

# 局部坐标下的有理插值曲面 $C^1$ \*

姜寿山 杨彭基

(西北工业大学, 1986年1月31日收到)

## 摘 要

本文提出一种在局部坐标系下构造有理插值曲面的方法, 它可用来解决曲面的“大挠度”问题。这种曲面逼近效果较佳, 也便于讨论其性质, 在几何外形设计、有限元分析及其它领域都有实用意义。文中给出具体的构造实例。

## 一、引 言

构造在一散乱空间点组上的插值曲面问题是几何外形设计中一个重要的研究课题, 它在有限元分析及其它领域都有实用意义。常用的三角域上的插值方法首先对给定的 $(x_i, y_i, z_i)$ 在 $x-y$ 平面上进行三角网格化, 然后在每个三角形上构作各种形式的插值曲面, 曲面片之间为光滑拼接。由于平面三角化网格是不唯一的, 因而存在着优化问题, 一般常用的是max-min角标准方法。但现在的三角网格化都是在平面上进行的, 不可避免的出现这种情况: 平面上某个三角形是“好”的, 在空间却相当“坏”, 而空间上“好”的三角形在平面上却不那么“好”, 这类似于曲线的“大挠度”问题, 我们称之为曲面的“大挠度”问题。这个问题已引起人们的极大重视, 并寻找解决的方法, 但目前它还没有得到完全解决。本文将从新的方向——局部坐标系的方法试图解决这一问题。从微分几何知, 一光滑曲面在其上某点处的近似形状为该点处流动架架上的抛物型二次曲面。从这一思想出发, 在空间对所给点组 $(x_i, y_i, z_i)$ 进行三角网格化, 在各空间三角形上建立局部坐标系及相应的辅助局部坐标系, 在各局部坐标系上构造分片有理插值曲面, 相邻曲面片为 $C^1$ 拼接。它的特点是: (i) 直接在空间进行三角网格化, 曲面形状较好; (ii) 可望较好的逼近效果; (iii) 能解决曲面的“大挠度”问题, 便于研究曲面的性质。

## 二、任意三角形上的 $C^1$ 有理插值

首先介绍两种与局部有理插值有关的三角域上的插值曲面。文献[1]介绍的Brown-Little三角域方法是在标准三角形上考虑问题, 需要对任意三角形进行映射; 文献[2]介绍的任意三角形上有理插值的方法不需要对三角形进行映射。两种插值格式构作 $C^1$ 连续的曲

\* 钱伟长推荐。

本课题为教育委员会科学基金所资助的课题。

面都用到三角形边界上函数值与导数值, 因此只要知道函数在三角形边界上的信息, 就可用任一种方法构造  $C^1$  插值曲面.

### 三、空间三角网格化与局部坐标系

给定散乱点组  $(x_i, y_i, z_i) \quad i=1, 2, \dots, n$ , 建立空间三角化网格相当于线性插值. 三个点  $P_i, P_j$  和  $P_k$  可以形成一空间三角形. 这种三角化网格不是唯一的, 可以将平面三角化的各种方法推广到空间上来, 但它不受平面上的一些限制, 同时可考虑到网格的凸包性. 假设已作成了三角化网格  $\{\Delta_i\}_{i=1}^n$ , 并给出每个三角平面  $\Delta_i$  的向外法向量  $\vec{n}_i$ , 然后用数值方法估计每个顶点  $P_i=(x_i, y_i, z_i)$  处的法矢  $\vec{N}_i$ . 例如可用所有以  $P_i$  为一顶点的三角平面的法矢的加权平均作为  $\vec{N}_i$ , 也可先用简单的插值曲面在  $P_i$  处的法矢作为  $\vec{N}_i$ , 或根据实际问题的需要给出  $\vec{N}_i$ .

在每个空间三角形  $\Delta_i$  上建立一个局部坐标系  $A_i=[O_i; x, y, z]$ ,  $\Delta_i$  平面作为  $A_i$  的  $x$ - $y$  面,  $\vec{n}_i$  作为  $z$  轴方向,  $x$  和  $y$  轴方向及  $O_i$  如图 1 所示.

图中  $P_i P_k$  为  $\Delta_i$  的最长边,  $A_i$  可以近似看作任一顶点处曲面的流动标架. 两相邻三角平面  $\Delta_i$  和  $\Delta_j$  之间的夹角记为  $\alpha_{ij}$ , 假设  $\alpha_{ij} \neq 0$ . 记  $\Delta_i$  与  $\Delta_j$  的公共边为  $L_{ij}$ , 在  $A_i$  与  $A_j$  之间建立辅助坐标系  $B_{ij}=[O_{ij}; x, y, z]$ ,  $O_{ij}$  在  $L_{ij}$  的中点处,  $L_{ij}$  作为  $B_{ij}$  的  $x$  轴,  $z$  轴向为  $\vec{n}_i/|\vec{n}_i| + \vec{n}_j/|\vec{n}_j|$ .

由整体坐标系  $[O; x, y, z]$  到第  $i$  个局部坐标系  $A_i[O_i; x, y, z]$  的变换为

$$\{x^i, y^i, z^i\} = \{x, y, z\} H_i + U_i$$

其中  $\{x^i, y^i, z^i\}$  表示点在  $A_i$  下的坐标,  $\{x, y, z\}$  表示点在整体坐标下的坐标,  $H_i$  为旋转矩阵,  $U_i$  为平移向量.

由  $B_{ij}$  到  $A_i$  的变换为:

$$\{x^i, y^i, z^i\} = \{x^{ij}, y^{ij}, z^{ij}\} H_{ij}^i + U_{ij}^i$$

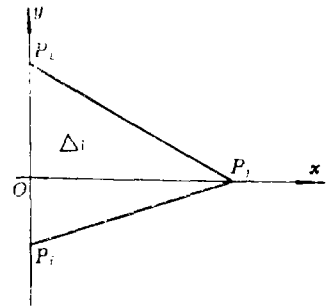


图 1

### 四、局部坐标系下的 $C^1$ 有理插值曲面

局部坐标下的相邻曲面片之间的光滑拼接是比较困难的事. 定义在两相邻的  $\Delta_i$  和  $\Delta_j$  上的两块曲面一般并不连续, 它们之间形成一条“沟”, 这是和整体坐标系的区别. 根据第二节介绍的两种三角域上的插值格式, 在  $A_i$  上只要知道了  $\Delta_i$  的边界信息, 就可作出  $C^1$  有理插值曲面. 因此, 构造局部有理曲面分为两步, 首先“填充”相邻  $\Delta_i$  和  $\Delta_j$  之间的“沟”, 这样就给出了  $\Delta_i$  的边界信息, 然后构造三角形上的插值曲面, 使得整块曲面为  $C^1$  连续.

为了使问题简单, 只就两个局部坐标系的情况说明, 其余相邻局部坐标系的情况类似处理.  $A_i$  局部坐标系与  $A_j$  局部坐标系相邻, 公共边为  $L_{ij}$ , 在  $A_i$  上构造一块有理曲面  $S_i$ .

$$S_i: \quad z = az(ax + by) + \sum_{i+j \leq 3} a_{ij} x^i y^j \quad (x, y) \in R_i \quad (4.1)$$

$S_i$  过  $L_{ij}$  的两端点, 且在两端点处法矢平行于预先给定的法矢.  $\alpha$  和  $\beta$  是这样选择的: 如果

$L_{ij}$  为  $A_i$  的  $y$  轴则取  $\alpha=0, \beta=1$ ; 否则  $\alpha=1, \beta=0$ . 在  $A_j$  上构造另一块有理曲面  $S_2$ ,

$$S_2: \quad z = bz(ax + \beta y) + \sum_{i+j \leq 3} b_{ij} x^i y^j \quad (x, y) \in R_2 \quad (4.2)$$

$S_2$  过  $L_{ij}$  的两端点, 且在两端点处法矢平行于预先给定的法矢. 如果  $L_{ij}$  为  $A_j$  的  $y$  轴则取  $\alpha=0, \beta=1$  否则  $\alpha=1, \beta=0$ .

$S_1$  与  $S_2$  在  $B_{ij}$  局部坐标系的  $x-z$  面上  $C^1$  拼接, 这样, 就在每个相邻局部坐标系之间的“沟”上都“填充”了两块  $C^1$  拼接的有理曲面, 相应地在每个  $\Delta_i$  的边界上给出了曲面信息. 应用第二节给出的三角形上的插值格式, 就作出了  $C^1$  连续的局部有理插值曲面.

首先证明一个定理.

**定理** 两个三次曲面  $F_1(x, y, z) = 0$  和  $F_2(x, y, z) = 0$  分别定义在  $y \geq 0, y < 0$  的域内, 在  $x$  轴上有两点  $A = (x_A, 0, 0)$  和  $B = (x_B, 0, 0)$ ,  $F_1$  与  $F_2$  分别过  $A$  和  $B$ , 且在  $A, B$  处的法矢平行于预先给定的法矢  $\vec{N}_A$  和  $\vec{N}_B$ .

$$\left. \begin{aligned} F_1(x, y, z) &= \sum_{i+j+k \leq 3} a_{ijk} x^i y^j z^k = 0 \\ F_2(x, y, z) &= \sum_{i+j+k \leq 3} b_{ijk} x^i y^j z^k = 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

那么  $F_1$  与  $F_2$  在  $y=0$  上  $C^1$  拼接时, 须满足如下八个约束:

$$\left. \begin{aligned} a_{003} &= \lambda b_{003}, \quad a_{210} = \lambda b_{210}, \quad a_{102} = \lambda b_{102}, \quad a_{201} = \lambda b_{201} \\ a_{012} &= \lambda b_{012}, \quad a_{111} = \lambda b_{111}, \quad a_{002} = \lambda b_{002}, \quad a_{011} = \lambda b_{011} \end{aligned} \right\} \quad (4.4)$$

其中  $\lambda$  为不等于零的常数.

**证明**  $F_1$  与  $F_2$  在  $y=0$  上  $C^0$  拼接时须满足:

$$\left. \begin{aligned} a_{300} &= \lambda b_{300}, \quad a_{003} = \lambda b_{003}, \quad a_{102} = \lambda b_{102}, \quad a_{201} = \lambda b_{201} \\ a_{200} &= \lambda b_{200}, \quad a_{002} = \lambda b_{002}, \quad a_{100} = \lambda b_{100}, \quad a_{101} = \lambda b_{101} \\ a_{001} &= \lambda b_{001}, \quad a_{000} = \lambda b_{000} \end{aligned} \right\} \quad (4.5)$$

$F_1=0$  与  $F_2=0$  在  $y=0$  上  $C^1$  拼接时须满足:

$$\left\{ \frac{\partial F_1}{\partial x}, \frac{\partial F_1}{\partial y}, \frac{\partial F_1}{\partial z} \right\}_{y=0} = \lambda \left\{ \frac{\partial F_2}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial y}, \frac{\partial F_2}{\partial z} \right\}_{y=0} \quad (4.6)$$

$$(4.6) \text{ 相当于: } \left. \begin{aligned} a_{210} &= \lambda b_{210}, \quad a_{012} = \lambda b_{012}, \quad a_{111} = \lambda b_{111} \\ a_{110} &= \lambda b_{110}, \quad a_{001} = \lambda b_{001}, \quad a_{010} = \lambda b_{010} \end{aligned} \right\} \quad (4.7)$$

在  $A, B$  两点处  $F_1$  与  $F_2$  分别插值且

$$\left. \begin{aligned} \vec{N}_A &= \left\{ \frac{\partial F_1}{\partial x}, \frac{\partial F_1}{\partial y}, \frac{\partial F_1}{\partial z} \right\}_{x=x_A} = \lambda \left\{ \frac{\partial F_2}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial y}, \frac{\partial F_2}{\partial z} \right\}_{x=x_A} \\ \vec{N}_B &= \left\{ \frac{\partial F_1}{\partial x}, \frac{\partial F_1}{\partial y}, \frac{\partial F_1}{\partial z} \right\}_{x=x_B} = \lambda \left\{ \frac{\partial F_2}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial y}, \frac{\partial F_2}{\partial z} \right\}_{x=x_B} \end{aligned} \right\} \quad (4.8)$$

应用(4.8)可以证明(4.5)和(4.7)中只有如下八个方程是独立的.

$$\left. \begin{aligned} a_{003} &= \lambda b_{003}, \quad a_{210} = \lambda b_{210}, \quad a_{102} = \lambda b_{102}, \quad a_{201} = \lambda b_{201} \\ a_{012} &= \lambda b_{012}, \quad a_{111} = \lambda b_{111}, \quad a_{002} = \lambda b_{002}, \quad a_{011} = \lambda b_{011} \end{aligned} \right\} \quad (4.9)$$

从而定理得证.

这个定理的意义在于它告诉我们形如  $F_1$  与  $F_2$  的曲面在  $y=0$  上  $C^1$  拼接时的条件数. 下

面仍只就两个相邻局部坐标系之间的“沟”进行“填充”。对于旋转矩阵及点的表示在不致混淆的情况下采用简单的表示。

设  $A_1$  为第一个局部坐标系,  $A_2$  为第二个局部坐标系,  $\Delta_1$  与  $\Delta_2$  的公共边为  $L_{12}$ ,  $L_{12}$  的两端点为  $A$  和  $B$ , 法矢为  $\vec{N}_A$  和  $\vec{N}_B$ , 相应的有  $B_{12}$  局部坐标系。

由  $B_{12}$  到  $A_1$  的变换为:

$$\{x^1, y^1, z^1\} = \{x^{12}, y^{12}, z^{12}\}H_{12}^1 + U_{12}^1 \quad (4.10)$$

由  $B_{12}$  到  $A_2$  的变换为:

$$\{x^2, y^2, z^2\} = \{x^{12}, y^{12}, z^{12}\}H_{12}^2 + U_{12}^2 \quad (4.11)$$

不失一般性设  $L_{12}$  为  $A_1$  的  $y$  轴, 在  $A_1$  下作有理曲面  $S_1$ :

$$z = azy + \sum_{i+j=3} a_{ij}x^i y^j \quad (x, y) \in R_1 \quad (4.12)$$

设  $L_{12}$  不为  $A_2$  的  $y$  轴, 在  $A_2$  下作有理曲面  $S_2$ :

$$z = bzx + \sum_{i+j=3} b_{ij}x^i y^j \quad (x, y) \in R_2 \quad (4.13)$$

$S_1$  与  $S_2$  分别过  $A$  点和  $B$  点, 且在二点处的法矢平行于预先给定的法矢。因此,  $S_1$  与  $S_2$  的系数中各只有五个是独立的, 写为一般式:

$$\left. \begin{aligned} a &= a, \quad a_{ij} = a_{ij}(a, t_1, t_2, t_3, t_4) \\ b &= b, \quad b_{ij} = b_{ij}(b, u_1, u_2, u_3, u_4) \quad i+j \leq 3 \end{aligned} \right\} \quad (4.14)$$

其中  $a, t_i, b, u_i$  为待定参数。

在  $A_1$  坐标系下  $A, B$  处法矢记为  $\vec{N}_A$  和  $\vec{N}_B$ , 在  $A_2$  坐标系下记为  $\vec{M}_A$  和  $\vec{M}_B$ 。那末  $S_1$  在  $A$  和  $B$  处法矢一般为:

$$(y_A a - 1)\vec{N}_A, \quad (y_B a - 1)\vec{N}_B \quad (4.15)$$

考虑到  $A_2$  局部坐标系的构造, 假设在  $A_2$  下  $x_A = 0$ , 因此  $S_2$  在  $A$  和  $B$  处的法矢为:

$$-\vec{M}_A, \quad (x_B b - 1)\vec{M}_B \quad (4.16)$$

在  $B_{12}$  局部坐标系下  $S_1$  在  $A$  和  $B$  处法矢为:

$$\vec{K}'_A = (y_A a - 1)\vec{N}_A (H_{12}^1)^T, \quad \vec{K}'_B = (y_B a - 1)\vec{N}_B (H_{12}^1)^T \quad (4.17)$$

在  $B_{12}$  局部坐标系下  $S_2$  在  $A$  和  $B$  处法矢为:

$$\vec{K}'_A = -\vec{M}_A (H_{12}^2)^T, \quad \vec{K}'_B = (x_B b - 1)\vec{M}_B (H_{12}^2)^T \quad (4.18)$$

在  $B_{12}$  局部坐标系下要求:

$$\vec{K}'_A = \lambda \vec{K}'_A, \quad \vec{K}'_B = \lambda \vec{K}'_B \quad (4.19)$$

其中  $\lambda$  为待定常数。(4.19) 相当于两个标量方程, 经适当指定  $\lambda$ , 就可解出  $a$  和  $b$ , 在指定  $\lambda$  时要使解出的  $a$  和  $b$  在  $\Delta_1$  内不会使  $(ay-1)=0$ , 在  $\Delta_2$  内不会使  $(bx-1)=0$ 。这种限制是为了三角形上的插值, 通过求解一不等式组这一要求就可满足, 还可通过调整顶点法矢满足这一要求。

将  $S_1$  和  $S_2$  经变换(4.10)和(4.11)变到  $B_{12}$  坐标系下的  $S'_1$  和  $S'_2$ ,

$$\left. \begin{aligned} S'_1: \quad & \sum_{i+j+k=3} a_{ijk} x^i y^j z^k = 0 \\ S'_2: \quad & \sum_{i+j+k=3} b_{ijk} x^i y^j z^k = 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.20)$$

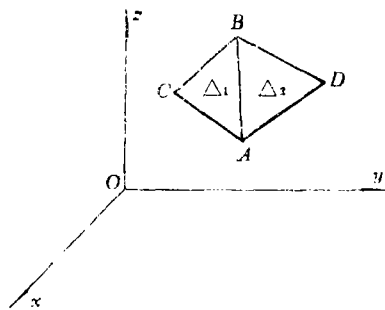


图 2

其中  $a_{ijk} = a_{ijk}(t_1, t_2, t_3, t_4)$ ,  $b_{ijk} = b_{ijk}(u_1, u_2, u_3, u_4)$

根据定理,  $S_1'$  和  $S_2'$  在  $B_{12}$  的  $y=0$  面上  $C^1$  拼接时要满足(4.4)的八个方程, 从而可以求出全部  $t_i$  和  $u_i$ .  $S_1$  的  $x$  和  $y$  取值范围为将  $B_{12}$  的  $x-z$  面与  $S_1$  的截线在  $A_1$  的  $x-y$  面的投影与  $L_{12}$  所围成的区域  $R_1$ ,  $S_2$  的  $x$  和  $y$  取值范围为将  $B_{12}$  的  $x-z$  面与  $S_2$  的截线在  $A_2$  的  $x-y$  面的投影与  $L_{12}$  所围成的区域  $R_2$ .

在每个相邻局部坐标系之间的“沟”上都“填充”两块  $C^1$  拼接的有理曲面, 然后在每个  $\Delta_i$  上运用第二节给出的插值格式构造  $C^1$  连续的有理曲面, 称这种方法为“填充镶嵌”法.

至此, 我们已构造出局部坐标下的  $C^1$  有理插值曲面, 它可用来解决曲面的“大挠度”问题, 有较好的逼近效果. 在实用上有以下两点:

(1) 当空间三角网格化时出现四点共面的情况, 要采用特殊处理方法, 如布尔和形式的有理曲面  $C^1$ .

(2) 若在网格边界上对曲面有要求, 因为采用的是  $C^1$  有理插值, 只要将边界条件加入即可, 若对边界无限制, 则可取简单的形式以便于求解.

## 五、例子

此例只说明如何在两个相邻局部坐标系之间的“沟”上“填充”两块有理曲面, 并未涉及如何在三角域上“镶嵌”有理曲面.

给定空间单位球上四个点,  $A(1, 0, 0)$ ,  $B(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 0)$ ,  $C(0, 0, 1)$  和  $D(0, 1, 0)$ . 如图 3 作成空间三角化网格,  $A, B$  和  $C$  形为  $A_1$  局部坐标系的  $x-y$  面,  $B, C$  和  $D$  形成  $A_2$  局部坐标系的  $x-y$  面, 在整体坐标系下,  $\vec{N}_B = \{1, 1, 0\}$ ,  $\vec{N}_C = \{0, 0, 1\}$ .  $A_1$  的原点  $O_1 = ((\sqrt{2}+1)/4, (\sqrt{2}+1)/4, (2-\sqrt{2})/4)$ ,  $x$  轴向为  $\{0.538056, -0.81914, -0.198757\}$ ,  $y$  轴向为  $\{0.5, 0.5, -0.707106\}$ .  $A_2$  的原点  $O_2 = ((\sqrt{2}+1)/4, (\sqrt{2}+1)/4, (2-\sqrt{2})/4)$ ,  $x$  轴向为  $\{-0.81914, 0.538056, -0.198757\}$ ,  $y$  轴向为  $\{-0.5, -0.5, -0.707106\}$ .  $B_{12}$  的原点  $O_{12} = ((\sqrt{2}+1)/4, (\sqrt{2}+1)/4, (2-\sqrt{2})/4)$ ,  $y$  轴向和  $z$  轴向可相应地定出.

应用前文所介绍的方法, 在  $A_1$  和  $A_2$  下分别作出两块有理曲面  $S_1$  和  $S_2$ , 它们在  $B_{12}$  的  $y=0$  面上  $C^1$  拼接.

$$S_1: \quad z = \frac{1}{1-0.1y} (0.07368y^3 + 0.029289xy - 0.663134y^2 + 0.292893x - 0.755234y + 0.1842034) \quad (x, y) \in R_1$$

其中  $R_1$  为由直线  $x=0$  和下列曲线所围区域:

$$0.07368y^3 - 0.3004xy - 0.663134y^2 + 3.589799x - 0.755234y + 0.1842034 = 0$$

$$S_2: \quad z = \frac{1}{1+0.1y} (-0.07368y^3 - 0.029289xy - 0.663134y^2 + 0.292893x + 0.755234y + 0.1842034) \quad (x, y) \in R_2$$

其中  $R_2$  为由直线  $x=0$  和下列曲线所围区域:

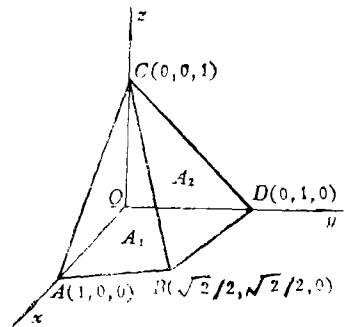


图 3

$$-0.07368y^3 + 0.3004xy - 0.663134y^2 + 3.589799x + 0.755234y + 0.1842034 = 0$$

可以验证  $S_1$  与  $S_2$  是  $C^1$  拼接的, 且在  $\triangle ABC$  和  $\triangle BCD$  内有意义. 以曲面上的点到原点的距离与 1 作比较, 误差不超过 3%, 尽管只取了四个点, 可以看出逼近效果不错.

本文曾得到蔡青副教授和科学院计算中心孙家昶老师的帮助, 作者表示感谢.

### 参 考 文 献

- [1] Barnhill, Robert, Representation and approximation of surface, *Mathematical Software*, Ⅱ, J. R. Rice Ed., Academic Press, New York (1977), 69—120.
- [2] Wang, C. Y.,  $C^1$  rational interpolation over an arbitrary triangle, *CAD*, 5, 1 (1983).
- [3] Barnhill, R. E., Smooth interpolation over triangles, *CAGD* (1974), 45.
- [4] Lewis, B. A. and J. S. Robinson, Triangulation of planar regions with application, *The Computer Journal*, 21, 4 (1978), 324—332.
- [5] 孙家昶, 《样条函数与计算几何》, 科学出版社 (1982).

## $C^1$ Rational Interpolating Surface under Local Coordinate Systems

Jiang Shou-shan      Yang Peng-ji

(North-West Polytechnical University, Xi'an)

### Abstract

A method of constructing rational interpolating surface under local coordinate systems is presented, which can be used to solve the "large torsion problem" of surfaces. This kind of surface has better approximating effect and its properties can be easily discussed, so it has practical applications not only in CAD but also in finite element analysis and other fields. An example is given in the paper.