应用数学和力学，第8卷第8期(1987年8月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

浑沌与怪引子的某些泛系研究*

朱 遂 才

(武汉数字工程研究所，1986年7月5日收到)

摘 要

文[1]讨论了泛浑沌及泛怪引子与泛系算子$\varepsilon_7(g)$之间的联系．文[2]讨论了不动泛系定理在这些典型的非线性问题研究中的应用．本文首先给出了增关系、极大泛浑沌等几个概念，讨论了它们之间的关系；本文还讨论了g的泛浑沌与它的传递包的泛浑沌的关系以及在一定条件下两个增关系的泛浑沌相同的条件．

泛系理论为泛系关系建立了许多数学模型并研究了它们的性质与转化关系，它们本质上是非线性的。我们知道，非线性的本质特征是不可预见性。在非线性系统中，出现了类随机的现象（如浑沌现象）．非线性还有以下属性：叠加原理失效导致对称的原因可不产生对称的结果；奇异性，即许多非线性系统自身具有光滑的系数然而它的解却出现奇异性；对参数的敏感依赖性，即某些含参数的非线性系统的解的结构及性质随参数的微小变化而急剧变化；解的非唯一性导致解的分叉的产生，等等。我们把事物、知识、信息、结构改造为泛系异同关系、泛序关系或模拟关系，从而利用泛系算子来补充、推广或发展古典非线性分析中的许多重要的研究。如泛系理论推广了分叉问题研究中用得极多的隐函数定理[1,3,4]，可用此结论来分析因果、泛环境与广义生态、观控等重要关系。吴学谋在文[1]中建立了浑沌、怪引子的泛系模型，给出了泛浑沌及泛怪引子与泛系算子$\varepsilon_7(g)$之间的关系，从而将对泛浑沌及泛怪引子的讨论化为对泛系算子及其区组聚类分划的一些研究。文[2]将泛浑沌及泛怪引子与不动泛系定理结合起来，讨论了不动泛系定理在这些典型的非线性问题中的应用。

本文首先介绍一些定义与记号。

设G为一集合，$g\in P(G^2)$，$D\subset G$。

$$\varepsilon_1(g)=(g\cup g^{-1})\cup I,\quad \varepsilon_2(g)=\varepsilon_1(g\cap g^{-1})$$
$$\varepsilon_3(g)=\varepsilon_1(g^t\cap g^{-t}),\quad \varepsilon_{i+5}(g)=\varepsilon_i(G^2-g)$$

其中$I=I(G)=\{(x,x)\,|\,x\in G\}$，$g^t$表示$g$之传递包，$E_s[G)$表示$G$中半等价关系类，文中未加定义的符号可参见[1,3]。

定义1 设G为一偏序集，设$g\in P(G^2)$，若$g\cap I\neq I$，$\forall(x,y)\in g$，有$x<y$，则g称为增关系。$RI\triangleq\{g\,|\,g$为G的增关系$\}$。其中“$<$”为G上的序。

定义2 设D为g之泛浑沌，若$\forall D'\supset D(D'\neq D)$，有$(D')^2\cap g\neq\phi$，则称$D$为$g$之极大泛

---

* 吴学谋推荐．

浑沌.

定义3 $G(g)\triangleq\{D|D$为g之泛浑沌$\}$.

$G^*(g)\triangleq\{D|D$为g之极大泛浑沌$\}$.

显然，对任给$\forall g\in P(G^2)$，有$G^*(g)\subseteq G(g)$.

定理1 设G为一偏序集$g\cap I\neq I$，且$\bar{g}^{(2)}\subseteq\bar{g}$. 则对$g$必有极大泛浑沌$D$存在，且$D\subseteq G(d\varepsilon_7(g))$；若$g\cap I=\phi$，则$\forall D\subseteq G(d\varepsilon_7(g))$，$D$为$g$之极大泛浑沌.

证明 因为$g\cap I\neq I$，故存在x，使得$x\in G-(g\cap I)\circ G$. 则必有$\{(x,x)\}\cap g=\phi$. 故g有泛浑沌存在.

设$x\in D_1$，$D_1\subset G(d\varepsilon_7(g))$，则必有$D_1^2\cap g=\phi$. 若不然，由$D_1^2\subseteq\varepsilon_7(g)=(\bar{g}\cap\bar{g}^{-1})\cup I$，知存在$x_1\in D_1$，使得

$$(x_1,x_1)\in I,\ (x_1,x_1)\bar{\in}\bar{g}\cap\bar{g}^{-1}$$

而(x_1,x)，$(x,x_1)\in\bar{g}\cap\bar{g}^{-1}$，从而$(x_1,x_1)\in\bar{g}^{(2)}\cap(\bar{g}^{(2)})^{-1}\subseteq\bar{g}\cap\bar{g}^{-1}$. 矛盾. 故$g$有极大泛浑沌存在.

若$g\cap I=\phi$，由上述证明知$G-(g\cap I)\circ G=G$，从而对每个元素$x\in G$，若$D_1\ni x$，$D_1\subseteq G(d\varepsilon_7(g))$，即有$D_1$为$g$之极大泛浑沌.

由上述证明，我们可得下述推论：

推论1 设G为一偏序集，$\bar{g}\in T[G)$. 设$G=\bigcup G_i(d\varepsilon_7(g))$，则对$\forall G_i\subset G(d\varepsilon_7(g))$，若有$x\in G-(g\cap I)\circ G$，使得$x\in G_i$，则$G_i$为$g$之极大泛浑沌.

定理2 设G为一偏序集，若$g\in RI(G)$，D为g之极大泛浑沌，且满足条件

H) $\forall(x,y)\in D^2$，对$\forall(x,z)\in g$，有$y<z$. 则有

i) $\exists D_i$为$g^{(i)}$之极大泛浑沌，使得$D\subset D_i$.

ii) D为$\bigcup\limits_{i=1}^{n}g^{(i)}$及$g^t$之极大泛浑沌.

iii) g^t的极大泛浑沌为g之泛浑沌，即

$$G^*(g^t)\subset G(g)$$

证明 对$i=n$，若存在$(x,y)\in D^2$，有$(x,y)\in g^{(n)}$，则有$y_1,y_2,\cdots,y_{n-1}\in G$，使得$(x,y_1)\in g$，$(y_1,y_2)\in g$，$\cdots$，$(y_{n-2},y_{n-1})\in g$，$(y_{n-1},y)\in g$. 而由$g\in RI(G)$，有$x<y_1<y_2<\cdots<y_{n-2}<y_{n-1}<y$. 由定理条件知，$y<y_1$，从而$y=y_1=y_2=\cdots=y_{n-1}$，于是有$(x,y)\in g$，与$D$为$g$之极大泛浑沌矛盾. 故$D^2\cap g^{(n)}=\phi$. 从而$D$必包含在$g^{(n)}$的某个极大泛浑沌之中.

我们可证D还是$\bigcup\limits_{i=1}^{n}g^{(i)}$ $(n=1,2,\cdots)$及g^t的极大泛浑沌. 由i)知D是$g^{(i)}(i=1,2,\cdots)$的泛浑沌，若存在$D_1\supset D$，且$D_1-D\neq\phi$，D_1为$\bigcup\limits_{i=1}^{n}g^{(i)}$或$g^t$之极大泛浑沌，则$D_1^2\cap(\bigcup\limits_{i=1}^{n}g^{(i)})=\phi$或$D_1^2\cap\left(\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty}g^{(n)}\right)=\phi$，从而$D_1^2\cap g=\phi$，与$D$为$g$之极大泛浑沌矛盾. 故ii)成立. 若$D$是$g^t$或$\bigcup\limits_{i=1}^{n}g^{(i)}$之极大泛浑沌，则由$D^2\cap g^t=\phi$或$D^2\cap\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n}g^{(i)}\right)=\phi$，得$D^2\cap g=\phi$，知iii)成立.

从定理的证明中，我们可发现

定理3 G同上定理，$g\in RI(G)\cap T[G)$，则

$$G^*(g^{(i)})\subset G(g^{(i+1)})$$

我们容易看出，对任意的$g_1,g_2\subset G^2$，若有$g_1\subset g_2$，则$G^*(g_2)\subset G(g_1)$。但在什么样的条件有$G^*(g_1)=G^*(g_2)$成立？下述定理给出了部分答案。

定理4　设G同上，若$g_i\cap I=\phi$，$i=1,2$。则$G^*(g_1)=G^*(g_2)$的充要条件是$g_1=g_2$，其中$g_i\in RI(G)$，$i=1,2$。

证明　若$g_1=g_2$，显然$G^*(g_1)=G^*(g_2)$。

设$G^*(g_1)=G^*(G_2)$，由文[1]中的定理5知，若$D\in G^*(g_i)$，则$D^2\subset\varepsilon_7(g_i)$。由定理1知，对任给的$D_j\subseteq G(\varepsilon_7(g_i))$，有$D_j$为$g_i$的极大泛浑沌。

又由$g_i\cap I=\phi$，$g_i\in RI(G)$，则有$\varepsilon_7(g_i)=\bigcup D_i^2$，故

$$[(G^2-g_1)\cap(G^2-g_1^{-1})]\cup I=[(G^2-g_2)\cap(G^2-g_2^{-1})]\cup I$$

又$g_i\cap I=\phi$即$\bar{g}_1\cap\bar{g}_1^{-1}=\bar{g}_2\cap\bar{g}_2^{-1}$。从而有

$$\bar{g}_1\cap\bar{g}_1^{-1}=(G^2-g_1)\cap(G^2-g_1^{-1})=G^2(g_1\cup g_1^{-1})=G^2-g_2\cup g_2^{-1}$$

则有$g_1\cup g_1^{-1}=g_2\cup g_2^{-1}$，$g_1=g_2$。即定理成立。

由此定理我们可以立即推出：

定理5　设$G,g(\neq\phi)$同上定理，则有

$$G^*(g)\neq G^*(g^{(i)})\qquad(i=2,3,\cdots)$$

定理6　设G为偏序集，$g\in RI(G)$，$g\cap I=\phi$，若$|G|=N<+\infty$，则$G^*(g^{(i)})=\{G\}$，$|G(g^{(i)})|=|P(G^2)|$这里$i=N,N+1,\cdots$。

证明　这是因为对$\forall x_0\in g\circ G$，取$N=|G|$，则当$n\geqslant N$时，$x_0\circ g^{(n)}=\phi$，即$g^{(n)}=\phi$。故定理成立。

定义4　设G为偏序集，$g_0\in RI(G)$，若对$\forall g\in RI(G)$，有$g\subset g_0$，则称g_0为G的极大增关系。用g_0来表示极大增关系，$g_0'=g_0-I$。

显然，对任何一个集$(G,<)$，只有一个g_0。由定理2知，若g有满足H）之极大泛浑沌D，则$D\in G^y\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n}g^{(i)}\right)\cap G^*(g^i)$。容易看出，若$g=g_0'$，则$g$满足条件H）的极大泛浑沌存在。然而对什么样的$g$，总有满足H）之极大泛浑沌？下面的例子说明并非任意一个增关系都有满足H）的极大泛浑沌存在。

例1　取$G=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$，且$x_i<x_{i+1}(i=1,2,3,4)$。$g=\{(x_1,x_2),(x_2,x_3),(x_3,x_4),(x_4,x_5)\}$。

对$\forall x_i\in G$，都存D_i，使得$x_i\in D_i$，D_i为g之浑沌，而D_i不满足条件H）。

下述定理给出了$g\cap I=\phi$时，g有满足条件H）之极大泛浑沌的充要条件。且设G是全序集。

定理7　设G，g同上定理。则g有满足条件H）之极大泛浑沌的充要条件是存在$D\subset G$，满足

H′）$\forall x\in D$，对$y\in\bar{D}$，有(x,y)或$(y,x)\in g$。

证明　设D满足H′）。则$\forall(x,y)\in D^2$，由H′）知$\forall y_1\in\bar{D}$，且$x<y_1$，有(x,y_1)或$(y_1,x)\in g$，而$g\in RI(G)$，故有$(x,y_1)\in g$。于是推出D满足H）。

设$D'\supset D$，且$\exists x_1\in D'-D$。记$D_1=D\cup\{x_1\}$。由H′）知对$\forall x\in D$，(x_1,x)或$(x_1,x_1)\in g$与D_1为g之泛浑沌矛盾。故D为满足H）之极大泛浑沌。

设D为g之极大泛浑沌，且满足条件H）。若$\exists y_0$，对$\forall x\in D,y_0<x$。若$(y_0,x)\bar{\in}g$，则$\{y_0\}\times D\subset\bar{g}$。考虑$D_1=D\cup\{y_0\}$，则$D_1^2=D^2\cup\{(y_0,y_0)\}\cup\{y_0\}\times D\cup D\times\{y_0\}$，而$D\times\{y_0\}$，

$\{(y_0,y_0)\}\subset\bar{g}$，故推出$\forall y<x$，且$y\in\bar{D}$，有$(y,x)\in g$。同样可证$\forall y$，$x<y,y\in D$，有$(x,y)\in g$成立。故$D$满足条件H′)。

因为偏序集、全序集是一类非常广泛的集（如实数集R，n维欧几里得空间E^n，等等），因此，上述的讨论都可以用来研究古典的浑沌问题、怪引子问题。

参 考 文 献

[1] Wu Xue-mou, Pansystems methodology and nonlinear analysis: The new investigation of bifurcation, catastrophe and chaos and stability, *Proceedings of International Conference of Nonlinear Mechanics* (1985).

[2] 覃国光，稳定性与混沌的一些泛系研究，科学探索，3 (1986).

[3] Wu Xue-mou, Pansystems methodology: Concepts, theorems and applications (Ⅰ)—(Ⅷ), *Science Exploration*, 1,2,4 (1982), 1,4 (1983), 1 (1984).

[4] 吴学谋，泛系方法论与泛系突变分析，《分叉、突变、稳定性学术会议论文汇编》，中国力学会 (1983).

[5] Gao Long-ying and Wang Shu-ji, Pansymmetry and fixed pansystems theorems, *Applied Mathematics and Mechanics*, 5, 5 (1984).

[6] Zhu Sui-cai and Wu Chen, Some problems on pansystems series-parallel analysis and clustering analysis, *Science Exploration*, 3 (1984).

[7] Liu Guo-han and Zhu Sui-cai, Solutions of pansystems operator equations, *Science Exploration*, 4 (1983).

[8] Li Gui-hua, The characteristic describing of the structure and quantity in fixed pansystems theorems, *Applied Mathematics and Mechanics*, 5,6 (1984).

Some Pansystems Studies on Panchaos and Strange Panattractor

Zhu Sui-cai

(*Wuhan Digital Engineering Institute*, *Wuhan*)

Abstract

Paper [1] discussed the relations among panchaos and strange panattractor and pansystems operators. Paper [2] gave the application of the fixed-point pansystems theorems to these typical nonlinear problems. In this paper, we firstly present several concepts: increasing relation, maximal panchaos, etc., and discuss the relations among them. We also discuss the problems when two increasing relations have the same panchaos and when panchaos of g is panchaos of g^t as wall.