

文章编号: 1000-0887(2004)09-0881-08

# 圆底扁球壳非线性稳定问题的 自由参数摄动法解\*

陈山林, 李其中

(重庆大学 土木工程学院, 重庆 400045)

(本刊编委陈山林来稿)

摘要: 用自由参数摄动法求解了圆底扁球壳在均布载荷作用下的非线性稳定问题。作为一种改进的正则摄动方法, 使研究者可以不确定摄动参数具体意义而直接求得问题的全部特征方程。通过算例研究了扁球壳在失稳过程中变形和应力的变化特点, 并与其他研究者的结果进行了比较。

关键词: 圆底扁球壳; 自由参数摄动法; 非线性稳定

中图分类号: O343.9 文献标识码: A

## 引 言

以摄动法为基础的一系列方法<sup>[1~4]</sup>是研究扁壳的失稳问题的常用方法。作为一种改进的正则摄动方法, 自由参数摄动法<sup>[5]</sup>具有使研究者可以不确定摄动参数具体意义而直接求解其弹性特征方程的特点。

本文将采用自由参数摄动法求解一般边界条件下承受均布载荷作用的扁球壳的大挠度变形和失稳问题, 并将具体算例求解结果与文[6]的求解结果比较。对于其中的非线性积分方程组本文采用样条函数法编程求解。

## 1 无量纲基本方程及自由摄动参数展开

考虑一般边界条件下的具厚度  $h$ 、底半径  $a$ 、拱高  $f$  的扁薄球壳, 承受集度为  $p$  的均布载荷作用, 其基本方程<sup>[1]</sup>在本文的无量纲表示为:

$$\begin{cases} L(\theta) = P \cdot \rho^2 - S \cdot (k\rho + \theta), \\ L(\rho) = \theta \cdot \left[ \frac{1}{2}\theta + k\rho \right]. \end{cases} \quad (1a, b)$$

边界条件:

$$\begin{cases} \theta = 0, S = 0 & (\rho = 0), \\ \frac{d\theta}{d\rho} + \nu_1\theta = 0, \frac{dS}{d\rho} - \nu_2S = 0 & (\rho = 1), \end{cases} \quad (2a, b)$$

式中:

\* 收稿日期: 2003\_01\_16; 修订日期: 2004\_04\_08

作者简介: 陈山林(1942—), 男, 四川内江人, 教授, 博导(联系人. Tel: + 86\_23\_65120898; Fax: + 86\_23\_65123511; E\_mail: a65123754@cta.cq.cn)。

$$\rho = \frac{r}{a}, \quad \theta = \frac{dW}{d\rho}, \quad S_t = -\frac{a^2 N_t}{Eh^3} \cdot 12(1-\nu^2), \quad S = -\frac{a^2 \rho N_r}{Eh^3} \cdot 12(1-\nu^2),$$

$$W = \frac{w}{h} \sqrt{12(1-\nu^2)}, \quad P = \frac{a^4 p}{Eh^4} \cdot 12(1-\nu^2) \sqrt{3(1-\nu^2)}, \quad k = \sqrt{12(1-\nu^2)} \frac{f}{h},$$

$w$  为挠度,  $E$  为弹性模量,  $N_r, N_t$  为径向和环向薄膜力,  $r$  为径向坐标,  $\nu$  为泊松比, 算子

$$L(\dots) = \rho \frac{d}{d\rho} \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho}(\dots),$$

$\nu_1, \nu_2$  的取值与具体边界条件有关, 对于一般常见边界取值如下<sup>[7]</sup>

固定夹紧:  $\nu_1 = \infty, \nu_2 = \nu$ ; 可移夹紧:  $\nu_1 = \infty, \nu_2 = \infty$ ;

可移铰支:  $\nu_1 = \nu, \nu_2 = \infty$ ; 固定铰支:  $\nu_1 = \nu, \nu_2 = \nu$

假设无量纲力、转角、薄膜力可展开成自由摄动参数  $\varepsilon$  的如下级数形式:

$$P = P_1 \varepsilon + P_2 \varepsilon^2 + P_3 \varepsilon^3 + \dots + P_n \varepsilon^n + O(\varepsilon^{n+1}), \quad (3)$$

$$\theta = \theta_1 \varepsilon + \theta_2 \varepsilon^2 + \theta_3 \varepsilon^3 + \dots + \theta_n \varepsilon^n + O(\varepsilon^{n+1}), \quad (4)$$

$$S_r = S_1 \varepsilon + S_2 \varepsilon^2 + S_3 \varepsilon^3 + \dots + S_n \varepsilon^n + O(\varepsilon^{n+1}), \quad (5)$$

式中  $P_i, \theta_i(\rho)$  和  $S_i(\rho)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) 待定。

将(3)~(5)式代入式(1)和(2)并比较  $\varepsilon$  的同次幂系数, 可得以下逐级近似方程组:

$$\varepsilon^1: \begin{cases} L(\rho\theta_1) = P_1 \rho^2 - k\rho S_1, \\ L(\rho S_1) = k\rho\theta_1. \end{cases} \quad (6a, b)$$

$$\varepsilon^2: \begin{cases} L(\rho\theta_2) = P_2 \rho^2 - k\rho S_2 - S_1 \theta_1, \\ L(\rho S_2) = k\rho\theta_2 + \frac{1}{2} \theta_1^2. \end{cases} \quad (7a, b)$$

$$\varepsilon^3: \begin{cases} L(\rho\theta_3) = P_3 \rho^2 - k\rho S_3 - (S_1 \theta_2 + S_2 \theta_1), \\ L(\rho S_3) = k\rho\theta_3 + \theta_1 \theta_2 \end{cases} \quad (8a, b)$$

和相应的边界条件:

$$\begin{cases} \theta_i = 0, S_i = 0 & (\rho = 0), \\ \frac{d\theta_i}{d\rho} + \nu_1 \theta_i = 0, \frac{dS_i}{d\rho} - \nu_2 S_i = 0 & (\rho = 1; i = 1, 2, 3). \end{cases} \quad (9a, b)$$

设存在函数  $\varphi_i(\rho), \psi_i(\rho)$ , 它们分别满足以下方程组:

$$\begin{cases} L(\rho\varphi_1) = \rho^2 - k\rho\psi_1, \\ L(\rho\psi_1) = k\rho\varphi_1. \end{cases} \quad (10a, b)$$

$$\begin{cases} L(\rho\varphi_2) = -k\rho\psi_2 - \varphi_1 \varphi_1, \\ L(\rho\psi_2) = k\rho\varphi_2 + \frac{1}{2} \varphi_1^2. \end{cases} \quad (11a, b)$$

$$\begin{cases} L(\rho\varphi_3) = -k\rho\psi_3 - (\varphi_1 \varphi_2 + \varphi_2 \varphi_1), \\ L(\rho\psi_3) = k\rho\varphi_3 + \varphi_1 \varphi_2 \end{cases} \quad (12a, b)$$

和边界条件:

$$\begin{cases} \varphi_i = 0, \psi_i = 0 & (\rho = 0; i = 1, 2, 3), \\ \frac{d\varphi_i}{d\rho} + \nu_1 \varphi_i = 0, \frac{d\psi_i}{d\rho} - \nu_2 \psi_i = 0 & (\rho = 1; i = 1, 2, 3). \end{cases} \quad (13a, b)$$

则可以证明下式成立:

$$\theta_1 = P_1 \cdot \varphi_1, \quad (14)$$

$$\theta_2 = P_2 \cdot \varphi_1 + P_1^2 \cdot \varphi_2, \quad (15)$$

$$\theta_3 = P_3 \cdot \varphi_1 + 2P_1 \cdot P_2 \cdot \varphi_2 + P_1^3 \cdot \varphi_3, \quad (16)$$

$$S_1 = P_1 \cdot \phi_1, \quad (17)$$

$$S_2 = P_2 \cdot \phi_1 + P_1^2 \cdot \phi_2, \quad (18)$$

$$S_3 = P_3 \cdot \phi_1 + 2P_1 \cdot P_2 \cdot \phi_2 + P_1^3 \cdot \phi_3, \quad (19)$$

将(14)~(19)式代入(4)、(5)式,得  $\theta$  和  $S$  的新表达式:

$$\theta = P_1 \varphi_1 \varepsilon + (P_2 \varphi_1 + P_1^2 \varphi_2) \varepsilon^2 + (P_3 \varphi_1 + 2P_1 P_2 \varphi_2 + P_1^3 \varphi_3) \cdot \varepsilon^3, \quad (20)$$

$$S = P_1 \phi_1 \varepsilon + (P_2 \phi_1 + P_1^2 \phi_2) \varepsilon^2 + (P_3 \phi_1 + 2P_1 P_2 \phi_2 + P_1^3 \phi_3) \cdot \varepsilon^3. \quad (21)$$

式(20)和(21)中存在的未知量有未知系数  $P_i (i = 1, 2, 3 \dots)$  及摄动参数  $\varepsilon$ 。如果按照传统摄动法的步骤,给  $\varepsilon$  以具体的定义则  $P_i$  可以确定。而本文对  $\varepsilon$  将不给予具体定义。

## 2 $\varphi_i$ 和 $\phi_i$ 的样条函数求解

本文将采用文[8]应用的三次多节点样条函数法求解(10)~(13)式。三次多节点样条函数<sup>[9]</sup>是非线性方程求解中应用颇广的一种函数。采用这种方法得到的计算结果具有精度高、程序简单、系数矩阵为带状稀疏矩阵等优点。

将(10)式化为积分形式如下:

$$\varphi_1(\rho) = \frac{1}{8}(\rho^3 - e \cdot \rho) - \frac{\rho}{2} \cdot \int_0^1 G_1(\rho, \xi) \cdot k \cdot \phi_1(\xi) \cdot \xi^2 d\xi \quad (22)$$

$$\phi_1(\rho) = -\frac{\rho}{2} \cdot \int_0^1 G_2(\rho, \xi) \cdot k \cdot \xi^2 \cdot \varphi_1(\xi) d\xi \quad (23)$$

将(23)代入(22)得到如下非线性积分方程:

$$\varphi_1(\rho) = F(\rho) + \int_0^1 K(\rho, \xi) \cdot \varphi_1(\xi) d\xi \quad (24)$$

式中:

$$F(\rho) = \frac{1}{8}(\rho^3 - e \cdot \rho), \quad (25)$$

$$K(\rho, \xi) = -\int_0^1 \frac{1}{4} k^2 \cdot \rho^2 \cdot \xi^4 \cdot G_1(\rho, \eta) \cdot G_2(\eta, \xi) d\eta \quad (26)$$

$$G_i(\rho, \xi) = \begin{cases} \frac{1}{\rho^2} + \lambda & (0 < \xi < \rho), \\ \frac{1}{\xi^2} + \lambda & (\xi < \rho < 1), \end{cases} \quad (i = 1, 2) \quad (27a, b)$$

$$\lambda = \frac{1 - \nu_1}{1 + \nu_1}, \quad \lambda_2 = \frac{1 + \nu_2}{1 - \nu_2}, \quad e = \frac{3 + \nu_1}{1 + \nu_1} \quad (28a, b, c)$$

由于  $F(\rho)$  和  $K(\rho, \xi)$  在区间  $[0, 1]$  及正方形区间内  $0 \leq \rho, \xi \leq 1$  为连续函数,因此可将  $F(\rho)$  和  $K(\rho, \xi)$  在两个区域内用多项式一致逼近。

在区间  $[0, 1]$  和  $0 \leq \rho, \xi \leq 1$  上作等距节点划分,节点为  $\rho_i$  和  $(\rho_i, \xi_j)$ , 其中,  $\rho_i = i/N$ ,  $\xi_j = j/M (i = 0, 1, \dots, N; j = 0, 1, \dots, M)$ 。  $N$  和  $M$  是区间上划分的节点数。我们对函数  $F(\rho)$  和  $K(\rho, \xi)$  作如下逼近:

$$K(\rho, \xi) = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^M K_{ij} \cdot \phi_i(\rho) \cdot \phi_j(\xi), \quad (29)$$

$$F(\rho) = \sum_{i=0}^N F_i \cdot \phi_i(\rho), \quad (30)$$

式中  $K_{ij} = K(\rho_i, \xi_j)$ ,  $F_i = F(\rho)$  表示相应点的函数值.  $\phi_i(\rho)$  和  $\phi(\xi)$  是三次多节点基样条函数. 用  $K(\rho, \xi)$  和  $F_1(\rho)$  近似代替  $K(\rho, \xi)$  与  $F_1(\rho)$ , 并假设  $\varphi_1(\rho)$  具有如下形式的解:

$$\varphi_1(\rho) = \sum_{i=0}^N \varphi_{1i}(\rho) \cdot \phi_i(\rho). \quad (31)$$

将(29)~(31)式代入式(24)中, 令  $\varphi_i(\rho)$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) 系数相等, 得以下的线性方程组:

$$\varphi_1(\rho) - \sum_{k=0}^N \varphi_1(\rho_k) \cdot \alpha_{ik} = F_i, \quad (32)$$

$$\begin{cases} \alpha_{ik} = \sum_{j=0}^M K_{ij} \cdot b_{jk}, \\ b_{jk} = \int_0^1 \phi_j(\rho) \cdot \phi_k(\rho) d\rho \end{cases} \quad (33 \text{ a, b})$$

通过求解线性方程组(32)可得到  $\varphi_1(\rho)$ , 代入式(31)即得  $\varphi_1(\rho)$  的一个近似解. 采用同样的方法, 可以求得  $\varphi_1(\rho)$  并得到(23)式的近似解:

$$\psi_1(\rho) = \sum_{i=0}^N \psi_{1i}(\rho) \cdot \phi_i(\rho). \quad (34)$$

则  $\psi_1(\rho)$  也求出. 采用同样的方法, 利用已经计算出的数据, 我们同样可以求出方程组(11)和(12). 由此, 所有  $\varphi_i(\rho)$ 、 $\psi_i(\rho)$  ( $i = 1, 2, 3$ ) 的近似解形式如下:

$$\varphi_i(\rho) = \sum_{j=0}^N \varphi_{ij}(\rho) \cdot \phi_j(\rho), \quad (35)$$

$$\psi_i(\rho) = \sum_{i=0}^N \psi_{ii}(\rho) \cdot \phi_i(\rho). \quad (36)$$

### 3 特征方程的确定

设无量纲载荷  $P$  与挠度  $W$  满足如下特征方程:

$$P = \alpha_1(\rho) \cdot W(\rho) + \alpha_2(\rho) \cdot W^2(\rho) + \alpha_3(\rho) \cdot W^3(\rho) + O(W^4(\rho)), \quad (37)$$

$W(\rho)$  也可由(20)式求得:

$$\begin{aligned} W(\rho) = & P_1 Y_1(\rho) \varepsilon + [P_2 Y_1(\rho) + P_1^2 Y_2(\rho)] \cdot \varepsilon^2 + \\ & [P_3 Y_1(\rho) + 2P_1 P_2 Y_2(\rho) + P_1^3 Y_3(\rho)] \cdot \varepsilon^3, \end{aligned} \quad (38)$$

式中,

$$Y_i(\rho) = \int_0^1 \varphi_i(\rho) d\rho \quad (i = 1, 2, 3), \quad (39)$$

$\varphi_i(\rho)$  由式(35)确定.

将(38)式代入(37), 略去  $\varepsilon$  四次以上小量, 并与(3)比较可得到  $\alpha_i(\rho)$  表达式:

$$\alpha_1(\rho) = Y_1^{-1}(\rho), \quad (40)$$

$$\alpha_2(\rho) = - Y_1^{-3}(\rho) \cdot Y_2(\rho). \quad (41)$$

$$\alpha_3(\rho) = - Y_1^{-4}(\rho) \cdot Y_3(\rho) + 2 Y_1^{-5}(\rho) \cdot Y_2^2(\rho). \quad (42)$$

特征方程(37)得以确定. 这样, 对于(1)、(2)形式的摄动方程, 在摄动参数  $\varepsilon$  不必确定的情形下, 我们得到了形如(37)式的解, 其系数已在(40)~(42)式中确定.

采用同样的方法, 设径向薄膜应力与均布力满足以下弹性特征方程:

$$P = \beta_1(\rho) \cdot S_r(\rho) + \beta_2(\rho) \cdot S_r^2(\rho) + \beta_3(\rho) \cdot S_r^3(\rho) + O(S_r^4(\rho)), \quad (43)$$

重复以上推导, 可得  $\beta_i(\rho)$  ( $i = 1, 2, 3$ ) 如下:

$$\beta_1(\rho) = \phi_1^{-1}(\rho), \quad (44)$$

$$\beta_2(\rho) = -\phi_1^{-3}(\rho) \cdot \phi_2(\rho), \quad (45)$$

$$\beta_3(\rho) = -\phi_1^{-4}(\rho) \cdot \phi_3(\rho) + 2\phi_1^{-5}(\rho) \cdot \phi_2^2(\rho). \quad (46)$$

这样, 特征方程(43)各系数得以求出. 在求得特征方程(37)及(43)之后, 就可以按以下步骤计算临界几何参数  $k_{cr}$  和临界力  $P_{cr}$ .

引入极值条件:

$$\frac{dP}{dW} = 0. \quad (47)$$

通过输入具体的  $k$  值, 得到:

$$W_{cr} = \frac{-\alpha_2 \pm \sqrt{\alpha_2^2 - 3\alpha_1\alpha_3}}{3\alpha_3}, \quad (48)$$

对应的临界力公式即:

$$P_{cr} = \alpha_1 W_{cr} + \alpha_2 W_{cr}^2 + \alpha_3 W_{cr}^3. \quad (49)$$

采用试算法逐渐找到符合条件:

$$\alpha_2^2 - 3\alpha_1\alpha_3 = 0 \quad (50)$$

的  $k$  值, 这时的  $k$  即  $k_{cr}$ . 即当  $k \geq k_{cr}$  成立时, (48) 式才有意义, 也即壳体的失稳才存在. 同样, 为从式(43) 中解出  $k_{cr}$  和  $P_{cr}$ , 根据:  $dP/dS = 0$  得:

$$S_{cr} = \frac{-\beta_2 \pm \sqrt{\beta_2^2 - 3\beta_1\beta_3}}{3\beta_3}, \quad (51)$$

对应的临界力公式即:

$$P_{cr} = \beta_1 S_{cr} + \beta_2 S_{cr}^2 + \beta_3 S_{cr}^3. \quad (52)$$

采用试算法逐渐找到符合条件:

$$\beta_2^2 - 3\beta_1\beta_3 = 0 \quad (53)$$

的  $k$  值, 这时的  $k$  即  $k_{cr}$ . 为以示区别, 本文以下的表述中, 将用(50) 式解出的临界几何特征令为  $k_{cr}$ , 而利用公式(53) 求出的临界几何特征令为  $k'_{cr}$ . 同样, 式(52) 求出的临界力为  $P'_{cr}$  而(49) 式求出的临界力为  $P_{cr}$ .

## 4 算例以及数值结果分析

假设一边缘固定夹紧的扁球壳, 泊松比为 0.3, 承受均布载荷  $p$  作用. 则  $\nu_1 = \infty$ ,  $\nu_2 = \nu$ , 由式(28) 得:  $\lambda_1 = -1$ ,  $\lambda_2 = 1.857\ 142\ 9$ ,  $e = 1$ .

本文采用拟合点数  $N = M = 100$ , 计算壳体几何参数  $k$  分别为 0、6、16、20 和 26 时的临界力, 并计算临界几何特征.

以中心挠度构造特征方程:

$$P = \alpha_1(0) \cdot W(0) + \alpha_2(0) \cdot W^2(0) + \alpha_3(0) \cdot W^3(0). \quad (54)$$

首先得出,  $k = 0$  时, 对应平板的情形, (54) 式系数  $\alpha_1(0) = 32.001\ 6$ ,  $\alpha_2(0) = 0$ ,  $\alpha_3(0) = 1.599\ 47$ , 与钱伟长解<sup>[7]</sup> 相比系数的最大误差小于 0.033%.

图 1 是根据本文的结果以及文[6]的结果绘出的  $k = 6, 10, 16, 20$  和 26 时的  $P_{W_0}(W_0)$  为实

际中心挠度与壳厚之比) 曲线, 见图 1 所示。

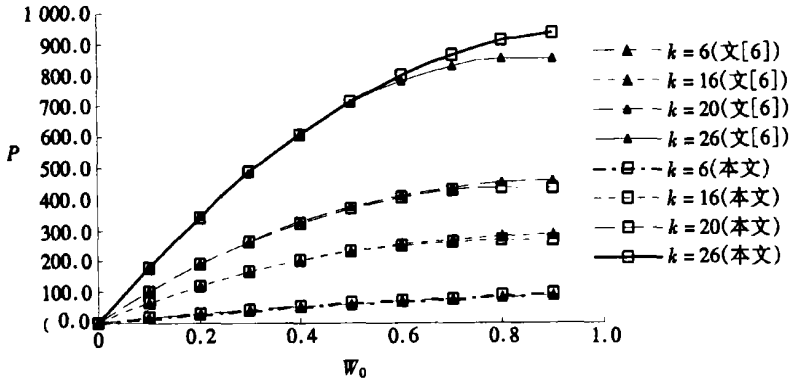


图 1 刚度曲线  $P/W_0$  ( $P$  为无量纲力)

从图 1 可以看出:

- (i) 在  $k = 6$  时, 两种方法的结果都显示壳体不存在失稳现象。
- (ii) 当  $k = 6, 16, 20, 26$ , 两种方法计算结果最大相对误差小于 5%。

另外, 本文计算出以中心挠度表示的特征方程 (37) 形式下, 失稳的临界几何条件为  $k \geq k_{cr(0)} = 11.53$ 。文 [3] 计算出的结果为  $k \geq k_{cr(0)} = 9.886$ 。

采用  $\rho = 0, 0.25, 0.5$  及 1 处点的挠度 (当  $k = 16, 20$  及 26 时) 和径向薄膜力 ( $k = 16$  时) 构造特征方程求解壳失稳的临界力以及临界几何参数, 所得结果列于表 1 中。

表 1 不同弹性特征求出的临界参数

$\rho$	$k$	16	20	26
0	$P_{cr(0)}$	269.906	437.4324	909.971
	$k_{cr(0)}$	9.886		
0.25	$P_{cr(0.25)}$	283.1923	470.1632	981.792
	$k_{cr(0.25)}$	9.605		
	$P'_{cr(0.25)}$	343.096		
	$k'_{cr(0.25)}$	7.481		
0.5	$P_{cr(0.5)}$	335.7056	604.7476	1227.1236
	$k_{cr(0.5)}$	6.4069		
	$P'_{cr(0.5)}$	367.6456		
	$k'_{cr(0.5)}$	7.06		
1.0	$P'_{cr(1)}$	407.264	696.215	1480.20
	$k'_{cr(1)}$	6.604		

注 上表中,  $P_{cr(\rho)}$  和  $k_{cr(\rho)}$  表示采用点  $\rho$  的挠度构造特征方程 (如式 (37) 形式) 求解出的临界力和临界几何特征,  $P'_{cr(\rho)}$  和  $k'_{cr(\rho)}$  表示采用点  $\rho$  的径向薄膜力构造特征方程 (如 (43) 式形式) 求解出的临界力和临界  $k$  值。

通过表 1 和图 1, 可以得到以下结论:

- 1) 采用自由参数摄动法计算壳体失稳前的刚度曲线与文 [6] 采用逐步加载法配合三次  $\delta$  基样条函数法计算出的结果是很一致的, 这证明采用本方法解决壳体失稳问题是有效的;

2) 采用三次多节点基样条函数拟合法求解(10)~(13)式方程组其计算结果是稳定的,其精度也是能够满足要求的;

3) 在  $k = 16, 20, 26$  时, 如下的不等式成立:

$$k = 16: P_{\alpha(0)} < P_{cr(0.25)} < P_{cr(0.5)} < P'_{cr(0.25)} < P'_{\alpha(0.5)} < P'_{\alpha(1)};$$

$$k = 20 \text{ 或 } 26: P_{cr(0)} < P_{\alpha(0.25)} < P_{cr(0.5)}$$

这一现象说明圆底扁球壳在均布载荷作用且  $k$  满足:

$$k > \max(k_{cr(\rho)}, k'_{\alpha(\rho)}) \quad (0 \leq \rho \leq 1)$$

的条件下, 球壳的中心挠度首先出现失稳现象;

4) 从表 1 得出如下的不等式:  $k_{cr(0)} > k_{cr(0.25)} > k_{cr(0.5)}$  和  $k'_{cr(0.25)} > k'_{cr(0.5)} > k'_{cr(1)}$  说明当  $k$  值较小时 ( $0 \leq k \leq k_{cr(0)}$ ),  $k$  越小, 出现失稳现象的点距中心越远;

5) 失稳时, 离中心近的点无论挠度或薄膜力都比离中心远点的挠度或薄膜力首先出现失稳现象, 也即壳体的挠度和薄膜力在失稳时表现出同样的变化特征;

6) 就同一点的失稳现象而言, 由于  $P_{\alpha(\rho)} < P'_{cr(\rho)}$ , 说明挠度比薄膜力先出现失稳的特征。

## 4 结 语

本文介绍了自由参数摄动法在扁壳稳定问题中的应用。由于该方法能够直接给出问题的全部弹性特征(37)和(43), 从而能够比较全面的研究问题的失稳特征, 特别是判断结构失稳的开始区域, 这对于研究复杂结构是有意义的。在本文圆底扁球壳的情形, 这个区域恰在  $\rho = 0$  的中心点附近。其次, 从计算结果来看, 本文的方法和结果是可靠的。

### [参 考 文 献]

- [1] 叶开沅, 顾淑贤. 均布载荷作用下圆底扁球壳的非线性稳定性[A]. 见: 中国理论及应用力学协会主编. 1980年全国计算力学会议论文集[C]. 广州. 1981, 280—287.
- [2] 叶开沅, 刘人怀, 李思来, 等. 在对称线布载荷作用下的圆底扁薄球壳的非线性稳定问题[J]. 兰州大学学报, 1965, 18(2): 10—33.
- [3] 叶开沅, 刘平. 复合载荷下圆底扁球壳非线性稳定性[J]. 应用数学和力学, 1991, 12(1): 11—17.
- [4] 王虎, 王俊奎. 扁圆锥壳在均布载荷作用下的非线性稳定分析[J]. 工程力学, 1990, 7(1): 27—33.
- [5] 陈山林. 自由参数摄动法[A]: 见: 周哲玮主编. 钱伟长教授九十华诞纪念文集[C]. 上海: 上海大学出版社, 2003, 35—43.
- [6] 严圣平. 扁球壳在均布压力作用下的非线性弯曲问题[J]. 应用力学学报, 1988, 5(3): 20—29.
- [7] 钱伟长, 叶开沅. 圆板的大挠度问题[J]. 物理学报, 1954, 10(3): 209—238.
- [8] 叶开沅, 宋卫平. 中心分布载荷作用下圆底扁球壳的变形和稳定性[J]. 应用数学和力学, 1988, 9(10): 857—863.
- [9] 李岳生, 齐东旭. 样条函数方法[M]. 北京: 科学出版社, 1979.

## Free Parameter Perturbation Method Solutions of the Nonlinear Stability of Shallow Spherical Shells

CHEN Shan\_lin, LI Qi\_zhong

( Faculty of Civil Engineering, Chongqing University,  
Chongqing 400045, P. R. China )

**Abstract:** The free parameter perturbation method is applied to solve the problems of nonlinear stability of spherical shallow shells under uniform load. As a modified perturbation method, the free parameter perturbation method enables researchers to obtain all characteristic relations without choosing the certain perturbation parameter. Some examples were discussed to study the variety regulations of deflections and stress of shells in the process of buckling, and the results were compared with those of other researchers.

**Key words:** spherical shallow shell; free parameter perturbation method; nonlinear stability