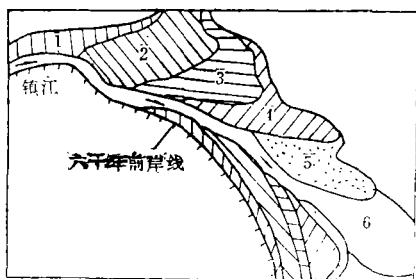


图 4

为要解释这一非对称成长的原因，我们来考察黄海和东海的沿岸流，这是因为沿岸输沙率 Q_l 随沿岸流流速增大而增大。[5]详细地描绘了这一地区在一年中每个月的沿岸流分布情况。沿着北部海岸，从北向南的沿岸流的平均流速约为0.4哩/小时 ≈ 0.2 米/秒；沿着南部海岸，虽然沿岸流在夏季因受台风影响是从南向北的，但一年中平均沿岸流仍然是从北向南的，其平均流速也大约为0.2米/秒。

因此假定历史上都是这种沿岸流的话，则利用本文的结果，可知长江三角州应该是非对称成长，即北岸要比南岸成长得快一点，所以图4所示的成长过程可以得到解释。在[6]中说到，长江口的泥沙来源主要是内陆；但口外的苏北沿岸流也能带来泥沙。在[7]中也说到，杭州湾其丰富的泥沙来源也是长江提供的。这些结论与本文的结果能定性地吻合。

当然在现在的模型中，岸线上的各微段只能沿着岸线的法线移动，实际上岸线的微段在沿岸流的作用下还能沿着切线向前移动，以致整个三角洲稍微向南略移一点，因而长江主流从镇江开始也向南偏移。

上述的解释只是对于一个复杂问题的简略分析。

参 考 文 献

- [1] Pelnard—Considère, R. Essai de theorie de evolution des formes de rivage en plages de sable et de galets, 4th Journées de l'Hydraulique, Les Energies de la Mer, Question I, Rapport No. 1 (1956).
- [2] Walton, T. L. and T. Y. Chiu, Littoral Sand Transport on Beaches, Univ. of Florida, Gainesville, Florida 32611 (1979).
- [3] 土屋義人, 安田孝志, 海浜変形の简单をモデル, 第25回海岸工学講演会论文集 (1978), 189—193.
- [4] 薛鸿超等, 《海岸动力学》, 人民交通出版社 (1980), 435.
- [5] 中国科学院海洋研究所, 《渤海东海表层海流图》 (1977).
- [6] 华东水利学院等四校, 《河流动力学》, 人民交通出版社 (1981), 191.
- [7] 上海航道局设计研究所, 科技成果汇编 (1979—1981), (1981), 68.

Asymmetrical Growing Delta

Tao Ming-de

(Fudan University, Shanghai)

Abstract

In this paper, a nonlinear partial differential equation governing a change of shoreline is derived, its solution is expanded as an asymptotic series in a small parameter. Then the Green function is obtained by means of the Fourier transform and the solution is expressed using the Green function. The results obtained show that Delta growth is asymmetrical due to sand input from river and longshore current. It is tried to explain asymmetrical growth of the Delta of the Changjiang River.