应用数学和力学，第8卷第6期（1987年6月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

奇摄动线性代数方程组及其对病态方程的应用*

林 武 忠

（华东师范大学，1986年4月10日收到）

摘 要

本文首先从一个曲柄导杆机构的优化问题提出了含小参数线性代数方程组的奇摄动问题．然后利用摄动方法证明了这个问题解的存在唯一性，同时给出了解的渐近展开和误差估计．最后讨论了所得结果对求解病态方程的应用．

一、引 言

在GN2型的工业包缝机中，其针杆机构采用如图1所示的曲柄导杆机构．当曲柄AB摆动时，导杆OB的端点M所描绘的曲线就是针杆的运动轨迹．实际要求此曲线尽量接近直线，但对现有的机构参数r_1，r_2，r_3来说，当点M的纵坐标y满足$|y|\leqslant 12$mm时，其横坐标x的摆动幅度$\Delta=\max\limits_{|y|\leqslant 12}(x)-\min\limits_{|y|\leqslant 12}(x)\approx 0.02$mm．这对机器的性能，特别是零件的磨损有较大的影响．因此问题成为：如何选择参数r_1，r_2，r_3，使得当$|y|\leqslant 12$时，点$M(x,\ y)$的运动曲线最接近于某一给定的直线l：$x=c$，这里$c=73.3$mm．

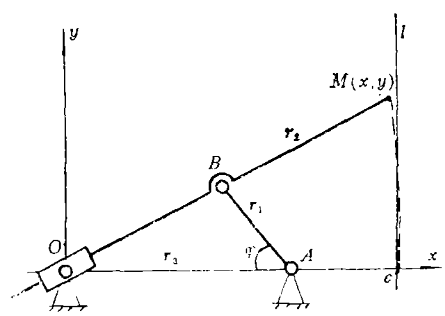

图 1

我们求解上述问题的步骤是：

（1） 利用几何关系得出点$M(x,\ y)$的运动曲线方程

$$F(x,\ y;\ r_1,\ r_2,\ r_3)\equiv r_2^2-r_1^2+(r_3-x)^2-2\sqrt{x^2+y^2}\,r_2+\frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}}r_2r_3+y^2=0$$

（2） 将直线方程$x=c$代入上式得

$$F(c,\ y;\ r_1,\ r_2,\ r_3)=y^2+r_2^2-r_1^2+(r_3-c)^2-2\sqrt{c^2+y^2}\,r_2+\frac{2cr_2r_3}{\sqrt{c^2+y^2}}$$

（3） 利用可逆参数变换

* 戴世强推荐．

$$r_1=\left[u_2^2+\left(c-\frac{u_3}{cu_2}\right)^2-u_1\right]^{\frac{1}{2}},\quad r_2=u_2,\quad r_3=\frac{u_3}{cu_2} \tag{1.1}$$

将$F(c,\ y;\ r_1,\ r_2,\ r_3)$变成关于$u_1$，$u_2$，$u_3$为线性的函数

$$\delta(y;\ u_1,\ u_2,\ u_3)=y^2+u_1-2\sqrt{c^2+y^2}u_2+\frac{2}{\sqrt{c^2+y^2}}u_3$$

（4） 利用最小二乘法对$(u_1,\ u_2,\ u_3)\in\mathbf{R}^3$求函数

$$m(u_1,\ u_2,\ u_3)=\int_{-12}^{12}\delta^2(y;\ u_1,\ u_2,\ u_3)dy$$

的最小值，从而得出关于$(u_1,\ u_2,\ u_3)$的线性代数方程组

$$Au=b \tag{1.2}$$

其中

$$A=\begin{bmatrix} 24 & -24\alpha-2c^2\beta & 4\beta \\ -24\alpha-2c^2\beta & 96(\alpha^2-96) & -96 \\ 4\beta & -96 & \frac{8}{c}\operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{12}{c}\right) \end{bmatrix},$$

$$u=\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix},\quad b=\begin{bmatrix} -1152 \\ 6\alpha(\alpha^2+12^2)-\frac{c^4}{2}\beta \\ 2c^2\beta-24\alpha \end{bmatrix}$$

$$\alpha=\sqrt{c^2+12^2},\quad \beta=\ln\left(\frac{\alpha+12}{c}\right),\quad c=73.3$$

（5） 由（1.2）求出u，然后代入（1.1）即得机构的最优参数。

由于A的行列式是由线性无关函数 1，$-2\sqrt{c^2+y^2}$，$2/\sqrt{c^2+y^2}$得到的Gram行列式，所以$\det A\neq 0$，因而（1.2）总有唯一解。但这是一个病态方程，经过仔细分析可知其谱条件数高达10^{17}数量级。关于病态方程问题已有不少讨论，但大都是从数值分析和矩阵计算的角度考虑（参看[2]、[3]）。本文准备从奇异摄动方法（参看[1]）的观点讨论这个问题。为此，我们考虑含小参数ε的线性代数方程组

$$A(\varepsilon)\xi=b(\varepsilon) \tag{1.3}$$

如果当$|\varepsilon|$充分小时，$n\times n$阶方阵$A(\varepsilon)$及n维向量$b(\varepsilon)$为ε的解析函数，而且$\det A(0)\neq 0$，则如所熟知，(1.3)的解$\xi(\varepsilon)$也解析地依赖于ε，且可展成ε的幂级数

$$\xi(\varepsilon)=\sum_{j=0}^{\infty}\xi_j\varepsilon^j \tag{1.4}$$

这时（1.3）的退化方程组为

$$A_0\xi=b_0 \tag{1.5}$$

这里$A_0=A(0)$，$b_0=b(0)$。我们称（1.3)为（1.5）的摄动方程组，并称这种摄动为正则摄动。如果对$|\varepsilon|>0$充分小有$\det A(\varepsilon)\neq 0$，但$\det A(0)=0$，且（1.5）可解，（1.3）是否仍有形如（1.4）的级数解？我们称此问题为线性代数方程组的奇异摄动问题。本文首先讨论了这个问题解的存在唯一性，同时给出了解的渐近展开和误差估计；其次利用求解上面提出的曲柄导杆机构最优设计问题，说明这个方法对求解病态方程组的应用。从分支理论观点

看，若上述奇摄动问题仍有形如（1.4）的解$\xi(\varepsilon)$，则$\varepsilon=0$，$\xi=\xi(0)$显然为方程组（1.3）的分支点。

二、奇摄动问题的求解

假设当$|\varepsilon|$充分小时，$A(\varepsilon)$和$b(\varepsilon)$为ε的解析函数，于是可将它们展成ε的幂级数

$$A(\varepsilon)=\sum_{j=0}^{\infty}A_j\varepsilon^j,\quad b(\varepsilon)=\sum_{j=0}^{\infty}b_j\varepsilon^j \tag{2.1}$$

分别取向量x与方阵A的模为

$$|x|=\sum_{j=1}^{n}|x^j|,\ |A|=\max_{1\le j\le n}\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|$$

其中x^j $(j=1,2,\cdots,n)$为x的分量，而a_{ij} $(i,j=1,2,\cdots,n)$为A的元素。

由于$\det A_0=0$，故可令

$$f_1,\ f_2,\ \cdots,\ f_m \qquad (m<n)$$

为A_0中最大线性无关向量，且记$n\times m$阶矩阵

$$F=[f_1\ f_2\ \cdots\ f_m]$$

从而存在$m\times n$阶矩阵$\tilde{A}_0$使得

$$A_0=F\tilde{A}_0 \tag{2.2}$$

而且由（1.5）的可解性即知，存在m维向量

$$\lambda_0=(\lambda_0^1\ \cdots\ \lambda_0^m)^T$$

使得

$$b_0=F\lambda_0 \tag{2.3}$$

令$(m+n)\times(m+n)$阶方阵

$$B=\begin{bmatrix}0 & \tilde{A}_0\\ F & A_1\end{bmatrix} \tag{2.4}$$

定理 1 若$\det B\neq 0$，且存在常数$M_1>0$使得（2.1）中两个幂级数的系数A_j，b_j满足

$$|A_j|\leqslant M_1,\ |b_j|\leqslant M_1 \qquad (j=2,\ 3,\ \cdots) \tag{2.5}$$

则当

$$|\varepsilon|<\frac{1}{1+M|B^{-1}|} \tag{2.6}$$

时，方程组（1.3）存在唯一形如（1.4）的级数解，这里$M=\max(1,\ M_1)$。

证明 将（1.4）、（2.1）代入（1.3），并比较两边ε同次幂的系数即得

$$\left.\begin{aligned}&A_0\xi_0=b_0\\&A_0\xi_1+A_1\xi_0=b_1\\&\cdots\ \cdots\ \cdots\\&A_0\xi_k+A_1\xi_{k-1}+\cdots+A_k\xi_0=b_k\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned}\right\} \tag{2.7}$$

令

$$\left.\begin{array}{ll}\lambda_k=\tilde{A}_0\xi_k,\ \eta_k=\begin{pmatrix}\lambda_{k+1}\\ \xi_k\end{pmatrix} & (k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)\\ \tilde{b}_1=\begin{pmatrix}\lambda_0\\ b_1\end{pmatrix},\ \tilde{b}_k=\begin{pmatrix}0\\ b_k\end{pmatrix} & (k=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)\\ \tilde{A}_2=\begin{bmatrix}-I_m & 0\\ 0 & A_2\end{bmatrix},\ \tilde{A}_k=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & A_k\end{bmatrix} & (k=3,\ 4,\ 5,\cdots)\end{array}\right\} \tag{2.8}$$

其中I_m为$m\times m$阶单位方阵。于是可将（2.7）改写成与之等价的方程组

$$B\eta_0=\tilde{b}_1,\ B\eta_k=\tilde{b}_{k+1}-\sum_{j=2}^{k+1}\tilde{A}_j\eta_{k+1-j}\qquad(k=1,2,\cdots) \tag{2.9}$$

由于$\det B\neq0$，因此由（2.9）即可逐次求出η_k（$k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$），从而完全决定级数（1.4）的系数ξ_j（$j=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$）。

另一方面，由（2.5）、（2.8）即知存在常数$M=\max(1,\ M_1)>0$使得对所有$k=2,\ 3,\ \cdots$有

$$|\tilde{A}_k|\leqslant M,\ |\tilde{b}_k|\leqslant M$$

于是由（2.9）不难推出

$$|\eta_k|\leqslant M|B^{-1}|(1+|\eta_0|)(1+M|B^{-1}|)^{k-1}\qquad(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

从而

$$\left|\sum_{j=0}^{\infty}\xi_j\varepsilon^j\right|\leqslant|\eta_0|+\sum_{j=1}^{\infty}|\eta_j||\varepsilon|^j$$

$$\leqslant|\eta_0|+\sum_{j=1}^{\infty}M|B^{-1}|(1+|\eta_0|)(1+M|B^{-1}|)^{j-1}|\varepsilon|^{j-1}$$

由此即见，只要条件（2.6）成立，则

$$\left|\sum_{j=0}^{\infty}\xi_j\varepsilon^j\right|\leqslant|\eta_0|+\frac{M|B^{-1}|(1+|\eta_0|)|\varepsilon|}{1-(1+M|B^{-1}|)|\varepsilon|} \tag{2.10}$$

即级数（1.4）收敛。至于唯一性，由$\det B\neq0$即足以保证。定理证毕。

定理2　假设当$|\varepsilon|$充分小时有$A(\varepsilon)$，$b(\varepsilon)\in C^{n+1}$，$n\geqslant1$，且$\det B\neq0$，则（1.3）存在唯一的如下近似解

$$\tilde{\xi}(\varepsilon)=\xi_0+\xi_1\varepsilon+\cdots+\xi_{n-1}\varepsilon^{n-1} \tag{2.11}$$

此外还存在常数$\widetilde{M}>0$使得

$$|\xi(\varepsilon)-\tilde{\xi}(\varepsilon)|<\widetilde{M}\varepsilon^n$$

其中$\xi(\varepsilon)$为（1.3）的精确解。

证明　由于$A(\varepsilon)$，$b(\varepsilon)\in C^{n+1}$，故由Taylor公式，$A(\varepsilon)$，$b(\varepsilon)$有展开式

$$\left.\begin{array}{l}A(\varepsilon)=A_0+A_1\varepsilon+\cdots+A_n\varepsilon^n+A_{n+1}(\varepsilon)\varepsilon^{n+1}\\ b(\varepsilon)=b_0+b_1\varepsilon+\cdots+b_n\varepsilon^n+b_{n+1}(\varepsilon)\varepsilon^{n+1}\end{array}\right\} \tag{2.12}$$

其中余项$A_{n+1}(\varepsilon)$和$b_{n+1}(\varepsilon)$在$\varepsilon=0$处连续且

$$A_{n+1}(0)=\frac{1}{(n+1)!}A^{(n+1)}(0),\ b_{n+1}(0)=\frac{1}{(n+1)!}b^{(n+1)}(0)$$

令

$$\xi(\varepsilon)=\bar{\xi}(\varepsilon)+R_n \tag{2.13}$$

将（2.11），（2.12），（2.13）代入（1.3），并比较两边ε的同次幂系数．即得（2.7）式的前（$n+1$）个方程组以及

$$A(\varepsilon)R_n=b(\varepsilon)-A(\varepsilon)\bar{\xi}(\varepsilon)$$

利用（2.8）式的记法，容易将这些方程组分别写成与之等价的方程组

$$\left.\begin{aligned}&B\eta_0=\tilde{b}_1\\&B\eta_1+\tilde{A}_2\eta_0=\tilde{b}_2\\&\cdots\ \cdots\ \cdots\\&B\eta_{n-1}+\tilde{A}_2\eta_{n-2}+\cdots+\tilde{A}_n\eta_0=\tilde{b}_n\end{aligned}\right\} \tag{2.14}$$

以及

$$\tilde{A}(\varepsilon)\tilde{R}_n=\tilde{b}(\varepsilon)-\tilde{A}(\varepsilon)\bar{\eta}(\varepsilon) \tag{2.15}$$

其中

$$\tilde{A}(\varepsilon)=\begin{bmatrix}-I_m\varepsilon & \tilde{A}_0\\ F & \dfrac{A(\varepsilon)-A_0}{\varepsilon}\end{bmatrix},\quad \tilde{b}(\varepsilon)=\begin{pmatrix}\lambda_0\\ \dfrac{b(\varepsilon)-b_0}{\varepsilon}\end{pmatrix}$$

$$\bar{\eta}(\varepsilon)=\sum_{k=0}^{n-1}\eta_k\varepsilon^k,\quad \tilde{R}_n=\eta(\varepsilon)-\bar{\eta}(\varepsilon),\quad \varepsilon\neq 0$$

而$\eta(\varepsilon)$为方程组

$$\tilde{A}(\varepsilon)\eta=\tilde{b}(\varepsilon) \tag{2.16}$$

的解。由于$\det B\neq 0$，故由（2.14）可唯一确定$\bar{\eta}(\varepsilon)$，且易见

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\tilde{A}(\varepsilon)=B,\quad \lim_{\varepsilon\to 0}\tilde{b}(\varepsilon)=\tilde{b}_1$$

因此可定义$\tilde{A}(0)=B$，$\tilde{b}(0)=\tilde{b}_1$。因而由$\tilde{A}(\varepsilon)$在$\varepsilon=0$处的连续性即知当$|\varepsilon|$充分小时有

$$\det\tilde{A}(\varepsilon)\neq 0$$

于是由（2.12），（2.14），（2.15）即得

$$\tilde{R}_n=\tilde{A}^{-1}(\varepsilon)[\tilde{b}(\varepsilon)-\tilde{A}(\varepsilon)\bar{\eta}(\varepsilon)]=\tilde{A}^{-1}(\varepsilon)\bar{b}_n(\varepsilon)\varepsilon^n \tag{2.17}$$

其中

$$\bar{b}_n(\varepsilon)=\tilde{b}_{n+1}(\varepsilon)-\tilde{A}_{n+1}(\varepsilon)\bar{\eta}(\varepsilon)-\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=k+1}^{n}\tilde{A}_j\eta_{n+k-j}\varepsilon^{k-1}$$

特别

$$\bar{b}_n(0)=\tilde{b}_{n+1}(0)-\tilde{A}_{n+1}(0)\eta_0-\sum_{j=2}^{n}\tilde{A}_j\eta_{n+1-j},\quad \tilde{A}^{-1}(0)=B^{-1}$$

由此即见存在常数$\tilde{M}>0$使得当$|\varepsilon|$充分小时有

$$|\tilde{A}^{-1}(\varepsilon)\bar{b}_n(\varepsilon)|\leqslant\tilde{M}$$

因而由（2.17）即得

$$|\tilde{R}_n|\leqslant\tilde{M}\varepsilon^n$$

但是

$$|R_n|=|\xi(\varepsilon)-\bar{\xi}(\varepsilon)|\leqslant|\eta(\varepsilon)-\bar{\eta}(\varepsilon)|=|\tilde{R}_n|$$

故定理得证。

三、关于B的非奇异性

关于 B 的非奇异性有如下两条命题：

命题 1 若 $\det A_1 \neq 0$，且 $D=-\tilde{A}_0 A_1^{-1} F$ 非异，则 $\det B \neq 0$。

证明 直接验证即知

$$B^{-1}=\begin{bmatrix} D^{-1} & -D^{-1}\tilde{A}_0 A_1^{-1} \\ -A_1^{-1}FD^{-1} & A_1^{-1}+A_1^{-1}FD^{-1}\tilde{A}_0 A_1^{-1} \end{bmatrix}$$

但当 $\det A_1=0$ 时，是否必定有 $\det B=0$？答案是否定的。实际上，在病态方程组

$$A\xi=b \tag{3.1}$$

中，$\det A$往往很小，但却不为零，亦即A的 n 个列向量几乎位于某个维数为 $m(1\leqslant m<n)$的超平面上，因此可以取A的某m个列向量作为 f_1，f_2，…，f_m（不妨就取 A 的前 m 个列向量）。对A和 b 作如下分块

$$A=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix},\quad b=\begin{bmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \end{bmatrix} \tag{3.2}$$

其中 A_{11} 为 $m\times m$ 阶方阵，$\bar{b}_1$ 为 m 维向量，其余为相应的阶数或维数。不失一般性，可设 $\det A_{11}\neq 0$。于是令

$$F=\begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{21} \end{bmatrix},\quad \tilde{A}_0=[I_m \;\; A_{11}^{-1}A_{12}]$$

$$A_1=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\varepsilon_0}(A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}) \end{bmatrix},\quad \varepsilon_0\neq 0$$

则显然 $\det A_1=0$，而且

$$\begin{aligned} A&=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\varepsilon_0}(A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}) \end{bmatrix}\varepsilon_0 \\ &=F\tilde{A}_0+A_1\varepsilon_0=A_0+A_1\varepsilon_0 \end{aligned}$$

从而

$$B=\begin{bmatrix} 0 & I_m & A_{11}^{-1}A_{12} \\ A_{11} & 0 & 0 \\ A_{21} & 0 & \frac{1}{\varepsilon_0}(A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}) \end{bmatrix}$$

由此即见

$$|\det B|=|\det I_m|\,|\det A|/|\varepsilon_0|^{n-m}\neq 0$$

因而得到：

命题 2 假设数值方阵A有 $m\times m$ 阶的非异子方阵，则对任给的 $\varepsilon_0\neq 0$，总存在$n\times n$ 阶方阵 A_0，A_1 使得 $A=A_0+A_1\varepsilon_0$，且对应的B有$|\det B|=|\det A|/|\varepsilon_0|^{n-m}$，其中 A_0 的秩为 m，而A_1的秩不大于 $n-m$。

四、对求解病态方程的应用

考虑方程（1.3）的如下特殊情形

$$(A_0+A_1\varepsilon+A_2\varepsilon^2)\xi=b_0+b_1\varepsilon+b_2\varepsilon^2 \tag{4.1}$$

假设 $\det B\neq 0$，则（2.9）成为

$$\eta_0=B^{-1}\tilde{b}_1,\ \eta_1=B^{-1}(\tilde{b}_2-\tilde{A}_2\eta_0),\ \eta_2=-B^{-1}\tilde{A}_2\eta_1$$

$$\eta_3=(-B^{-1}\tilde{A}_2)^2\eta_1,\ \cdots,\ \eta_{n+1}=(-B^{-1}\tilde{A}_2)^n\eta_1,\ \cdots$$

所以

$$\begin{aligned}\eta&=\eta_0+\eta_1\varepsilon+\eta_2\varepsilon^2+\cdots+\eta_{n+1}\varepsilon^{n+1}+\cdots\\&=\eta_0+\eta_1\varepsilon+(-B^{-1}\tilde{A}_2)\eta_1\varepsilon^2+(-B^{-1}\tilde{A}_2)^2\eta_1\varepsilon^3+\cdots\\&\quad+(-B^{-1}\tilde{A}_2)^n\eta_1\varepsilon^{n+1}+\cdots\\&=\eta_0+\left[I_{n+m}+\sum_{n=1}^{\infty}(-B^{-1}\tilde{A}_2\varepsilon)^n\right]\eta_1\varepsilon\end{aligned}$$

因此代替定理 1 中的条件（2.6），只要$|\varepsilon|<1/|B^{-1}\tilde{A}_2|$，则上式成为

$$\eta=\eta_0+(I_{m+n}+B^{-1}\tilde{A}_2\varepsilon)^{-1}\eta_1\varepsilon \tag{4.2}$$

这就得到如下定理：

定理 3 对于奇摄动方程组（4.1），如果对应的 $\det B\neq 0$，且$|B^{-1}\tilde{A}_2\varepsilon|<1$，则其唯一的精确解为向量

$$\eta=\eta_0+(I_{m+n}+B^{-1}\tilde{A}_2\varepsilon)^{-1}\eta_1\varepsilon \tag{4.3}$$

的后 n 个分量，其中 $\eta_0=B^{-1}\tilde{b}_1$，$\eta_1=B^{-1}(\tilde{b}_2-\tilde{A}_2\eta_0)$。

令

$$B^{-1}=\begin{bmatrix}B_1 & B_2\\ B_3 & B_4\end{bmatrix} \tag{4.4}$$

其中 B_1，B_2，B_3，B_4 分别为 $m\times m$，$m\times n$，$n\times m$，$n\times n$ 阶矩阵。

推论 如果奇摄动方程组

$$(A_0+A_1\varepsilon)\xi=b_0+b_1\varepsilon \tag{4.5}$$

所对应的B非异，且B^{-1}有形如（4.4）的分块，以及$|B_1\varepsilon|<1$，则其精确解为

$$\xi=\xi_0+B_3(I_m-B_1\varepsilon)^{-1}\lambda_1\varepsilon \tag{4.6}$$

其中 $\xi_0=B_3\lambda_0+B_4b_1$，$\lambda_1=B_1\lambda_0+B_2b_1$

实际上，由（2.8）即知

$$\tilde{A}_2=\begin{bmatrix}-I_m & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

于是由此及（4.4）不难推出

$$I_{m+n}+B^{-1}\tilde{A}_2\varepsilon=\begin{bmatrix}I_m-B_1\varepsilon & 0\\ -B_3\varepsilon & I_n\end{bmatrix}$$

因此当$|B_1\varepsilon|<1$时有

$$(I_{m+n}+B^{-1}\mathcal{I}_2\varepsilon)^{-1}=\begin{bmatrix}(I_m-B_1\varepsilon)^{-1} & 0\\ B_3(I_m-B_1\varepsilon)^{-1}\varepsilon & I_n\end{bmatrix}$$

将此代入（4.3）并注意到这时 $\lambda_2=B_1\lambda_1$，$\xi_1=B_3\lambda_1$，即得（4.6）。

由于计算机的截断位数总是有限的，因此对于病态方程组(3.1)，一般只能化成（4.1）的形式。例如在十位有效数字的计算机上，对前面提出的曲柄导杆机构进行计算，可先在（1.2）中令

$$u_1=v_1,\quad u_2=v_2/100,\quad u_3=100v_3 \tag{4.7}$$

则（1.2）就成为

$$\begin{bmatrix}24 & -35.34053649\cdots & 65.19527371\cdots\\ -35.34053649\cdots & 52.040544 & -96\\ 65.19527371\cdots & -96 & 177.1037445\cdots\end{bmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\\ v_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1152\\ 1702.346507\cdots\\ -3118.330753\cdots\end{pmatrix} \tag{4.8}$$

我们取

$$F=\begin{pmatrix}65.19527372\\ -96\\ 177.1037446\end{pmatrix},\quad A_1=\begin{bmatrix}373.5396568 & -1101.458778 & 0\\ -1101.458778 & 3247.887847 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$b_1=\begin{pmatrix}-4082842.838\\ 12039207.63\\ 0\end{pmatrix},\quad A_2=\frac{1}{\varepsilon_0^2}(A-A_0-A_1\varepsilon_0),\quad b_2=\frac{1}{\varepsilon_0^2}(b-b_0-b_1\varepsilon_0)$$

$$\mathcal{I}_0=(0.368119115\quad -0.5420551678),\quad \lambda_0=-17.60736771,\quad \varepsilon_0=10^{-6}.$$

于是只要用 v 和 ε_0 分别代替（4.1）中的 ε 和 ξ，（4.8）就成为（4.1）的形式，从而有

$$B=\begin{bmatrix}0 & 0.368119115 & -0.5420551678 & 1\\ 65.19527372 & 373.5396568 & -1101.458778 & 0\\ -96 & -1101.458778 & 3247.887847 & 0\\ 177.1037446 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\tilde{b}_1=\begin{pmatrix}-17.60736771\\ -4082842.838\\ 12039207.63\\ 0\end{pmatrix},\quad \det B\approx-614.8684383$$

用通常的消去法求解零次近似方程 $Bv_0=\tilde{b}_1$ 即得

$$v_0\approx\begin{pmatrix}0\\ 21685.24148\\ 11060.91371\\ -2004.733832\end{pmatrix}$$

由于这时舍入误差的影响已大大超过定理 2 中渐近展开的余项误差，因此再求高次近似的意义就不大了。不过 v_0 对实际应用也已足够精确了。实际上，由 v_0 及（4.7）和（1.1）即得

$$r_1=12.58269923\text{mm},\quad r_2=110.6091371\text{mm},\quad r_3=-24.7264484\text{mm}$$

将此代入点$M(x, y)$的参数运动方程

$$\left.\begin{aligned} x&=\{r_2[(r_1\sin\varphi)^2+(r_1\cos\varphi-r_3)^2]^{-\frac{1}{2}}\}(r_1\cos\varphi-r_3) \\ y&=\{1-r_2[(r_1\sin\varphi)^2+(r_1\cos\varphi-r_3)^2]^{-\frac{1}{2}}\}r_1\sin\varphi \end{aligned}\right\}$$

即知当$|\varphi|\leqslant 28^\circ$时有$|y|\leqslant 12.0827\text{mm}$，$\Delta=\max\limits_{|\varphi|\leqslant 28^\circ}(x)-\min\limits_{|\varphi|\leqslant 28^\circ}(x)<0.00006(\text{mm})$。这在机械制造工艺上已可看成直线了。

如果我们利用命题 2 的作法来求解病态方程，那么由定理 3 的推论即知这时（3.1）的精确解为

$$\xi=\begin{bmatrix} A_{11}^{-1}\bar{b}_1-A_{11}^{-1}A_{12}(A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1}(\bar{b}_2-A_{21}A_{11}^{-1}\bar{b}_1) \\ (A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1}(\bar{b}_2-A_{21}A_{11}^{-1}\bar{b}_1) \end{bmatrix} \qquad (4.9)$$

这里利用了（3.2）的记号。实际上（4.9）可由（3.2）直接代入（3.1）推出；但在此值得注意的是（4.9）可看成递推公式，例如对六阶的 Hilbert 矩阵（所谓典型的病态矩阵！）

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & \cdots & 1/6 \\ 1/2 & 1/3 & \cdots & 1/7 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1/6 & 1/7 & \cdots & 1/11 \end{pmatrix} \text{以及}\ b=\begin{pmatrix} 1/7 \\ 1/8 \\ \vdots \\ 1/12 \end{pmatrix}$$

可不必求矩阵逆，而直接利用（4.9）对n从 1 到 6 进行递推，因而求出其精确解为

$$\xi=\left(-\frac{1}{924}\quad\frac{1}{22}\quad-\frac{5}{11}\quad\frac{20}{11}\quad-\frac{75}{22}\quad 3\right)^T$$

但（4.9）却难于求解上述的曲柄导杆机构问题。

参 考 文 献

[1] Nayfeh, A. H., *Introduction to Perturbation Techniques*, John Wiley and Sons (1981).

[2] 曹志浩、张玉德、李瑞遐编，《矩阵计算和方程求根》，高等教育出版社（1984）.

[3] J. M. 奥特加著（张丽君等译），《数值分析》，高等教育出版社（1983）.

Singular Perturbation of Linear Algebraic Equations with Application to Stiff Equations

Lin Wu-zhong

(*East China Normal University, Shanghai*)

Abstract

In this paper the singular perturbation problem of linear algebraic equations with a small parameter is presented by an example in practice. The existence and uniqueness theorem of its solution is proved by the perturbation method and the estimation of error for its approximate solution is given. Finally, the example mentioned above explaining how to apply the theory to solve the stiff equations is shown.