

液面的分叉与稳定性分析*

陆启韶 蒋正新

(北京航空学院, 1986年5月19日收到)

摘 要

本文讨论液体层在内聚力以及液体与外界相互作用下, 其表面形状出现的一类分叉现象. 利用分叉的基本理论, 我们得到了这类现象产生的必要条件. 接着, 我们给出了在分叉点附近的奇异摄动解. 最后, 利用极小势能原理讨论了分叉解的稳定性.

一、引 言

在物体上面的液体层, 由于液体内部的内聚力以及液体与物体之间的相互作用力, 其自由表面往往具有各种复杂的形状. 正如大家所熟知的, 水面上的油层在阳光照射下呈现五颜六色的彩色斑纹, 就是由于油层厚度的不均匀而引起的光的干涉现象. 此外, 对其它问题, 例如在化工中反应容器表面上的液层也有类似的厚度不均现象. Fusco^[1]用分叉理论研究了这种现象的一个特殊情形(这相当于本文中的 $m+n=1$ 且 $\mu=\nu$ 的特殊情形). 本文在很一般的假设条件下, 较全面地分析了液体表面形状的此类分叉现象. 我们讨论了分叉现象出现的必要条件, 利用奇异摄动法得出了在分叉点附近的分叉解, 并对其性态及稳定性进行了分析.

下面研究一层有限厚度的液体层 I, 其上方是大气, 下方是另一种液体(或固体) II (参看图1). 液层 I 的平均厚度为 h .

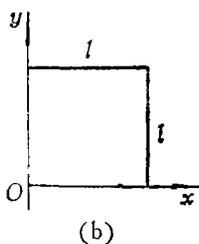
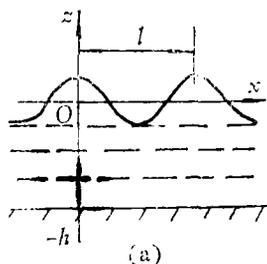


图 1

假定液体 I 是不可压缩的. 此外, 还假定液体(或固体) II 的厚度要比液层 I 的厚度大得多, 故可近似地认为液体(或固体) II 占据 $-\infty < z < -h$ 的空间部分. 液体 I 处于静止的平衡状态, 其自由表面 Σ 的方程为

$$z = \varphi(x, y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

设液面厚度是连续变化的, 即 $\varphi \in C(\mathbb{R}^2)$. 在本文中所考虑的液面呈周期性方形网格状, 即 φ 关于 x 和 y 来说都是以 l 为周期的函数. 换句话说, 若取在 xOy 平面上沿 x 轴或 y 轴平移 l 的整数倍的变换子群为 G_l , 则 φ 在群 G_l 的作用下有不变性, 这是对液面形状的对称性要求.

由于液体 I 是不可压缩的, 故应满足体积不变性条件

* 吴学谋推荐.

$$\iint_{Q_i} \varphi(\xi, \eta) d\xi d\eta = 0 \quad (1.1)$$

其中 $Q_i = [0, l] \times [0, l]$ 。流体静力学方程为

$$\nabla(\Phi - p) = 0 \quad (1.2)$$

其中 $p = p(x, y, z)$ 为 I 的压强, $\nabla\Phi$ 是作用在单位体积的液体微团上的体积力, $\Phi(x, y, z)$ 是这个力场的势函数。这里考虑的力场包括液体 I 的内聚力和液体 I 与液体 (或固体) II 的相互作用力, 它们的势函数分别为 Φ_1 和 Φ_2 , 从而 $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$ 。

设在液体 I 内分别位于点 $A(x, y, z)$ 和点 $B(\xi, \eta, \zeta)$ 的单位体积微团由于内聚力而产生的相互作用势能为 $-\alpha \exp[-\rho^2/\mu^2]$, 式中 ρ 是这两点之间的距离, 常数 $\alpha < 0$, $\mu > 0$ 依赖于液体 I 的性质。于是液体 I 内部的内聚力在点 $A(x, y, z)$ 处的势函数为

$$\Phi_1(x, y, z) = \alpha \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-h}^{\varphi(\xi, \eta)} \exp\left[-\frac{1}{\mu^2} [(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2 + (\zeta-z)^2]\right] d\xi d\eta d\xi \quad (1.3)$$

此外, I 和 II 之间的相互作用力的势函数也可类似地表示成

$$\begin{aligned} \Phi_2(x, y, z) &= \beta \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{-h} \exp\left[-\frac{1}{\nu^2} [(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2 + (\zeta-z)^2]\right] d\xi d\eta d\xi \\ &= \pi\beta\nu^2 \int_{-\infty}^{-h} \exp\left[-\frac{1}{\nu^2} (\zeta-z)^2 d\xi\right] \end{aligned} \quad (1.4)$$

式中常数 $\beta \leq 0$; $\nu > 0$ 。

由(1.2)可知, 在液体 I 内部有

$$\Phi - p = \text{const} \quad (1.5)$$

特别是在自由表面 $z = \varphi(x, y)$ 处, 由于边界条件 $p = p_0$, 此处 p_0 是大气压强, 故有

$$\begin{aligned} \alpha \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-h}^{\varphi(\xi, \eta)} \exp\left[-\frac{1}{\mu^2} [(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2 + (\zeta-\varphi(x, y))^2]\right] d\xi d\eta d\xi \\ + \pi\beta\nu^2 \int_{-\infty}^{-h} \exp\left[-\frac{1}{\nu^2} [\zeta-\varphi(x, y)]^2\right] d\xi = \text{const} \end{aligned} \quad (1.6)$$

现令

$$S_i = \{\psi \mid \psi \in C(\mathbb{R}^2), \psi \text{ 在变换子群 } G_i \text{ 下有不不变性, 且满足关系式 (1.1)}\}$$

并引进平均算子

$$M\psi = \frac{1}{l^2} \iint_{Q_i} \psi(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (1.7)$$

其中 $Q_i = [0, l] \times [0, l]$, 则非线性积分方程(1.6)可以写成抽象方程的形式

$$(I - M)F(\varphi, h, l) = 0 \quad (1.8)$$

其中 I 是恒等算子, $F(\varphi, h, l)$ 见(1.6)式的左端部分, h 和 l 是描述液面形状的两个参数。(1.8)是当液层 I 处于平衡状态时其自由表面应当满足的方程。显然, $\varphi = 0$ 是(1.8)的一个平凡解, 称之为基本状态。下面来研究(1.8)的分叉问题。

二、分叉现象出现的必要条件

设 (\bar{h}, \bar{l}) 是(1.8)的一个分叉点, 而 $\varphi(x, y; h, l)$ 是一个在该处 (\bar{h}, \bar{l}) 从基本解分出来的分叉解, 它满足 $\varphi(x, y; \bar{h}, \bar{l}) \equiv 0$ 。根据分叉问题的基本理论得知^{[2]-[4]}, 由于 F 对于 φ 是 Fréchet 可

微的, (\bar{h}, \bar{l}) 为基本状态 $\varphi=0$ 的分叉点的必要条件是 Fréchet 导数 $(I-M)F'_\varphi(0, \bar{h}, \bar{l})$ 应当是奇异的, 即 0 是 $(I-M)F'_\varphi(0, \bar{h}, \bar{l})$ 的谱点.

为了考察这个 Fréchet 导数的谱性质, 我们定义内积

$$(\psi_1, \psi_2) = \iint_{Q_l} \psi_1 \psi_2 d\xi d\eta \quad (2.1)$$

并将 S_l 按内积 (2.1) 进行完备化, 从而成为一个实 Hilbert 空间 H_l . 在 H_l 上取范数

$$\|\psi\|_{H_l} = \sqrt{(\psi, \psi)} = \left(\iint_{Q_l} |\psi|^2 d\xi d\eta \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.2)$$

将 F 的定义域延拓到 $H_l \times (0, \infty) \times (0, \infty)$ 上, 由直接计算可知, 对于 $\psi \in H_l$ 有

$$\begin{aligned} F'_\varphi(0, h, l)\psi &= \alpha \iint_{\mathbb{R}^2} \exp\left[-\frac{1}{\mu^2} [(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2]\right] \psi(\xi, \eta) d\xi d\eta \\ &\quad - \pi\alpha\mu^2(1 - \exp[-h^2/\mu^2])\psi(x, y) - \pi\beta\nu^2 \exp[-h^2/\nu^2]\psi(x, y) \\ &= (L - \gamma(h)I)\psi \end{aligned}$$

其中 L 是定义在 H_l 上的线性积分算子,

$$L\psi = \alpha \iint_{\mathbb{R}^2} \exp\left[-\frac{1}{\mu^2} [(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2]\right] \psi(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (2.3)$$

以及

$$\gamma(h) = \pi\alpha\mu^2(1 - \exp[-h^2/\mu^2]) + \pi\beta\nu^2 \exp[-h^2/\nu^2]$$

考虑到当 $\psi \in H_l$ 时, $L\psi \in S_l \subset H_l$, 故而有 $M\psi=0$ 及 $ML\psi=0$, 于是

$$(I-M)F'_\varphi(0, h, l) = (L - \gamma(h)I)\psi \quad (2.4)$$

这表明当 (\bar{h}, \bar{l}) 是基本状态的分叉点时, 其必要条件为: $\gamma(\bar{h}) \neq 0$ 应当是 L 的谱点. 下面我们来证明线性算子 L 的非零谱全部由特征值组成.

首先, 因为线性积分算子 L 的核是实对称的, 所以它是 H_l 上的自伴算子. 其次, 还可证明 L 是 H_l 上的紧算子. 由泛函分析的理论可知, 我们只需证明对于 H_l 的某个规范正交基 $\{\psi_\alpha\}$, 有下述关系式成立:

$$\|L\| = \left(\sum_\alpha \|L\psi_\alpha\|_{H_l}^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \infty$$

显然, 我们可以取

$$\{\psi_\alpha\} = \{\psi_{m,n}^{(1)}, \psi_{m,n}^{(2)}, \psi_{m,n}^{(3)}, \psi_{m,n}^{(4)}\} \quad (2.5)$$

作为 H_l 的一个规范正交基, 其中

$$\begin{aligned} \psi_{m,n}^{(1)} &= C_{m,n} \cos \frac{2\pi m}{l} x \cos \frac{2\pi n}{l} y, & \psi_{m,n}^{(2)} &= C_{m,n} \cos \frac{2\pi m}{l} x \sin \frac{2\pi n}{l} y \\ \psi_{m,n}^{(3)} &= C_{m,n} \sin \frac{2\pi m}{l} x \cos \frac{2\pi n}{l} y, & \psi_{m,n}^{(4)} &= C_{m,n} \sin \frac{2\pi m}{l} x \sin \frac{2\pi n}{l} y \end{aligned}$$

这里的 m, n 取满足 $m+n \geq 1$ 的非负整数, 系数

$$C_{m,n} = \begin{cases} \sqrt{2}/l & (\text{若 } m, n \text{ 之中某个为零}) \\ 2/l & (\text{若 } m, n \neq 0) \end{cases}$$

先计算

$$\|L\psi_{m,n}^{(1)}\|_{H_l}^2 = \int_0^l \int_0^l |L\psi_{m,n}^{(1)}|^2 dx dy$$

其中

$$\begin{aligned} \left\| L\psi_{m,n}^{(1)} \right\| = |\alpha| \left\| C_{m,n} \right\| & \left| \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{1}{\mu^2}(\xi-x)^2\right] \cos \frac{2\pi m}{l} \xi d\xi \right| \\ & \cdot \left| \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{1}{\mu^2}(\eta-y)^2\right] \cos \frac{2\pi n}{l} \eta d\eta \right| \end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned} & \left| \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{1}{\mu^2}(\xi-x)^2\right] \cos \frac{2\pi m}{l} \xi d\xi \right| \\ &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-\xi^2/\mu^2] \cos \frac{2\pi m}{l} (\xi+x) d\xi \right| \\ &= \left| \cos \frac{2\pi m}{l} x \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-\xi^2/\mu^2] \cos \frac{2\pi m}{l} \xi d\xi \right. \\ & \quad \left. - \sin \frac{2\pi m}{l} x \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-\xi^2/\mu^2] \sin \frac{2\pi m}{l} \xi d\xi \right| \\ &\leq \left| \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-\xi^2/\mu^2] \cos \frac{2\pi m}{l} \xi d\xi \right| = \sqrt{\pi} \mu \exp[-(\pi\mu m/l)^2] \end{aligned}$$

同理可证

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{1}{\mu^2}(\eta-y)^2\right] \cos \frac{2\pi n}{l} \xi d\xi \right| \leq \sqrt{\pi} \mu \exp\left[-\left(\frac{\pi\mu n}{l}\right)^2\right]$$

因此有

$$\left\| L\psi_{m,n}^{(1)} \right\|_{H_l}^2 \leq 4\pi^2 \alpha^2 \mu^4 \exp\left[-2\left(\frac{\pi\mu}{l}\right)^2 (m^2+n^2)\right]$$

关于 $\left\| L\psi_{m,n}^{(2)} \right\|_{H_l}^2$, $\left\| L\psi_{m,n}^{(3)} \right\|_{H_l}^2$, $\left\| L\psi_{m,n}^{(4)} \right\|_{H_l}^2$ 也有类似的估计式, 于是便得到

$$\|L\|^2 \leq 16\pi^2 \alpha^2 \mu^4 \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left[-2\left(\frac{\pi\mu}{l}\right)^2 (m^2+n^2)\right] < \infty$$

从而证明了 L 是 H_l 上的紧算子。

由于 L 是 H_l 上的自伴紧算子, 故 L 的非零谱就是其全部非零实特征值之集合。直接计算表明, L 的特征函数系正是(2.5), 它们对应的特征值是

$$\lambda_{m,n} = \pi \alpha \mu^2 \exp\left[-\left(\frac{\pi\mu}{l}\right)^2 (m^2+n^2)\right] \quad (m,n \text{ 是满足 } m+n \geq 1 \text{ 的非负整数}) \quad (2.6)$$

事实上, 例如

$$\begin{aligned} L\psi_{m,n}^{(1)} = \alpha C_{m,n} & \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{1}{\mu^2}(\xi-x)^2\right] \cos \frac{2\pi m}{l} \xi d\xi \\ & \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{1}{\mu^2}(\eta-y)^2\right] \cos \frac{2\pi n}{l} \eta d\eta \end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{1}{\mu^2}(\xi-x)^2\right] \cos \frac{2\pi m}{l} \xi d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-\xi^2/\mu^2] \cos \frac{2\pi m}{l} (\xi+x) d\xi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \cos \cdot \frac{2\pi m}{l} x \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-\xi^2/\mu^2] \cos \frac{2\pi m}{l} \xi d\xi \\
&\quad - \sin \cdot \frac{2\pi m}{l} x \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-\xi^2/\mu^2] \sin \frac{2\pi m}{l} \xi d\xi \\
&= \sqrt{\pi} \mu \exp[-\pi^2 \mu^2 m^2 / l^2] \cos(2\pi m/l) x
\end{aligned}$$

同理可推出

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{1}{\mu^2} (\eta-y)^2\right] \cos \frac{2\pi n}{l} \eta d\eta = \sqrt{\pi} \mu \exp\left[-\frac{\pi^2 \mu^2 n^2}{l^2}\right] \cos \frac{2\pi n}{l} y$$

于是有

$$L\psi_{m,n}^{(1)} = \lambda_{m,n} \psi_{m,n}^{(1)}$$

关于 $\psi_{m,n}^{(2)}$, $\psi_{m,n}^{(3)}$, $\psi_{m,n}^{(4)}$ 也有类似的结果。显然, 当 $m \neq n$ 且 $m, n \neq 0$ 时, $\lambda_{m,n}$ 是 L 的四重特征值, 它对应四个规范化的特征函数: $\psi_{m,n}^{(1)}$, $\psi_{m,n}^{(2)}$, $\psi_{m,n}^{(3)}$, $\psi_{m,n}^{(4)}$ 。当 $m = n \neq 0$ 时, $\lambda_{m,n}$ 是 L 的三重特征值, 其所对应的三个规范化的特征函数为: $\psi_{m,m}^{(1)}$, $\psi_{m,m}^{(2)} = \psi_{m,m}^{(3)}$, $\psi_{m,m}^{(4)}$ 。当 m, n 之中某个为零时, $\lambda_{m,n}$ 是 L 的二重特征值。

(\bar{h}, \bar{l}) 是方程(1.8)的分叉点的必要条件是: 对于某组 (m, n) ($m+n \geq 1$)有

$$\lambda_{m,n}(\bar{l}) = \gamma(\bar{h}) \quad (2.7)$$

成立, 即

$$\pi \alpha \mu^2 \exp\left[-\left(\frac{\pi \mu}{\bar{l}}\right)^2 (m^2 + n^2)\right] = \gamma(\bar{h})$$

于是当分叉出现时, \bar{l} 与 \bar{h} 之间必须满足下面的关系式:

$$\bar{l} = \pi \mu \sqrt{m^2 + n^2} \left(\ln \frac{\pi \alpha \mu^2}{\gamma(\bar{h})}\right)^{-\frac{1}{2}} \equiv l_{m,n}(\bar{h}) \quad (2.8)$$

注意到在 $\alpha < 0$, $\beta \leq 0$ 的条件下, $\gamma(\bar{h})$ 总是小于零的, 故(2.8)式只有当 \bar{h} 使得

$$\gamma(\bar{h}) > \pi \alpha \mu^2 \quad (2.9)$$

成立时方有意义。我们利用(2.9), 便得到可能出现分叉现象的参数 h 的范围。

当 $\alpha < 0$, $\beta = 0$ 时, (2.9)对于 $0 < \bar{h} < \infty$ 都是有意义的, 从而有可能出现具有在变换子群 $G_{\bar{l}}$ (\bar{l} 由(2.8)给出)下的不变性的分叉现象 (见图2(a))。

至于 $\alpha < 0$, $\beta < 0$ 时, 利用 $\gamma(\bar{h})$ 的表达式, 便可以将(2.9)写成

$$\ln \frac{\alpha \mu^2}{\beta v^2} > \left(\frac{1}{\mu^2} - \frac{1}{v^2}\right) \bar{h}^2 \quad (2.10)$$

并根据参数 α , β , μ , v 的不同数值分为几种情形讨论:

(1) $\mu < v$ 的情形

(i) 如果 $|\alpha| \mu^2 > |\beta| v^2$, 则(2.10)等价于 $\bar{h} < h_0$, 其中临界值

$$h_0 = \sqrt{\frac{\ln(\alpha \mu^2 / \beta v^2)}{\mu^{-2} - v^{-2}}} \quad (2.11)$$

这表明只有当 $\bar{h} < h_0$ 时, 分叉现象才能出现 (见图2(b))。

(ii) 如果 $|\alpha| \mu^2 \leq |\beta| v^2$, 则(2.10)对于任何 \bar{h} 都不成立, 即分叉现象不会出现。

(2) $\mu > v$ 的情形

(i) 如果 $|\alpha| \mu^2 > |\beta| v^2$, 则(2.10)对于任何 $0 < \bar{h} < \infty$ 都成立, 分叉现象都可能出现 (见图2(c)或(d))。

(ii) 如果 $|\alpha|\mu^2 \leq |\beta|\nu^2$, 则(2.10)等价于 $\bar{h} > h_c$, 其中 h_c 仍由(2.11)给出, 此时只有当 $\bar{h} > h_c$, 分叉现象才能出现 (见图2(e)).

(3) $\mu = \nu$ 的情形

此时(2.9)等价于 $1 - (\beta/\alpha) > 0$, 由此可见:

(i) 如果 $|\alpha| > |\beta|$, 该条件对于任何 $0 < \bar{h} < \infty$ 都成立, 分叉现象都可能出现 (见图2(f)).

(ii) 如果 $|\alpha| \leq |\beta|$, 该条件不成立, 分叉现象不会出现.

图2根据(2.8)以及对分叉的必要条件(2.9)的分析, 给出了在分叉现象中可能出现的各种情形的 \bar{h} 的范围, 以及 \bar{l} 与 \bar{h} 的关系. 在图2中的曲线只是对给定的某个 $m^2 + n^2$ 数值 (即给定的 (m, n) 分叉模式) 画出的. 显然, 对于某个可能发生分叉现象的液层厚度 \bar{h} , 当 (m, n) 取不同数值时, 在(2.8)中的网格周期 $l_{m, n}(\bar{h})$ 将取不同的数值. 这说明同一个 \bar{h} 可以对对应无穷多种分叉状态. 因此在观察自由液面的分叉现象时, 可以发现各种各样的复杂的形状.

由于 α 和 $\gamma(\bar{h})$ 都是负的, (2.8)表明 $l_{m, n}(\bar{h})$ 的增减性应当与 $\gamma(\bar{h})$ 相反, 从而 $\bar{l}(\bar{h})$ 曲线的极小 (极大) 值点 (如果存在的话) 是 $\gamma(\bar{h})$ 的极大 (极小) 值点. 通过计算得知

$$\frac{d\gamma(\bar{h})}{d\bar{h}} = 2\pi\alpha\bar{h}\exp[-\bar{h}^2/\mu^2]\left(1 - \frac{\beta}{\alpha}\sigma\right)$$

其中 $\sigma = \exp\left[\left(\frac{1}{\mu^2} - \frac{1}{\nu^2}\right)\bar{h}^2\right]$. 利用上式和前面得到的分叉必要条件, 可知只有当 $1 - (\beta/\alpha)\sigma$

有零点时, 即当 $\mu > \nu$, $|\alpha| < |\beta|$ 或 $\mu < \nu$, $|\alpha| > |\beta|$ 时, $\gamma(\bar{h})$ 才可能有极值点 h^* :

$$h^* = \left(\frac{\ln(\alpha/\beta)}{\mu^{-2} - \nu^{-2}}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.12)$$

还可以见到, 当 h^* 存在时, 总有 $h^* > h_c$. 将这里的结论与上面关于分叉必要条件的结果综合起来考虑, 可以得知在图2(a), (b), (d), (f) 的各种情形中, 极值点 h^* 不存在, 且 \bar{l} 随 \bar{h} 单调增加. 而在图(c), (e) 的情形中, $\bar{l}(\bar{h})$ 曲线都有极小值点 h^* , 当 $\bar{h} < h^*$ 时, \bar{l} 随 \bar{h} 单调减少, 而当 $\bar{h} > h^*$ 时则单调增加.

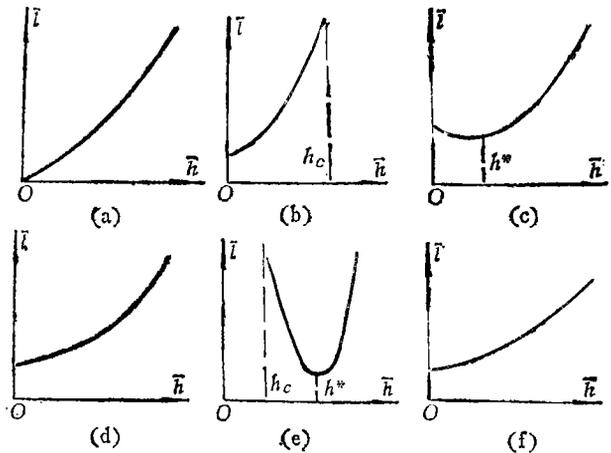


图2 在 (m, n) 分叉模式中 \bar{l} 与 \bar{h} 的关系

三、用摄动法求分叉解

我们研究方程(1.8)的解. 它有一个基本解 $\varphi = 0$. 现在设 \bar{h} 满足分叉的必要条件(2.9), 给定一组 (m, n) 数值 ($m + n \geq 1$), 并按(2.8)得出 $\bar{l} = l_{m, n}(\bar{h})$. 下面研究在 (\bar{h}, \bar{l}) 处从基本解分出去的分叉解 $\varphi(x, y; h, l)$ 的存在性. 下面可以看出, 在一般情况下 (\bar{h}, \bar{l}) 是分叉点, 即在 (\bar{h}, \bar{l}) 附近, 存在(1.8)的非平凡解 $\varphi(x, y; h, l) \in S_l$, 且当 $h \rightarrow \bar{h}, l \rightarrow \bar{l}$ 时, $\varphi \rightarrow 0$. 为方便起见, 先固定 $l = \bar{l}$, 只让参数 h 变化, 来研究分叉解的性态. 适当选取小参数 ε 后, 将解 $\varphi(x, y; h, \bar{l})$ 和液层 I 厚度 h

在 $\varepsilon=0$ 的某个邻域内展成 ε 的幂级数:

$$\varphi = \varphi_0 + \varepsilon\varphi_1 + \varepsilon^2\varphi_2 + \dots, \quad h = h_0 + \varepsilon h_1 + \varepsilon^2 h_2 + \dots \quad (3.1)$$

式中 $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots \in S_{\bar{i}}$. φ 是在 $h = \bar{h}$ 处的分叉解, 应有 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时, $\varphi \rightarrow 0$, $h \rightarrow \bar{h}$, 于是便得到 $\varphi_0 = 0$, $h_0 = \bar{h}$.

把(3.1)代入(1.8), 并将其左端在 $\varepsilon=0$ 处展成 ε 的幂级数. 令含 ε^n ($n=1, 2, \dots$) 的项的系数等于零, 便可得到各阶近似的方程, 然后分别求解.

经过整理后, 一阶方程是

$$L\varphi_1 - \gamma(\bar{h})\varphi_1 = f_1$$

其中

$$f_1 = \pi(\beta v^2 \exp[-\bar{h}^2/v^2] - \alpha \mu^2 \exp[-\bar{h}^2/\mu^2])h_1 \quad (3.2)$$

考虑到对于 (m, n) 分叉模式的必要条件(2.7), 一阶方程可写成

$$L\varphi_1 - \lambda_{m, n}\varphi_1 = f_1 \quad (3.3)$$

若 $\lambda_{m, n}$ 是 L 的 r 重特征值 (当 $m \neq n$ 且 $m, n \neq 0$ 时, $r=4$; 当 $m=n \neq 0$ 时, $r=3$; 而当 $m \cdot n=0$ 时, $r=2$), 相应的规范正交特征函数记为 ψ_1, \dots, ψ_r . 此外, 对任何 $g \in S_{\bar{i}}$, 记

$$[g]_k = (g, \psi_k) \quad (k=1, \dots, r) \quad (3.4)$$

由于我们研究的是(3.3)的解 $\varphi_1 \in S_{\bar{i}}$, 并考虑到 $L: H_{\bar{i}} \rightarrow S_{\bar{i}}$, 此时有 $L\varphi_1 \in S_{\bar{i}}$, 从而 $f_1 \in S_{\bar{i}}$. 因此 f_1 应当满足不可压缩性条件(1.1), 即

$$\iint_{Q_{\bar{i}}} f_1 d\xi d\eta = 0$$

由(3.2)可以得出

$$h_1 = 0 \quad (3.5)$$

于是一阶方程成为

$$L\varphi_1 - \lambda_{m, n}\varphi_1 = 0$$

显然它的解是

$$\varphi_1 = \sum_{k=1}^r C_k \psi_k \quad (3.6)$$

如果要求 φ_1 规范化, 则 C_k 应满足规范化条件

$$\|\varphi_1\|_{H_{\bar{i}}} = \sum_{k=1}^r C_k^2 = 1$$

再看二阶方程. 直接计算并整理之后可得

$$L\varphi_2 - \lambda_{m, n}\varphi_2 = f_2 \quad (3.7)$$

其中

$$\begin{aligned} f_2 = & -\pi\alpha\mu^2 \exp[-\bar{h}^2/\mu^2]h_2 + \pi\beta v^2 \exp[-\bar{h}^2/v^2]h_2 + 2\pi\alpha\bar{h} \exp[-\bar{h}^2/\mu^2]\varphi_1^2 \\ & - 2\pi\beta \exp[-\bar{h}^2/v^2]\bar{h}\varphi_1^2 \end{aligned} \quad (3.8)$$

和讨论一阶近似时 ($f_1 \in S_{\bar{i}}$) 一样, 为了使解 $\varphi_2 \in S_{\bar{i}}$, 由(3.7)得知 $f_2 \in S_{\bar{i}}$. 因此 f_2 应满足

$$\iint_{Q_{\bar{i}}} f_2(\xi, \eta) d\xi d\eta = 0$$

积分后便得到

$$\begin{aligned} & \pi h_2 \bar{l}^2 (\beta v^2 \exp[-\bar{h}^2/v^2] - \alpha \mu^2 \exp[-\bar{h}^2/\mu^2]) \\ & + 2\pi \bar{h} (\alpha \exp[-\bar{h}^2/\mu^2] - \beta \exp[-\bar{h}^2/v^2]) \iint_{Q_{\bar{i}}} \varphi_1^2(\xi, \eta) d\xi d\eta = 0 \end{aligned}$$

设 φ_1 已经规范化, 则有

$$h_2 = -\frac{2\bar{h}}{\mu^2 \bar{l}^2} \left(1 - \frac{\beta}{\alpha} \sigma\right) / \left(1 - \frac{\beta v^2}{\alpha \mu^2} \sigma\right) \quad (3.9)$$

其中 $\sigma = \exp[(\mu^{-2} - v^{-2})\bar{h}^2]$. 再研究(3.7)的可解性. 根据 Fredholm 关于线性积分方程的理论, (3.7)可解的充分必要条件是

$$[f_2]_k = 0 \quad (k=1, \dots, r) \quad (3.10)$$

把(3.9)代入(3.8)中, 并注意 $[1]_k = 0$, $[\varphi_1]_k = 0 (k=1, \dots, r)$, 所以(3.10)总是成立的, 即可由(3.7)解出 $\varphi_2 \in S_i$. 它可以写为

$$\varphi_2 = \bar{\varphi}_2 + \varphi_2^*$$

其中 $\bar{\varphi}_2$ 是对应的齐次方程的通解:

$$\bar{\varphi}_2 = \sum_{k=1}^r e_k \psi_k$$

而 φ_2^* 是(3.7)的一个特解, 可以取

$$\varphi_2^* = \sum_{p,q} \sum_{i=1}^{r_{p,q}} (\lambda_{m,n} - \lambda_{p,q})^{-1} (f_2, \psi_{p,q}^{(i)}) \psi_{p,q}^{(i)} \quad (3.11)$$

其中 \sum' 表示对异于模式 (m,n) 的其它模式 (p,q) 求和, $r_{p,q}$ 是特征值 $\lambda_{p,q}$ 对应的特征子空间的维数, $\{\psi_{p,q}^{(i)}\}$ 为该特征子空间的一个规范正交基.

于是直到二阶近似的摄动分叉解为

$$\varphi = \varphi_0 + \varepsilon \varphi_1 + \varepsilon^2 \varphi_2 + \dots = \varepsilon \left(\sum_{k=1}^r C_k \psi_k \right) + \varepsilon^2 (\bar{\varphi}_2 + \varphi_2^*) + \dots \quad (3.12)$$

可见在 (\bar{h}, \bar{l}) 处从基本解分出去的分叉解 φ 是存在的, 而且它以 (m,n) 模式的特征函数为其主部. 由于参数 h 的直到二阶近似的展开式为

$$h = h_0 + \varepsilon h_1 + \varepsilon^2 h_2 + \dots$$

即

$$h - \bar{h} = \frac{2\bar{h}}{\bar{l}^2 \mu^2} \left(1 - \frac{\beta}{\alpha} \sigma\right) \varepsilon^2 / \left(1 - \frac{\beta v^2}{\alpha \mu^2} \sigma\right) + \dots \quad (3.13)$$

其中

$$\sigma = \exp \left[\left(-\frac{1}{\mu^2} - \frac{1}{v^2} \right) \bar{h}^2 \right]$$

由(2.9)可以推知, 当 $\alpha < 0$, $\beta \leq 0$ 时, 对一切 $\bar{h} > 0$ 总有

$$1 - \frac{\beta v^2}{\alpha \mu^2} \sigma > 0$$

于是 $(h - \bar{h})$ 的符号仅取决于 $(1 - (\beta/\alpha)\sigma)$ 的符号. 由此可见 (注意: 我们是在 $l = \bar{l}$, 而只让 h 变化的前提下讨论的):

(1) 当 $1 - (\beta/\alpha)\sigma > 0$ 时, 如果 $|\varepsilon|$ 很小, $h - \bar{h} > 0$, 这表明对 h 来说此时有超临界分叉发生 (见图3(a)).

(2) 当 $1 - (\beta/\alpha)\sigma < 0$ 时, 如果 $|\varepsilon|$ 很小, $h - \bar{h} < 0$, 这表明对 h 来说此时有亚临界分叉发生 (见图3(b)).

(3) 当 $1 - (\beta/\alpha)\sigma = 0$ 时, 利用二阶近似结果不足以判定分叉的方向, 需借助高阶近似

才能进行研究。

考虑到我们的分叉问题实际上包含两个参数 h 和 l ，所以应当把图 2 和图 3 的结果拼合起来，用图 4 上的分叉曲面进行描述。可以看到有两种类型的分叉曲面。由上一节末尾可知，如果 \bar{l} 随 \bar{h} 单调增加，由于 $1 - (\beta/\alpha)\sigma > 0$ ，故只有超临界分叉（对 h 来说）出现，见图 4(a)。而当 $\bar{l}(\bar{h})$ 曲线有极小值时，如果 $\bar{h} < h^*$ ，此时 $1 - (\beta/\alpha)\sigma < 0$ ，故有亚临界分叉（对 h 来说）出现，如果 $\bar{h} > h^*$ ，此时 $1 - (\beta/\alpha)\sigma > 0$ ，则有超临界分叉（对 h 来说）出现，见图 4(b)。

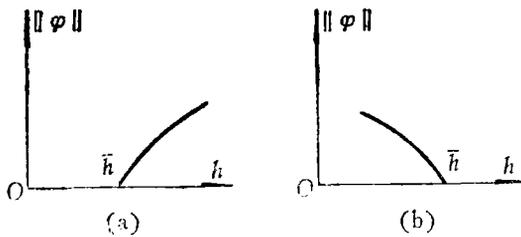


图3 在 $l = \bar{l}$ 时的分叉情况（模式 (m, n) 给定）

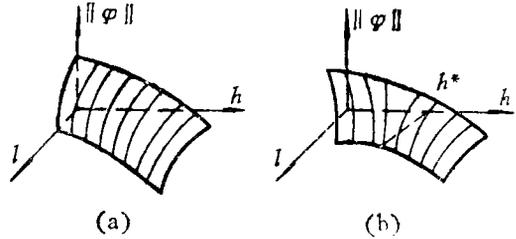


图4 (m, n) 分叉模式的分叉曲面

四、稳定性分析

我们可以用分叉理论^{[3], [6], [9]}对基本状态和分叉状态的稳定性进行一般的分析。为简单起见，在这里讨论只有内聚力的情形，即 $\alpha < 0$ ， $\beta = 0$ 的情形，并用极小势能原理进行分析。

显然， Q_1 上的液层 I 的总势能为（见(1.3)）

$$V = - \int_0^l \int_0^l \int_{-h}^{\varphi(x,y)} \Phi_1(x, y, z) dz dy dx$$

假设液层 I 处于静平衡状态，即 $\varphi(x, y) \in S_l$ 要满足方程(1.8)。还假设参数 (h, l) 在分叉点 (\bar{h}, \bar{l}) 附近， $\bar{l} = l_{m, n}(\bar{h})$ 。由前面的讨论可知，此时满足(1.8)的平衡状态除了基本状态 $\varphi = 0$ 之外，还有分叉状态(3.12)。

对于基本状态 $\varphi = 0$ ，由任意 $\delta\varphi \in S_l$ 引起的势能的一阶变分的计算结果为

$$\begin{aligned} \delta V|_{\varphi=0} &= - \int_0^l \int_0^l F(0, h, l) \delta\varphi(x, y) dx dy \\ &\quad - \int_0^l \int_0^l \int_{-h}^0 \exp[-z^2/\mu^2] (L\delta\varphi)(x, y) dz dx dy \end{aligned} \quad (4.1)$$

注意到 $\delta\varphi \in S_l$ 及 $L\delta\varphi \in S_l$ ，于是可知 $\delta V|_{\varphi=0} = 0$ ，即 $\varphi = 0$ 是势能的驻定状态。对于(3.12)的分叉状态，同样也有 $\delta V = 0$ 成立。

为了研究平衡状态的稳定性，进一步考虑势能的二阶变分。经过计算并整理之后，有

$$\begin{aligned} \delta^2 V|_{\varphi=0} &= -(\delta\varphi, F'_\varphi(0, h, l)\delta\varphi) - (\delta\varphi, L\delta\varphi) \\ &\quad - (\exp[-h^2/\mu^2] - 1)(1, L(\delta\varphi)^2) \end{aligned} \quad (4.2)$$

我们想把基本状态和分叉状态的势能作比较，故取由(3.12)给出的分叉解作为 $\delta\varphi$ ，其主部是 (m, n) 模式的特征函数 φ_1 。若取到一阶近似，即取 $\delta\varphi = \varepsilon\varphi_1$ 时，由计算得出

$$\delta^2 V|_{\varphi=0} = -2\varepsilon^2 [\lambda_{m, n}(l) - \gamma(h)] \quad (4.3)$$

也就是说，分叉状态(3.12)的势能 V_δ 与基本状态的势能 V_0 之差（直到二阶近似）为

$$V_\delta - V_0 = -2\varepsilon^2 [\lambda_{m, n}(l) - \gamma(h)]$$

当 $h = \bar{h}$ ， $l = \bar{l}$ 时，由(2.7)可知有 $V_\delta = V_0$ 。而由前面讨论可知，在 $\alpha < 0$ ， $\beta = 0$ 的情形下，若

保持 $l = \bar{l} = l_{m,n}(\bar{h})$ 不变, 此时只有对 h 的超临界分叉出现 (见图4(a)), 为此只研究在 $h > \bar{h}$ 时的分叉状态(3.12)。由于 $\nu(h)$ 是 h 的减函数, 因此当 $h > \bar{h}$, $l = \bar{l}$ 时, 有 $V_b < V_0$ 。

通过上面对分叉状态和基本状态的势能的比较, 利用极小势能原理可以得到下面的稳定性结论: 在保持 $l = \bar{l} = l_{m,n}(\bar{h})$ 下, 当 h 增大并通过 \bar{h} 时, 基本状态将变为不稳定; 而与此同时, 由 (\bar{h}, \bar{l}) 处分出的超临界分叉状态(3.12)则是稳定的 (见图5(a))。

对于 $\alpha < 0$, $\beta < 0$ 的其它情形, 亦可类似地进行分析。可以发现, 超临界分叉是稳定的 (图5(a)), 而亚临界分叉是不稳定的 (图5(b)), 这表明稳定性交换原理是成立的。

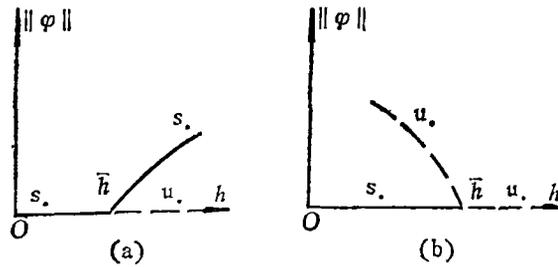


图 5 在 $l = \bar{l}$ 时的稳定性分析

参 考 文 献

- [1] Fusco, G., An example of bifurcation in hydrostatics, *Nonlinear Differential Equations: Invariance, Stability, and Bifurcation*, ed. by P. de Mottoni and L. Salvadori, Academic Press (1981), 145—159.
- [2] Crandall, M. G. and P. H. Rabinowitz, Bifurcation from simple eigenvalues, *J. Funct. Anal.*, 8 (1971), 321—340.
- [3] Sattinger, D. H., *Topics in Stability and Bifurcation Theory*, Springer-Verlag (1976).
- [4] Chow S. N. and J. K. Hale, *Methods of Bifurcation Theory*, Springer-Verlag (1982).
- [5] Crandall, M. G. and P. H. Rabinowitz, Bifurcation, perturbation of simple eigenvalues, and linearized stability, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 52 (1973), 161—180.
- [6] Weinberger, H. F., On the stability of bifurcating solutions, *Nonlinear Analysis*, ed. by L. Cesari et al., Academic Press (1978), 219—233.

Bifurcation and Stability Analysis for Liquid Surfaces

Lu Qi-shao Jiang Zheng-xin

(Beijing Institute of Aeronautics and Astronautics, Beijing)

Abstract

A more comprehensive discussion on the bifurcation problems for the shape of liquid surfaces is made in this paper. The necessary conditions for bifurcation are given, and the bifurcating solutions near bifurcation points can be obtained by perturbation technique. Finally the stability of the bifurcating states is analyzed by means of the principle of minimum potential energy.