应用数学和力学，第8卷第6期（1987年6月）　　　　应用数学和力学编委会编
Applied Mathematics and Mechanics　　　　重庆出版社出版

关于结构分析的一个方法

郭　友　中

（中国科学院武汉数学物理研究所，1986年6月2日收到）

摘　　要

本文给出结构分析中的一个著名方法，力矩（和位移）分配法的理论基础：数学描述，近似解的收敛性的新判据和误差估计，并指出对另外一些结构的可能推广。

一、引　　言

力矩（和位移）分配法是求解超静定结构问题的一个著名方法，它是一种迭代解法。

1930年，美国Hardy Cross教授提出力矩分配法以后不久，该法就被国际工程力学界广泛采用，50年代吸引了大量数学、力学和工程界人士致力于推广和应用研究。我国学者对此作过不少贡献。

1950年，捷克C.V. Klauček 教授在他的著作中，从另一角度提出的形变分配法，则是基于叠加原理而得到的简化方法，与本文所指位移分配法不同，两法各有千秋，曾经脍炙人口。

然而，半个世纪以来，力矩分配法虽已广泛列入大学教程，给予学习者以很多基础锻炼，但它的严格数学基础、收敛性以及误差估计却一直为人们所忽视，以致对方法的实质以及适用条件没有确切的叙述。本文的主要目的是弥补这一缺陷，了却这一悬案。

二、位移法与力矩分配法

力矩分配法是位移的一种迭代解法。

1、 用位移法求解超静定结构时，首先是确定结构的未知结点角位移数n_a和未知结点线位移数n_l，总称位移数n（$\triangleq n_a+n_l$）。然后，在结点上加n_a个附加刚臂以阻止角位移，n_l个附加支杆以阻止线位移，总称n个附加联结，使原结构分解成为一系列已知的单跨超静定杆件，而成所谓基本结构。对基本结构的n个附加联结利用静力平衡条件得到位移法方程组：

$$AX=B \tag{2.1}$$

式中
$$A\triangleq[A_{ij}]$$
称为$n\times n$阶刚度矩阵，A_{ij}读作结点j处作用单位位移$X_j=1$在结点i处产生的力（力矩或力）；

$$X\triangleq[X_i]$$

称为n阶位移列阵（矢量）；X_i是作用在节点i处的位移；而

$$B \triangleq [B_j]$$

称为n阶力矩阵（矢量），B_j是外载作用下在节点j处产生的力。

在节点k的附加联结上作用单位位移后，容易作出基本结构ij的弯矩图$\overline{M}_k$，剪力图$\overline{Q}_k$以及轴向力图$\overline{N}_k$，$k=i$或j。由平衡条件可以求得矩阵元A_{ij}，实际上，A_{ij}还可以用截面法求得。在一定条件下由位移与力互等原理有：

$$-A_{ij}=\int\frac{\overline{M}_i\overline{M}_j}{EJ}dS+k\int\frac{\overline{Q}_i\overline{Q}_j}{GF}dS+\int\frac{\overline{N}_i\overline{N}_j}{EF}dS \tag{2.2}$$

式中E,G,F,J和k分别是杆件的弹性模量、剪切模量、截面积、转动惯量和剪应力分布系数，积分在杆件ij上进行。式（2.2）称为Maxwell-Mohr公式。在外载P作用下，作出基本结构的弯矩图M_p，剪力图Q_p以及轴向力图N_p，容易求得矩阵元B_i。同理，在一定条件下，

$$-B_i=\int\frac{\overline{M}_iM_p}{EJ}dS+k\int\frac{\overline{Q}_iQ_p}{GF}dS+\int\frac{\overline{N}_iN_p}{EF}dS \tag{2.3}$$

在适当的约束下，方程（2.1）解的存在唯一性是容易证明的（参见[2]）。一旦解得X以后，即可顺利地求出这一超静定结构的弯矩、剪力和轴向力。但当结构复杂，未知数n很大时，手工求解方程（2.1）也就变得十分困难，甚至计算机也会遇到数据爆炸的困难，于是产生各种近似解法。

2. 力矩分配法的著作指出，力矩分配法可以适用于$n_l=0$的情况和某类变截面超静定结构等的近似解法。方法赋予精巧的几何与物理直观的力学分配机制，便于在计算简图上作业，反映了发明者惊人的概括能力，至今仍保持它的实用价值，但却掩盖了它的数学基础。

力矩分配法从分析基本结构中的单跨杆件开始，考察任一变截面杆件ab。

$S_a(S_b)$表示$b(a)$端固定时，使$a(b)$端产生单位角位移$\phi_a=1(\phi_b=1)$所需的弯矩，称为该杆件$a(b)$端的刚度；$C_{ab}(C_{ba})$表示$a(b)$端传递$b(a)$端的弯矩$M_a^{(1)}$（$M_b^{(1)}$）与$M_a(M_b)$之比，称为由$a(b)$至$b(a)$的传递关系数。

当a端产生角位移ϕ_a，b端产生角位移ϕ_b，线位移$\varDelta(\triangleq\phi L$，$L$为杆长)时，$a,b$两端的总弯矩分别为：

$$\left.\begin{aligned}M_{ab}&=S_a[\phi_a+C_{ab}\phi_b-(1+C_{ab})\phi]\\M_{ba}&=S_b[\phi_b+C_{ba}\phi_a-(1+C_{ba})\phi]\end{aligned}\right\} \tag{2.4}$$

在等截面杆件中，$S_a=S_b=4EJ/L$，$C_{ab}=C_{ba}=1/2$，上式成为：

$$M_{ab}=\frac{2EJ}{L}(2\phi_a+\phi_b-3\phi),\quad M_{ba}=\frac{2EJ}{L}(2\phi_b+\phi_a-3\phi) \tag{2.5}$$

不同支承情况可以得到不同的算式。

当结点b有$\eta(1\leqslant\eta\leqslant n)$个杆件刚接时，属于杆件$ab$的参量加注带圆括号的上（或下）标$(a)$，如$S_b^{(a)}$等。于是结点$b$的总刚度

$$A_{bb}=\sum_{a=1}^{\eta}S_b^{(a)}=\sum_{a=1}^{\eta}A_{bb}^{(a)} \tag{2.6}$$

外载P产生的总结点力

$$B_b=\sum_{a=1}^{\eta}B_{b(a)}=-\sum_{a=1}^{\eta}M_{b(a)}=-M_b \tag{2.7}$$

$M_{b(a)}$是外载产生的杆件ba的端点力矩，M_b称作不平衡力矩，而比值

$$\mu_b^{(a)} \stackrel{\Delta}{=} A_{bb}^{(a)} / A_{bb}$$

称为杆件ba的分配系数，所以

$$M_{a(b)} = \mu_a^{(b)} M_a = -\mu_a^{(b)} B_a \tag{2.7'}$$

有了分配系数即可由不平衡力矩求得刚接于a的各杆件远端的（传递）力矩

$$M_a^{\langle 1\rangle} = C_{ab} M_{a(b)} \tag{2.8}$$

力矩分配法是以基本结构为依据而进行的下述迭代操作($\alpha=1,\cdots,\eta,\eta \stackrel{\Delta}{=} \eta(\alpha)$, $a=1,\cdots,\eta$)：

i）计算 $B_a^{(a)}$，$S_a^{(a)}$，C_{aa}和$\mu_a^{(a)}$。

ii）按一定顺序，例如$1,\cdots,n$，首先松开刚臂1，按(2.6)计算B_1；按(2.7)进行不平衡力矩$M_1^{\langle 1\rangle} \stackrel{\Delta}{=} M_1$的分配，得$M_{1(a)}$；按(2.8)进行传递，得$M_{a(1)}^{\langle 1\rangle}$；重又固定刚臂1。松开刚臂2，按(2.6)计算$B_2$得不平衡力矩$M_2^{\langle 1\rangle} \stackrel{\Delta}{=} M_2 + M_{2(1)}^{\langle 1\rangle}$；按（2.7）进行不平衡力矩$M_2^{\langle 1\rangle}$的分配，得$M_{2(a)}$；按(2.8)进行传递，得$M_{a(2)}^{\langle 1\rangle}$；再固定刚臂2．一直进行到第$n$个刚臂，谓之一个循环。

iii）第$k(k>1)$个循环中，刚臂a的不平衡力矩仅为传递力矩

$$M_a^{\langle k\rangle} \stackrel{\Delta}{=} \sum_{\alpha<a} M_{a(\alpha)}^{\langle k\rangle} + \sum_{\beta>a} M_{\beta(a)}^{\langle k-1\rangle} \tag{2.9}$$

按(2.7)进行$M_a^{\langle k\rangle}$的分配；按(2.8)进行传递，得$M_{a(a)}^{\langle k\rangle}$，$k=1,\cdots,n$。

iv）当循环至第m次，不平衡力矩$M_a^{\langle m\rangle}$不大于预先选定的允许误差$\varepsilon>0$，即

$$|M_a^{\langle m\rangle}| \leqslant \varepsilon \tag{2.10}$$

时，操作终止。同时，即得杆件ab在刚臂a端的力矩

$$M_a = B_{a(b)} + \sum_{k=1}^{m} M_{a(b)}^{\langle k\rangle} \tag{2.11}$$

常见的方法的图（或表）上作业请见，例如，著作[1]。

3．这一小节，我们来详细阐明，位移法与力矩分配法之间的关系。我们重新解释方程(2.1)，先看对角项：

$$A_{jj} X_j = \sum_{a=1}^{\eta} A_{jj}^{(a)} X_j = \sum_{a=1}^{\eta} \mu_j^{(a)} S_j^{(a)} X_j = \sum_{a=1}^{\eta} M_{j(a)} = M_j \tag{2.12}$$

即所谓不平衡力矩；再看非对角项，

$$A_{ij} X_j = C_{ij} S_j^{(i)} X_j = M_{i(j)} \tag{2.13}$$

意即由结点j上的位移X_j传递而至结点i的力矩。

因此，力矩分配法本质上就是求近似解$X_i^{\langle m\rangle}$的这样一种迭代法：

$$A_{ii} X_i^{\langle m\rangle} = B_i - \sum_{j=1}^{i-1} A_{ij} X_j^{\langle m\rangle} - \sum_{j=i+1}^{n} A_{ij} X_j^{\langle m-1\rangle} \qquad (i=1,\cdots,n) \tag{2.14}$$

当$m=1$时，$X_j^{\langle m-1\rangle}$应理解为零。在实际进行时，采取的是下面的迭代公式：

$$A_{ii}(X_i^{\langle m\rangle}-X_i^{\langle m-1\rangle})=-\left[\sum_{j=1}^{i-1}A_{ij}(X_j^{\langle m\rangle}-X_j^{\langle m-1\rangle})+\sum_{j=i+1}^{n}A_{ij}(X_j^{\langle m-1\rangle}-X_j^{\langle m-2\rangle})\right]$$

$$=-\left[\sum_{\alpha<i}A_{i\alpha}(X_\alpha^{\langle m\rangle}-X_\alpha^{\langle m-1\rangle})+\sum_{\alpha>i}A_{i\alpha}(X_\alpha^{\langle m-1\rangle}-X_\alpha^{\langle m-2\rangle})\right]$$

$$m\geqslant 2 \qquad (2.14)'$$

令

$$H\triangleq 1-\mathrm{diag}\,(A_{ii}^{-1})A,\ G\triangleq \mathrm{diag}\,(A_{ii}^{-1})B \qquad (2.15)$$

将H分解为严格下三角矩阵L，与严格上三角矩阵U之和，式(2.14)的等价矩阵形式为

$$X^{\langle m\rangle}=LX^{\langle m\rangle}+UX^{\langle m-1\rangle}+G \qquad (2.16)$$

或

$$X^{\langle m\rangle}=(I-L)^{-1}UX^{\langle m-1\rangle}+(I-L)^{-1}G \qquad (2.16)'$$

式中I是单位矩阵。

这样，我们揭示了，力矩分配法与位移法的Gauss-Seidel迭代法之间的本质联系。

三、力矩分配法的收敛性和误差估计

1．我们考虑方程(2.1)，我们知道

$$A_{ij}^{-}=A_{ji}^{-} \qquad (3.1)$$

这就是位移互等原理。因此逆矩阵 $A^{-1}\triangleq[A_{ij}^{-}]$是实对称矩阵；同时

$$A_{ii}^{-}>0 \qquad (3.2)$$

对于等截面杆件$i\alpha$，一般地我们有

$$A_{ii}^{-(\alpha)}+A_{jj}^{-(\alpha)}\geqslant 2|A_{ij}^{-(\alpha)}|$$

但是$A_{ij}^{-(\alpha)}=A_{jj}^{-(\alpha)}$，所以$A_{ii}^{-(\alpha)}\geqslant|A_{ij}^{-(\alpha)}|$，等号仅当$\bar{M}_i^{(\alpha)}=\bar{M}_j^{(\alpha)}$时才成立！在其它情况下可用这里的方法得到方法有效的条件，因而在η个刚接于i端的杆件不全是上述等号成立的情况下，即有

$$A_{ii}^{-}=\sum_{\alpha=1}^{\eta}A_{ii}^{-(\alpha)}>\sum_{\alpha=i}^{\eta}|A_{\alpha i}^{-}|=\sum_{\alpha\ i}^{\eta}|A_{\alpha i}^{-}| \qquad (3.3)$$

由于A^{-1}的所有主子行列式$A_i^{-1}>0$，所以A^{-1}是正定的，因而A也是正定的。事实上，由式(2.5～2.13)，我们知道对等截面杆ij，i端固定；j端固定时$A_{ji}=1/2$；当j端铰支时$A_{ji}=0$，但j端滑固时，$A_{ji}=-1$。

因为A是对称正定矩阵（这里A的正定性当然也可由能量泛函简单地证明。但是正定性不是必要条件，作为充分条件也是可以减弱的），Gauss-Seidel 迭代法收敛。不仅如此，Jacobi迭代法

$$X^{\langle m\rangle}=HX^{\langle m-1\rangle}+G \qquad (m=1,2,\cdots) \qquad (3.4)$$

以及超松弛迭代法

$$X^{\langle m\rangle}=(1-\omega)X^{\langle m-1\rangle}+\omega(LX^{\langle m\rangle}+UX^{\langle m-1\rangle}+G) \qquad (0<\omega<2;m=1,2,\cdots) \qquad (3.5)$$

等都是收敛的。

2. 由式(3.3)，可见

$$\|H\|_{\infty} \triangleq \max_{i} \sum_{j=i}^{n} |H_{ij}| = \max_{i} \sum_{i \neq j} |A_{ij}|/A_{ii} < 1 \tag{3.6}$$

记

$$\mu \triangleq \max_{i} \left[\sum_{j=i}^{n} |H_{ij}| \Big/ (1 - \sum_{j=1}^{i-1} |H_{ij}|) \right] \tag{3.7}$$

有误差估计：

$$\|X^{\langle m \rangle} - X^*\|_{\infty} \leqslant \frac{\mu^m}{1-\mu} \|X^{\langle 2 \rangle} - X^{\langle 1 \rangle}\|_{\infty} \tag{3.8}$$

式中X^*是方程(3.1)的精确解；或

$$\|X^{\langle m \rangle} - X^*\|_{\infty} \leqslant \frac{\mu^*}{1-\mu} \|X^{\langle m \rangle} - X^{\langle m-1 \rangle}\|_{\infty} \tag{3.9}$$

由式(3.9)可知，只要$\mu \ll 1$，用量$\|X^{\langle m \rangle} - X^{\langle m-1 \rangle}\|_{\infty}$来判断迭代过程应否停止是可以的。

以上我们明确了力矩分配法的数学描述，收敛条件，误差估计以及式(2.10)作为停止迭代的判据的合理性。然而，力矩分配法的丰富实践告诉人们，它的应用范围远比上面指出的要广泛得多，这就要求人们引入新的判据。

四、力矩分配法收敛的新判据

上面我们证明了力矩分配法与Gauss-Seidel方法的等价性，则以$S(A)$记矩阵A的谱半径，立即知道：力矩分配法收敛的充要条件也是$S((I-L)^{-1}U) < 1$。由于这一条件不便检验，于是人们另辟溪径来寻求新的判据。

其实一切迭代方法收敛的本质是映象的压缩性，而力矩分配法与众不同之处恰巧在于计算$X^{\langle m \rangle}$的分量$X_i^{\langle m \rangle}$之前，$X_j^{\langle m \rangle}$，$j<i$就已计算出来，提前参与了压缩（见式(4.1)的首项）。将提前压缩了的分量及时予以精确估计，就有下面的判据：

设有置换

$$T \triangleq \begin{pmatrix} 1, \cdots, n \\ t_1, \cdots, t_n \end{pmatrix}$$

及一组正数$\mu_k < 1$使

$$\sum_{s=1}^{k-1} |A_{t_k t_s} + \delta_{t_k t_s}| \mu_s + \sum_{s=k}^{n} |A_{t_k t_s} + \delta_{t_k t_s}| \leqslant \mu_k \tag{4.1}$$

式中，$s, k = 1, \cdots, n$；$\delta_{t_k t_s}$是Kronecker符号，则T经置换后，式(2.16)成为：

$$X_{i_k}^{\langle m \rangle} = \sum_{s=1}^{k-1} (A_{i_k i_s} + \delta_{i_k i_s}) X_{i_s}^{\langle m \rangle}$$

$$+ \sum_{s=k}^{n} (A_{i_k i_s} + \delta_{i_k i_s}) X_{i_s}^{\langle m-1 \rangle} + B_{i_k} \tag{4.2}$$

收敛，且有估计：

$$|X_{ij}^{\langle m\rangle}-X_{ij}^{*}|\leqslant\frac{|\mu|^{m}}{1-|\mu|}|X_{ij}^{\langle 1\rangle}-X_{ij}^{\langle 0\rangle}| \tag{4.3}$$

式中，$|f(j)|\triangleq\{\max f:1\leqslant j\leqslant n\}$。

这就是说，尽管矩阵$(A+I)$的三种模都大于1，这种方法依然收敛。这样一来，力矩分配法的收敛范围显著扩大了。收敛速度大大提高了，只要能遵循式(4.1)选择力矩分配的先后次序(T)即可。

五、力法与位移分配法

在力法计算超静定结构时，方程(2.1)的形式不变，n是超静定结构的多余约束数。去掉多余约束加上未知约束力$X_i(i=1,\cdots,n)$后，基本结构是静定结构，X是多余约束（联系）上作用的（广义）力矢量。A是（单位力作用下的）位移矩阵，B是载荷作用下的位移矢量。它们在物理意义上有巨大的差别，在数学上却没有多少不同。

因此，A在一定条件下仍然是对称（位移互等原理）正定矩阵，当然只要满足迭代过程的收敛条件，就有相应的位移分配法，且第四节中的结论也都成立。

同理，对混合法应有混合分配法。

特别是对三维结构，诸如网壳、井字楼盖以及某些有限元和边界元方法中离散化后的问题等，力矩分配法在一定条件下不失是一种良好的直观性很强的迭代方法。

顺便指出，力学中的力矩分配法就是物理中的松弛法，但比松弛法问世要早十多年之久。

参 考 文 献

[1] 金宝桢、杨式德、朱宝华，《结构力学》，人民教育出版社（1964）。
[2] 郭友中，弹性理论中的互补变分原理，科学通报，**29**，10（1984），1297—1302.

On a Method of Structural Analysis

Guo You-zhong

(Wuhan Inst. of Math. Sci., Academia Sinica, Wuhan)

Abstract

In this paper we present the theoretical foundation concerning a famous method in structural analysis, the distribution of moment(or/and displacement): the mathematical description, new criterion, convergence and error estimation of approximate solution and some possible generalizations to that of other constructions.