应用数学和力学，第 8 卷第 6 期（1987年 6 月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

复特征值的一阶摄动解*

李济明　　王 伟

（郑州工学院振动研究室，1986年4月26日收到）

摘　　要

本文将矩阵摄动法，推广到系统质量、阻尼和刚度矩阵为非对称的情形，引入伴随特征向量的概念，应用复模态理论中的正交关系，导出了系统复特征值的一阶摄动解。数值算例表明，这一方法是可行有效的。

一、前　　言

近年来，随着模态分析技术的不断发展和完善，作为其基本内容之一的参数分析，开始引起人们的重视。因为在解决诸如结构参数优化设计、理论模型的动力修改和结构的故障诊断等实际工程问题中，为了避免盲目性，要进行结构的参数分析、计算特征值对参数的灵敏度，研究参数变化对系统动态特性的影响趋势。

结构参数的小变化引起结构振动特性变化的问题，对工程结构的优化设计有重要意义。文献[1]首先用变分法讨论了连续体的结构参数小变化对特征值的影响问题。陈介中提出的结构动力分析的矩阵摄动法省去了系数矩阵对分析参数的求导过程[2]，其使用受结构复杂程度的限制较少。对于特征值的摄动问题，国内也做过系统的研究[5]。上述文献的讨论均限于对称系统，而工程中非对称系统大量存在，如旋转机械中常见的转子 油膜轴承系统，由于受到轴上圆盘陀螺效应和支承刚度及阻尼各向异性的影响，系统的刚度与阻尼矩阵是非对称的。

本文在矩阵摄动法的基础上，针对具有一般粘性阻尼的非对称系统，进一步讨论了复特征值的摄动问题。

二、非对称系统的正交关系

设 N 个自由度的线性非保守系统的运动微分方程可表示为

$$[M]\{\ddot{y}\}+[C]\{\dot{y}\}+[K]\{y\}=\{0\} \tag{2.1}$$

式中$\{y\}$是 N 维复数列阵，而$[M]$，$[C]$，$[K]$分别为系统的质量、阻尼和刚度系数矩阵，均是 $N\times N$ 阶的实数矩阵。设各系数矩阵不一定对称，$[M]$是可逆的，系统无重特征根。

* 徐尹格推荐。

特征运动有如下形式：

$$\{y\}=\{Y\}\exp[St] \tag{2.2}$$

将(2.2)式代入方程(2.1)，得

$$\{S^2[M]+S[C]+[K]\}\{Y\}=\{0\} \tag{2.3}$$

其中 S ($S=\lambda\pm i\omega$)是系统的复特征值，该方程有非零解的条件为

$$|S^2[M]+S[C]+[K]|=0 \tag{2.4}$$

方程(2.4)为系统的特征方程。按规定各系数矩阵均为实数矩阵，(2.4)式必有 N 对共轭复根。对应每一个复特征值 S_j，由(2.3)式可确定一特征列向量$\{Y_j\}$。

数学上，按下述方程：

$$\{X\}^T\{S^2[M]+S[C]+[K]\}=\{0\}^T \tag{2.5}$$

对应各复特征值 S_j，还可确定一系统的特征行向量$\{X_j\}^T$，本文称之为伴随特征向量。

若系统是对称的，有下式成立：

$$\{X\}=\{Y\} \tag{2.6}$$

设 S_i，S_j 是系统两个各异的复特征根，分别代入方程(2.3)和(2.5)，得

$$\{S_i^2[M]+S_i[C]+[K]\}\{Y_i\}=\{0\},\ \{X_j\}^T\{S_j^2[M]+S_j[C]+[K]\}=\{0\}^T \tag{2.7}$$

第一式左乘$\{X_j\}^T$，第二式右乘$\{Y_i\}$，然后两式相减，得

$$(S_i-S_j)\{X_j\}^T\{(S_i+S_j)[M]+[C]\}\{Y_i\}=0 \tag{2.8}$$

讨论方程(2.8)，得到一个重要的关系式：

$$\{X_j\}^T\{(S_i+S_j)[M]+[C]\}\{Y_i\}=\begin{cases}0 & (i\neq j)\\ m_j & (i=j)\end{cases} \tag{2.9}$$

式中 m_j 是特征常数。方程(2.9)正是非对称系统中特征向量与伴随特征向量之间的正交关系。

三、复特征值的摄动分析

设参数摄动之后的系数矩阵可表示为

$$[M]=[M_0]+\varepsilon[M_1],\ [C]=[C_0]+\varepsilon[C_1],\ [K]=[K_0]+\varepsilon[K_1] \tag{3.1}$$

式中$[M_0]$，$[C_0]$，$[K_0]$是系统初始的系数矩阵，$\varepsilon[M_1]$，$\varepsilon[C_1]$和 $\varepsilon[K_1]$分别表示各自的改变量。ε 是一个表征系统变化程度的小参数，若 $\varepsilon\to 0$ 时，应有$[M]\to[M_0]$，$[C]\to[C_0]$及$[K]\to[K_0]$。

由摄动理论，如果系统在初始条件下的解存在，则因小变化量 $\varepsilon[M_1]$，$\varepsilon[C_1]$，$\varepsilon[K_1]$所引起的特征值和特征向量的改变量，可用有关 ε 的解析函数来描述，如将第 j 阶特征值和特征向量按 ε 展开成幂级数形式[2]，即

$$S_j=S_j^{(0)}+\varepsilon S_j^{(1)}+\varepsilon^2S_j^{(2)}+\cdots,\ \{Y_j\}=\{Y_j^{(0)}+\varepsilon Y_j^{(1)}+\varepsilon^2Y_j^{(2)}+\cdots\} \tag{3.2}$$

将(3.2)式代入方程(2.3)，得

$$\begin{aligned}\{&(S_j^{(0)}+\varepsilon S_j^{(1)})^2([M_0]+\varepsilon[M_1])+(S_j^{(0)}+\varepsilon S_j^{(1)})([C_0]+\varepsilon[C_1])\\&+[K_0]+\varepsilon[K_1]\}\{Y_j^{(0)}+\varepsilon Y_j^{(1)}\}=\{0\}\end{aligned} \tag{3.3}$$

若仅求一阶微量 $\varepsilon S_j^{(1)}$，上式展开且略去$O(\varepsilon^2)$以上各阶微量后，ε^0 和 ε^1 项的系数应分别等于零，

得

$$\varepsilon^0:\quad D(S_j^{(0)})\{Y_j^{(0)}\}=\{0\} \tag{3.4a}$$

$$\varepsilon^1:\quad D(S_j^{(0)})\{Y_j^{(1)}\}+S_j^{(1)}\{2S_j^{(0)}[M_0]+[C_0]\}\{Y_j^{(0)}\}$$
$$+\{(S_j^{(0)})^2[M_1]+S_j^{(0)}[C_1]+[K_1]\}\{Y_j^{(0)}\}=\{0\} \tag{3.4b}$$

式中：

$$D(S_j^{(0)})=\{(S_j^{(0)})^2[M_0]+S_j^{(0)}[C_0]+[K_0]\}$$

方程(3.4b)可改写成：

$$D(S_j^{(0)})\{Y_j^{(1)}\}+S_j^{(1)}\{2S_j^{(0)}[M_0]+[C_0]\}\{Y_j^{(0)}\}$$
$$=-\{(S_j^{(0)})^2[M_1]+S_j^{(0)}[C_1]+[K_1]\}\{Y_j^{(0)}\} \tag{3.5}$$

上式左乘$\{X_j^{(0)}\}^T$，得

$$\{X_j^{(0)}\}^T D(S_j^{(0)})\{Y_j^{(1)}\}+S_j^{(1)}\{X_j^{(0)}\}^T\{2S_j^{(0)}[M_0]+[C_0]\}\{Y_j^{(0)}\}$$
$$=-\{X_j^{(0)}\}^T\{(S_j^{(0)})^2[M_1]+S_j^{(0)}[C_1]+[K_1]\}\{Y_j^{(0)}\} \tag{3.6}$$

由方程(2.7)和正交关系式(2.9)可知：

$$\{X_j^{(0)}\}^T D(S_j^{(0)})=\{0\}^T \tag{3.7}$$

$$\{X_j^{(0)}\}^T\{2S_j^{(0)}[M_0]+[C_0]\}\{Y_j^{(0)}\}=m_j \tag{3.8}$$

将(3.7)、(3.8)式代入方程(3.6)，得

$$S_j^{(1)}=-\frac{1}{m_j}\{X_j^{(0)}\}^T\{(S_j^{(0)})^2[M_1]+S_j^{(0)}[C_1]+[K_1]\}\{Y_j^{(0)}\} \tag{3.9}$$

此式就是复特征值的一阶摄动解。一般我们设初始系数矩阵是已知的，而初始的特征值$S_j^{(0)}$，特征向量$\{Y_j^{(0)}\}$和伴随特征向量$\{X_j^{(0)}\}^T$，可从原始的计算结果获得。因此，只要给出摄动量$\varepsilon[M_1]$，$\varepsilon[K_1]$和$\varepsilon[C_1]$，由(3.9)式很容易求得复特征值的一阶摄动量$\varepsilon S_j^{(1)}$，不需要重新求解复特征值问题。

特别需要说明，(3.9)式给出的是系统复特征值一阶摄动解的一般形式，对于各类离散的(M,K,C)系统，其特征值一阶摄动解均可从方程(3.9)的简化中得出。如对于无阻尼的实对称系统，$[C_0]$和$[C_1]$为零矩阵，并有下面几个关系式成立：

$$\left.\begin{aligned}&S_j^{(0)}=i\omega_j^{(0)};\quad S_j^{(1)}=i\omega_j^{(1)}\\&\{X_j^{(0)}\}=\{Y_j^{(0)}\}\\&m_j=i(2\omega_j^{(0)})\{Y_j^{(0)}\}^T[M_0]\{Y_j^{(0)}\}\end{aligned}\right\} \tag{3.10}$$

式中$i=\sqrt{-1}$。将(3.10)式代入(3.9)式，得

$$\omega_j^{(1)}=\frac{1}{2\omega_j^{(0)}\{Y_j^{(0)}\}^T[M_0]\{Y_j^{(0)}\}}\{Y_j^{(0)}\}^T\{[K_1]-(\omega_j^{(0)})^2[M_1]\}\{Y_j^{(0)}\} \tag{3.11}$$

若采用正规化的特征向量，即

$$\{Y_j^{(0)}\}^T[M_0]\{Y_j^{(0)}\}=1 \tag{3.12}$$

于是有：

$$\omega_j^{(1)}=\frac{1}{2\omega_j^{(0)}}\{Y_j^{(0)}\}^T\{[K_1]-(\omega_j^{(0)})^2[M_1]\}\{Y_j^{(0)}\} \tag{3.13}$$

上式与已有的推导结果是一致的[5]。

四、算 例

下面以数值实例说明本文所述方法的有效性。

考虑一个具有交叉刚度和交叉阻尼的两自由度振动系统，如图1所示。

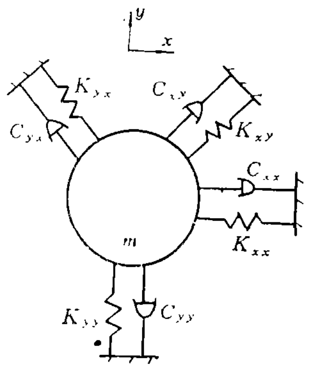

图 1

图中：$m=1$；$K_{xx}=K_{yy}=10$；$K_{yx}=-K_{xy}=4$；$C_{xx}=C_{yy}=4$；$C_{yx}=-C_{xy}=2$

初始的质量、阻尼和刚度矩阵为：

$$[M_0]=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix};\quad [C_0]=\begin{bmatrix}4 & -2\\ 2 & 4\end{bmatrix};\quad [K_0]=\begin{bmatrix}10 & -4\\ 4 & 10\end{bmatrix}$$

现设摄动小参数 ε 的值从5%到25%变化，各摄动矩阵取如下的形式：

$$[M_1]=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix};\quad [C_1]=\begin{bmatrix}0 & -2\\ 2 & 0\end{bmatrix};\quad [K_1]=\begin{bmatrix}10 & 0\\ 0 & 10\end{bmatrix}$$

表1和表2分别列举了各阶复特征值的实部 λ_j 和虚部 ω_j 的计算结果，并给出摄动解与精确解之间的相对误差 γ_j。表中只列出系统的两个复特征

表1 各阶实部 λ_j 的比较

j	ε(%)	0	5	10	15	20	25
1	精确解	−2.00000	−2.02614	−2.05582	−2.08893	−2.12548	−2.16550
	摄动解		−2.02441	−2.04881	−2.07322	−2.09763	−2.12204
	误差(%)		0.0855	0.3408	0.7519	1.3103	2.0071
2	精确解	−2.00001	−2.18438	−2.38863	−2.61695	−2.87451	−3.16780
	摄动解		−2.17560	−2.35119	−2.52678	−2.70237	−2.87797
	误差(%)		0.4024	1.5677	3.4458	5.9887	9.1497

表2 各阶虚部 ω_j 的比较

j	ε(%)	0	5	10	15	20	25
1	精确解	1.64575	1.69625	1.74517	1.79239	1.83771	1.88076
	摄动解		1.69694	1.74812	1.79931	1.85049	1.90168
	误差(%)		0.0404	0.1692	0.3860	0.6956	1.1123
2	精确解	3.64576	3.90672	4.18959	4.49825	4.83770	5.21408
	摄动解		3.89694	4.14813	4.39931	4.65049	4.90168
	误差(%)		0.2502	0.9896	2.1990	3.8697	5.9914

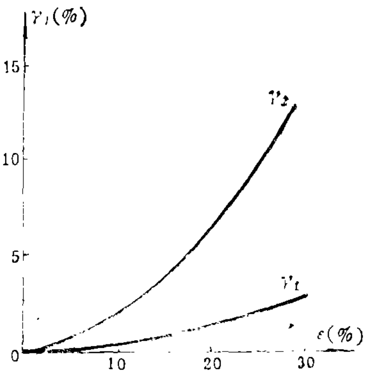

图 2 实部误差曲线

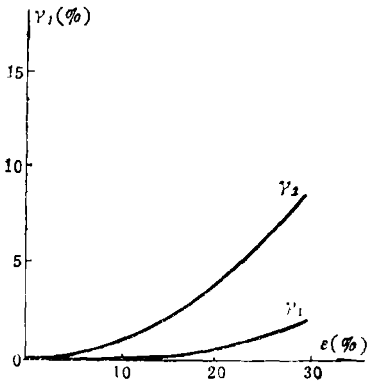

图 3 虚部误差曲线

值的变化情况，另外两个共轭复根有着相应的改变。

五、结　　论

通过上述讨论可知，一阶摄动量 $\varepsilon S_j^{(1)}$ 有如下特点：

1) 系统某一阶复特征值的摄动量，除受到系数矩阵摄动量的影响外，仅与本阶的初始特征值、特征向量及伴随特征向量有关。

2) 系数矩阵中各元素的变化引起的复特征值一阶摄动量，符合线性叠加原则。

摄动法求解多自由度系统的复特征值，它利用了系统的初始解，仅需作一些矩阵的代数运算，只要求系数的改变量 $\varepsilon[M_1]$,$\varepsilon[C_1]$,$\varepsilon[K_1]$ 是小量，比重新求解方程(1.1)要简便得多。从数值实例看到，当结构参数的变化在15%以内时，一阶摄动解的误差小于4%，较真实地反映了系统参数变化对系统复特征值的影响趋势，这对于结构参数的动态优化设计有重要的意义。

本文承张瑞林副教授的热情指导和支持，特此致以衷心的感谢。

参 考 文 献

[1] 胡海昌，参数小变化对本征值的影响，力学与实践，**3**，2 (1981)，29—31.

[2] Chen, J.C. and B.K. Wade, Matrix perturbation for structural dynamic analysis, *AIAA Journal*, **15**, 8 (1977), 1095—1100.

[3] Lund, J. W., Sensitivity of critical speeds of a rotor to changes in the design, *J. of Mech. Design*, **102**, 1 (1980), 115—121.

[4] Chen, J.C. and J. A. Carda, Analytical model improvement using modal test results, *AIAA Journal*, **18**, 6 (1980), 648—690.

[5] 陈塑寰，弹性结构振动特征值问题摄动法的一般理论，吉林工业大学学报，4 (1983)，1—12.

[6] 方同，多自由度线性阻尼系统的模态分析，固体力学学报，3 (1981)，312—316.

First-Order Perturbation Solution to the Complex Eigenvalues

Li Ji-ming Wang Wei

(*Zhengzhou Institute of Technology, Zhengzhou*)

Abstract

The matrix perturbation method is extended to discrete linear nonconservative system with unsymmetrical matrices in this article. By introducing the concept of the adjoint complex eigenvector and by making use of the orthogonality relationship in the complex mode theory, the first-order perturbation solution to the complex eigenvalues is derived. Numerical example shows that this method is efficient and practicable.