

弹塑性状态下 I 型裂纹前缘应力 应变场的奇异性分析*

陈小明 杨南生 官忠信

(西北工业大学, 1986年1月10日收到)

摘 要

本文从弹塑性力学的三维基本方程出发, 分析了幂硬化材料 I 型裂纹前缘应力、应变场的奇异性, 发现, 裂尖附近诸应力、应变分量的奇异性沿厚度不变; 六个应力分量的奇异性不完全相同, 六个应变分量的奇异性也不完全相同。

一、引 言

I 型问题是最常见、最典型的断裂力学问题, 也是人们研究比较多的问题之一。自1968年HRR场^[1,2]问世以来人们对幂硬化材料在弹塑性条件下, 平面 I 型裂纹前缘应力、应变的分布进行了大量的研究和分析, 取得了许多有意义的结论。但是, 一般的 I 型问题, 由于板厚是一有限值, 所以, 既不属于平面应力范畴, 也不属于平面应变范畴, 裂纹前缘处于三维应力状态。

本文从弹塑性力学的三维基本方程出发, 分析了 I 型裂纹前缘应力、应变场的奇异性, 发现, 裂尖附近诸应力、应变的奇异性沿厚度方向不变; 六个应力(应变)分量的奇异性不完全相同。即: 对硬化指数为 n 的幂硬化材料, 若裂纹前缘法平面上的正应力 σ_{zz} 具有 γ^k 奇异性 ($k < 0$), 则 σ_{xx} , σ_{yy} 和 σ_{xy} 亦具有 γ^k 奇异性, 而 σ_{xz} 和 σ_{yz} 具有 γ^{k+1} 奇异性; 对应变分量来讲, ε_{xx} , ε_{yy} 和 ε_{xy} 的奇异性为 γ^{nk} , ε_{xz} 和 ε_{yz} 为 γ^{nk+1} , 而 ε_{zz} 为 γ^{nk+2} 。

二、塑性力学的基本方程

1. 坐标系

对一厚度为 h 的平板, 选取三维笛卡尔直角坐标系如图 1 所示, 相应的圆柱坐标系与直角坐标系的关系为:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \arctan \frac{y}{x}, \quad z = z \quad (2.1)$$

2. 平衡微分方程

$$\sigma_{ij,j} = 0 \quad (i, j = x, y, z) \quad (2.2)$$

若引入应力函数 Φ_1 , Φ_2 和 Φ_3 , 方程(2.2)自动满足, 且应力分量可表示为:

* 钱伟长推荐。

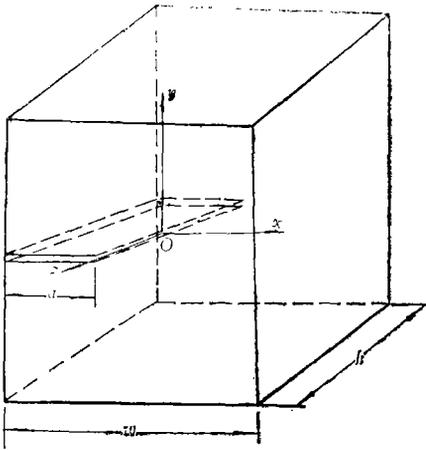


图1 坐标系

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx} &= \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial z^2} \\
 \sigma_{yy} &= \frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial z^2} \\
 \sigma_{zz} &= \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial y^2} \\
 \sigma_{xy} &= -\frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial x \partial y} \\
 \sigma_{yz} &= -\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial y \partial z} \\
 \sigma_{xz} &= -\frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial x \partial z}
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

3. 本构方程

对幂硬化材料, 采用全量理论, 应力-应变关系为:

$$\varepsilon_{ij} = (1 + \nu) S_{ij} + \frac{1 - 2\nu}{3} \sigma_{pp} \delta_{ij} + \frac{3}{2} \alpha \sigma_e^{n-1} S_{ij} \tag{2.4}$$

其中:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i=j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

S_{ij} 是应力偏量, σ_e 为等效应力, ν , α , n 为材料常数.

4. 相容方程

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yz}}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \\
 \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{zx}}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} \\
 \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial y} \\
 \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right] &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y \partial z} \\
 \frac{\partial}{\partial y} \left[-\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right] &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{yz}}{\partial x \partial z} \\
 \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right] &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial x \partial y}
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

5. 几何方程

在小变形假设下, 应变分量 ε_{ij} 与位移分量 u_i 的关系为:

$$\varepsilon_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2 \tag{2.6}$$

三、基本假设

1. 裂纹前缘被一塑性区所包围, 且在靠近裂尖处, 应力场的主奇异项的一般形式为:

$$\sigma_{ij} = r^{f_{ij}(z)} \bar{\sigma}_{ij}(\theta, z), \quad (f_{ij}(z) < 0) \quad (3.1)$$

2. σ_{zz} 与 σ_{xx} , σ_{yy} 具有相同的奇异性。即:

$$f_{zz}(z) = f_{yy}(z) = f_{xx}(z) \quad (3.2)$$

根据塑性力学的基本方程, 对 $\nu=1/2$ 的平面应变状态, σ_{zz} 与 σ_{xx} , σ_{yy} 总有如下关系:

$$\sigma_{zz} = (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})/2$$

这时, 式(3.2)是成立的。

在线弹性状态下, M. N. Bapu Rao 曾研究了中心裂纹板受轴向拉伸时, 裂纹尖端附近的三维应力分布式况^[3,4], 结论是, σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{zz} 与 σ_{xy} 是有相同的奇异性, 这表明, 在线弹性状态下, 式(3.2)也是成立的。

四、裂纹局部应力分析

1. 直角坐标和柱坐标偏导数之间的关系

为了在 x, y, z 坐标系中分析 σ_{ij} 的奇异性, 首先给出直角坐标系中对 x, y 的偏导数与柱坐标系中对 r 的偏导数之间的关系

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial r} \cos\theta - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin\theta \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial r} \sin\theta + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \cos\theta \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} \cos^2\theta - 2 \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial r} \frac{\sin\theta \cos\theta}{r} \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial r} \frac{\sin^2\theta}{r} + 2 \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\sin\theta \cos\theta}{r^2} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \frac{\sin^2\theta}{r^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} \sin^2\theta + 2 \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial r} \frac{\sin\theta \cos\theta}{r} \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial r} \frac{\cos^2\theta}{r} - 2 \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\sin\theta \cos\theta}{r^2} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \frac{\cos^2\theta}{r^2} \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

从式(4.1)可以看出, 对形如式(3.1)这样的 γ 的幂函数, 若只考虑求导或积分过程中幂指数的变化, 则对 r 求偏导数与对 x (或 y) 求偏导数是一样的。因此, 在下面的讨论中, 将直接在 x, y, z 坐标系中分析 γ 的幂指数变化, 以得出 σ_{ij} 与 ϵ_{ij} 的奇异性。

2. 应力奇异解中 γ 的幂指数 $f_{ij}(z)$ 只能是与 z 无关的常数 F_{ij} 。

下面, 给出这一结论的证明

已知 σ_{ij} 的形式如式(3.1), $f_{zz}(z)$ 与 $f_{xx}(z)$, $f_{yy}(z)$ 有关系如式(3.2), 且 σ_{ij} 与应力函数 Φ_i 有关系如式(2.3)。

求证 σ_{ij} 的幂指数 $f_{ij}(z)$ 满足: $f_{ij}(z) = F_{ij}$

证明 用反证法

设: $f_{ij}(z)$ 是与 z 有关的函数

将(3.1)的第 4,5,6 式代入(2.3)的第 4,5,6 式, 积分后有 (不影响应力的各项已略去)

$$\left. \begin{aligned} \Phi_3 &= \gamma^{f_{xz}(z)+2} \tilde{\Phi}_3(\theta, z) \\ \Phi_2 &= \frac{\gamma^{f_{xz}(z)+1}}{\ln \gamma} \tilde{\Phi}_2(\theta, z) \\ \Phi_1 &= \frac{\gamma^{f_{xz}(z)+1}}{\ln \gamma} \tilde{\Phi}_1(\theta, z) \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

其中, $\tilde{\Phi}_1, \tilde{\Phi}_2, \tilde{\Phi}_3$ 是积分得到的与 γ 无关的函数.

将(4.2)代入(2.3)的第1, 2, 3式, 可得:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx} &= \gamma^{f_{xz}(z)} \tilde{\Phi}_{3x}(\theta, z) + \frac{\gamma^{f_{xz}(z)+1}}{\ln \gamma} \left[\tilde{\Phi}_{21}(\theta, z) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\ln \gamma} \tilde{\Phi}_{22}(\theta, z) + \frac{1}{(\ln \gamma)^2} \tilde{\Phi}_{23}(\theta, z) \right] \\ \sigma_{yy} &= \gamma^{f_{yz}(z)} \tilde{\Phi}_{3y}(\theta, z) + \frac{\gamma^{f_{yz}(z)+1}}{\ln \gamma} \left[\tilde{\Phi}_{11}(\theta, z) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\ln \gamma} \tilde{\Phi}_{12}(\theta, z) + \frac{1}{(\ln \gamma)^2} \tilde{\Phi}_{13}(\theta, z) \right] \\ \sigma_{zz} &= \gamma^{f_{xz}(z)-1} \left[\frac{1}{\ln \gamma} - \frac{1}{2(\ln \gamma)^2} + \frac{1}{2(\ln \gamma)^3} \right] \tilde{\Phi}_{2z}(\theta, z) \\ &\quad + \gamma^{f_{yz}(z)-1} \left[\frac{1}{\ln \gamma} - \frac{1}{2(\ln \gamma)^2} + \frac{1}{2(\ln \gamma)^3} \right] \tilde{\Phi}_{1z}(\theta, z) \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

其中, 所有的 $\tilde{\Phi}$ 均是求导时得到的与 γ 无关的函数.

从(4.3)中 σ_{zz} 的表达式可以看出, 主奇异项的形式与式(3.1)不符, 因此, $f_{xz}(z)$ 和 $f_{yz}(z)$ 应与 z 无关, 即:

$$f_{xz}(z) = F_{xz}, \quad f_{yz}(z) = F_{yz}, \quad F_{xz}, \quad F_{yz} < 0 \quad (4.4)$$

将(4.4)代入(3.1), 与(2.3)联立积分可得:

$$\Phi_1 = \gamma^{F_{xz}+1} \tilde{\Phi}_1(\theta, z), \quad \Phi_2 = \gamma^{F_{xz}+1} \tilde{\Phi}_2(\theta, z), \quad \Phi_3 = \gamma^{f_{xz}(z)+2} \tilde{\Phi}_3(\theta, z) \quad (4.5)$$

由(4.5)和(2.3)可得:

$$\sigma_{zz} = \gamma^{F_{xz}-1} \tilde{\sigma}_{zz}^x(\theta, z) + \gamma^{F_{yz}-1} \tilde{\sigma}_{zz}^y(\theta, z) \quad (4.6)$$

不妨设:

$$F_{xz} = F_{yz} \quad (4.7)$$

(否则, 较大的一个可以略去).

式(4.3)中给出和 σ_{xx} 和 σ_{yy} 均是有 $\gamma^{f_{xz}(z)}$ 奇异性, 由式(3.2)可推出:

$$f_{xy}(z) = F_{xz} - 1 = F_{yz} - 1$$

若令:

$$f_{xy}(z) = F_{xz} - 1 = F_{yz} - 1 = k \quad (k < 0)$$

则式(4.5)可改写为:

$$\Phi_1 = \gamma^{k+2} \tilde{\Phi}_1(\theta, z), \quad \Phi_2 = \gamma^{k+2} \tilde{\Phi}_2(\theta, z), \quad \Phi_3 = \gamma^{k+2} \tilde{\Phi}_3(\theta, z) \quad (4.8)$$

从而, 可以推出:

$$f_{ij}(z) = F_{ij}$$

综上所述, 可知, 沿厚度方向 (z 方向), σ_{ij} 的奇异性不变, 这与文献[3]、[4]对中心裂纹板这一特定条件下的结论是一致的.

3. σ_{ij} 的奇异性分析

式(4.8)给出了三个应力函数的具体形式, 将其代入式(2.3), 可以得到诸应力分量的奇

异性。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx} &= \gamma^k \tilde{\sigma}_{xx}(\theta, z), \quad \sigma_{yy} = \gamma^k \tilde{\sigma}_{yy}(\theta, z), \quad \sigma_{zz} = \gamma^k \tilde{\sigma}_{zz}(\theta, z) \\ \sigma_{xy} &= \gamma^k \tilde{\sigma}_{xy}(\theta, z), \quad \sigma_{yz} = \gamma^{k+1} \tilde{\sigma}_{yz}(\theta, z), \quad \sigma_{zx} = \gamma^{k+1} \tilde{\sigma}_{zx}(\theta, z) \end{aligned} \right\} \quad (4.9)$$

显然, 六个应力分量的奇异性不完全相同, σ_{yz} 和 σ_{zx} 的奇异性比其它应力分量要低一阶。

根据式(4.9), 等效应力 σ_e 的主奇异项为:

$$\sigma_e = 2^{-\frac{1}{2}} [(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + 6\sigma_{xy}^2]^{\frac{1}{2}} \quad (4.10)$$

五、裂尖局部应变分析

1. ϵ_{ij} 的奇异性分析

利用本构方程(2.4), 可以从应力分量 σ_{ij} 推导出应变分量 ϵ_{ij} 。

因为:

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_{yy} \delta_{ij} / 3$$

故: S_{ij} 的奇异性与 σ_{ij} 相同。且从(4.10)可知, σ_e 的奇异性与 σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{zz} , σ_{xy} 相同, 为 γ^k 。

因为: $n \geq 1$, 故, 由式(2.4)所推导出的 ϵ_{ij} 的主奇异项为:

$$\epsilon_{ij} = 3\alpha \sigma_e^{n-1} S_{ij} / 2 \quad (5.1)$$

由此可知:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \gamma^{nk} \tilde{\epsilon}_{xx}(\theta, z), & \epsilon_{yy} &= \gamma^{nk} \tilde{\epsilon}_{yy}(\theta, z) \\ \epsilon_{zz} &= \gamma^{nk} \tilde{\epsilon}_{zz}(\theta, z), & \epsilon_{xy} &= \gamma^{nk} \tilde{\epsilon}_{xy}(\theta, z) \\ \epsilon_{yz} &= \gamma^{nk+1} \tilde{\epsilon}_{yz}(\theta, z), & \epsilon_{zx} &= \gamma^{nk+1} \tilde{\epsilon}_{zx}(\theta, z) \end{aligned} \right\} \quad (5.2)$$

但事实上, ϵ_{zz} 的奇异性不是 γ^{nk} , 下面, 给出证明。

已知: ϵ_{zz} 满足相容方程(2.5)的第2、3、6式; ϵ_{xx} , ϵ_{yy} , ϵ_{xy} 的奇异性不大于 γ^{nk} ; ϵ_{xx} , ϵ_{yz} 的奇异性不大于 γ^{nk+1}

求证: ϵ_{zz} 的奇异性小于 γ^{nk}

证明: 用反证法

设: ϵ_{zz} 的奇异性为 γ^{nk}

由(2.5)的第二式, 知: 右端奇异性为 γ^{nk} , 而左端奇异性为 γ^{nk-2} ($k < 0$), 显然不等, 故 ϵ_{zz} 的奇异性应小于 γ^{nk} 。由(2.5)的第3、6式, 可以得出同样结论。

不难证明, ϵ_{zz} 的奇异性为 γ^{nk+2} 时, 相容方程得以满足。

综上所述, 六个应变分量的奇异性不完全相同, ϵ_{xx} , ϵ_{yy} , ϵ_{xy} 的奇异性最高, 为 γ^{nk} , ϵ_{xx} , ϵ_{yz} 次之, 为 γ^{nk+1} , ϵ_{zz} 的奇异性最低, 为 γ^{nk+2} ($k < 0$)。

2. ϵ_{ij} 奇异性的物理意义

以上, 利用相容方程得出了 ϵ_{xx} 的奇异性低于其它应变分量的结论, 下面, 将从应变集中的角度来分析这一结论的正确性。

从应变的定义可知, ϵ_{ij} 反映了位移 u_i 沿 x , y , z (γ , θ , z) 方向的变化情况。若物体内带有裂纹, 则越靠近裂尖, 位移的变化梯度越大, 从而形成了应变集中。在图1所定义的柱坐标系下, 物体任一点与裂纹前缘的距离是由坐标 r 决定的, 因此, 在裂尖附近, 位移分

量的变化, 对 r 最为敏感。

从式(2.6)可以看出, 在 ϵ_{ij} 的六个量中, 除 ϵ_{zz} 外, 都与位移对 $r(x, y)$ 的偏导数有关, 即, 不同程度地反映了位移沿 r 方向的变化情况。这些变化是显著的。而 ϵ_{zz} 是位移 u_z 沿与裂尖平行方向(z)的变化, 当然比沿 r 方向的变化要小得多。因此, 以上得出的关于 ϵ_{zz} 奇异性的结论是合乎应变集中规律的。

六、结 论

I 型裂纹前缘的应力、应变场一般是三维的, 若假设裂尖存在一个 γ 的幂函数形式的主奇异场, 则由弹塑性力学的基本方程, 对幂硬化材料, 可以得出如下结论:

1. 沿厚度方向 γ 的幂指数是个常数, 即应力和应变的奇异性不变。
2. 在六个应力分量中, σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{zz} 和 σ_{xy} 具有相同的奇异性, 而 σ_{xz} 和 σ_{yz} 的奇异性低一阶; 在六个应变分量中, ϵ_{xx} , ϵ_{yy} 和 ϵ_{xy} 具有相同的奇异性, ϵ_{zz} 和 ϵ_{yz} 的奇异性比其低一阶, ϵ_{zz} 的奇异性最低(比 ϵ_{xx} , ϵ_{yy} , ϵ_{xy} 低二阶)。

参 考 文 献

- [1] Hutchinson, J. W., Singular behavior at the end of a tensile crack in a hardening material, *J. Mech. Phys. Solids*, , 16, 1 (1968), 13—31.
- [2] Rice, J. R. and G. R. Rosengren, Plane strain deformation near a crack tip in a power-law hardening material, *J. Mech. Phys. Solids*, 16, 1 (1968), 1—12.
- [3] Bapu Rao, M. N., Three-dimensional analysis of a finite thick plate with a thorough crack, *Int. J. Fract.*, 17, 1 (1981), R. 43—45.
- [4] Bapu Rao, M. N., Three-dimensional stress problem of a finite thick plate with a thorough crack under tension, *Proceedings of ICF6*, 2 (1984), 963—969.

The Singularity Analysis of the Stress and Strain Fields for Mode I Fracture in Elastic-Plastic State

Chen Xiao-ming Yang Nan-sheng Guan Zhong-xin

(Northwestern Polytechnical University, Xi'an)

Abstract

The stress and strain singularities of power hardening material for Mode I fracture are analysed according to the fundamental equations of elastic-plastic mechanics. It is found that the singularities of all stress and strain components do not change in the thick direction, and neither the six stress components nor the six strain components have the same singularity.