应用数学和力学，第8卷第6期（1987年6月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

一类算子的正定性*

武际可　　袁　勇

（北京大学力学系，1986年4月26日收到）

摘　要

本文给出了弹性力学和弹性结构力学中出现的一类十分广泛的算子的正定性的证明．通常遇到的二维三维弹性力学问题，薄板问题等的方程组的正定性问题可以看为它的特殊情形．

研究弹性力学问题和弹性结构力学问题的解的性质，以及采用近似解法时的误差估计，常常碰到一个重要的不等式．这个不等式称为能量泛函的正定性．这类问题是各式各样的．例如二维三维弹性力学问题，壳、杆系、板、薄膜等问题．以往都是对不同问题采用不同方法证明其正定性．例如对于Laplace算子有Poincaré不等式；对于三维弹性力学问题有Korn不等式[1]；Bernadou和Ciarlet[2]，武际可[3]，王大钧和胡海昌[4]分别沿不同的途径给出了薄壳问题能量泛函的正定性的证明．本文给出这类问题的一般提法，给出了这类问题正定性的一个普遍证明，证明中假设的条件是易于验证的．按照本文得到的结论，上面提到的各种特殊问题的正定性都可以看为它的特殊情况．

令[5]

$$u=(u_1,u_2,\cdots,u_N),\ \ v=(v_1,v_2,\cdots,v_M),\ \ w=(w_1,w_2,\cdots,w_M) \tag{1}$$

是定义在某有界区域$\Omega\subset R^n$上的N维和M维函数向量（通常设$M\geqslant N$）．它们的自变量是

$$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\qquad\in\Omega$$

令

$$L=(L_{ij})_{N\times M} \tag{2}$$

是定义在Ω上的线性微分算子矩阵，并设其系数充分光滑．根据分部积分的Green公式定义L的共轭算子L^*（$(M\times N)$阶）如下

$$\int_\Omega Lv\cdot ud\Omega=\sum_{i=0}^{n_d-1}\int_{\partial\Omega}K^iv\cdot D^iuds+\int_\Omega v\cdot L^*ud\Omega \tag{3}$$

这里n_d为算子L中最高阶微商的阶数．K^i，D^i为定义在Ω上的算子．

令

$$f=(f_1,f_2,\cdots,f_N) \tag{4}$$

为定义在Ω上的已知向量函数，$f_i\in L^2(\Omega)$．

且

* 朱照宣推荐．

$$p^i=(p_1^i,p_2^i,\cdots,p_N^i) \qquad (i=0,1,\cdots,n_d-1) \tag{5}$$

为定义在$\partial_v\Omega$上的已知函数向量。这里我们有$\partial_u\Omega\cup\partial_v\Omega=\partial\Omega$。而且假定$\partial_u\Omega$是$\partial\Omega$上开区域的闭包。

考虑函数向量u,v,w所满足的边值问题

$$Lv+f=0 \tag{6}$$

$$w=L^*u \tag{7}$$

$$v=Aw \tag{8}$$

$$D^iu\Big|_{\partial_u\Omega}=0 \qquad (i=0,1,\cdots,n_d-1) \tag{9}$$

$$K^iv\Big|_{\partial_v\Omega}=p^i \qquad (i=0,1,\cdots,n_d-1) \tag{10}$$

(8)中的A是正定对称的$M\times M$阶矩阵，其元素是定义在Ω上的光滑函数。

令算子L^*中包含u_1到n_1阶微商，u_2到n_2阶微商等。再令$\max(n_1,n_2,\cdots,n_N)=n_d$。我们假定$u\in H^{n_1}\times H^{n_2}\times\cdots\times H^{n}=H\subset L^2\times L^2\times\cdots\times L^2$。这里$H^{n_i}$是在边界上满足(9)的函数$u_i$组成的$n_i$阶Sobolev空间。

(6)～(10)中，如果(6)和(10)中的v用(7)、(8)代入，最后便得到关于u的边值问题。这个边值问题的广义解和泛函

$$J(u)=a(u,u)-2(f,u) \tag{11}$$

的极小问题是等价的。其中泛函

$$a(u^1,u^2)=\int_\Omega L^*u^1\cdot(AL^*u^2)d\Omega$$
$$=\int_\Omega u^1\cdot L(AL^*u^2)d\Omega=\int_\Omega u^1\cdot Bu^2d\Omega \tag{12}$$

$$(f,u)=\int_\Omega f\cdot ud\Omega+\sum_{i=0}^{n_i-1}\int_{\partial_v\Omega}p^i\cdot D^iuds \tag{13}$$

式中 $B=LAL^*$是$N\times N$阶微分算子矩阵。$a(u,u)$称为能量泛函。

能量泛函的正定性定义为存在$\lambda>0$使

$$a(u,u)>\lambda\|u\|^2, \qquad \forall u\in H \tag{14}$$

这里

$$\|u\|^2=\sum_{i=1}^N\|u_i\|^2_{n_i} \tag{15}$$

现在我们有如下定理：

定理 如果

i） A为对称正定矩阵，

ii） 若$L^*u=0$，$D^iu\Big|_{\partial_u\Omega}=0 \quad (i=0,1,\cdots,n_d-1)$，则$u\equiv0$

则存在$\lambda>0$使(14)成立。

证明 容易验证$B:H\to L^2\times L^2\times\cdots\times L^2$（共$N$个$L^2$组成的积空间）满足下面的性质

$$(Bu^1,u^2)=(u^1,Bu^2), \qquad \forall u^1,u^2\in H \tag{16}$$

下面我们证明算子B还是可逆的。

设边值问题(6)～(10)有两个解 u_α, u_β，则令 $u=u_\alpha-u_\beta$，代入(6)～(10)。我们知道对任意的$u^1\in H$，$w^1=L^*u^1$，u必须满足

$$a(u,u^1)=\int_\Omega w^1\cdot Aw d\Omega=0 \tag{17}$$

由条件i)和w^1的任意性可知$w=L^*u=0$。再由ii)立刻推出满足(17)的$u\equiv 0$。即对于一组给定的f, p^i $(i=0,1,\cdots,n_a-1)$只有唯一的解u。亦即算子的逆存在，不妨记为B^{-1}。用$R(B)$表示算子B的值域。记$\mathscr{B}=\overline{R(B)}$，则$\mathscr{B}$为$L^2\times L^2\times\cdots\times L^2$的闭线性子空间。则$B^{-1}:\mathscr{B}\to H$，$D(B^{-1})$属于$\mathscr{B}$，$B^{-1}$在$\mathscr{B}$中是稠定的。

算子B^{-1}也具有性质(16)，事实上

$$(B^{-1}v^1,v^2)=(B^{-1}v^1,\ BB^{-1}v^2)=(BB^{-1}v^1,\ B^{-1}v^2)=(v^1,B^{-1}v^2) \tag{18}$$

设$f_n\in R(B)$，f_n弱收敛到0，则$\forall g\in R(B)$，由(18)有

$$(B^{-1}g,f_n)=(g,B^{-1}f_n)$$

所以$(g,B^{-1}f_n)\to 0$ $(n\to\infty)$，由g的任意性知$B^{-1}f_n$弱收敛到0，由此，我们可以知道算子B^{-1}是有界的。（根据同样的道理我们知道算子B也是有界的，从而是连续的）。若不然，则存在序列$\{f_n\}\subset R(B)$满足$\|f_n\|=1$且$\|B^{-1}f_n\|\to\infty$ $(n\to+\infty)$。由于Hilbert空间中单位球是弱列紧的，所以$\{f_n\}$中有一个子序列$\{f_{n_k}\}$弱收敛。这与$\|B^{-1}f_n\|\to+\infty$矛盾。这就说明B^{-1}是有界的。

由B^{-1}的有界性可知B^{-1}的逆算子B是正定的[8]。这就证明了我们的论断。

有了这个定理，许多重要结构型式的算子的正定性便是明显的了。如对三维弹性力学问题的方程组，w相当于应变分量向量，u是位移向量，由应变为零，在适当的边界条件下推出$u\equiv 0$是很容易的。例如可参看[6]的第二章.于是Korn不等式便成为本定理的自然的结论。对于薄壳问题，相应于ii)的条件可以参看[6]的第十章。正定性也可以做为本定理的推论。

参 考 文 献

[1] Fichera, G., *Existence Theorem in Elasticity*, *Encyclopedia of Physics*, **Vol.**Ⅵ a/2 (1972).

[2] Bernadou, M. and P. G. Ciarlet, Sur l'ellipticite du modele lineaire de cogues de W. T. Koiter, *Lecture Notes in Economics and Mathematics Systems*, 134, Computing Methods in Applied Sciences and Engineering, 89—136; *Second Inter. Symp.*, Dec. (1975), 15—19.

[3] 武际可，薄壳方程组椭圆型条件的证明，1979年全国弹塑性力学学术交流会论文，固体力学学报，4 (1981), 436—444.

[4] 王大钧、胡海昌，弹性结构理论中两类算子的正定性和紧致性的统一证明，力学学报，2 (1982).

[5] 武际可，对胡海昌-鹫津久一郎原理的推广，北京大学学报（自然科学），3 (1985).

[6] 武际可、王敏中，《弹性力学引论》北京大学出版社 (1981).

[7] Ciarlet, P. G.，《有限元素法的数值分析》，蒋尔雄等译，上海科技出版社 (1978).

[8] 姜礼尚、庞之垣，《有限元方法及其理论基础》，人民教育出版社 (1980), 143—144.

On the Positive Definiteness of a Class of Operators

Wu Ji-ke Yuan Yong

(*Department of Mechanics, Peking University, Beijing*)

Abstract

In this paper, a proof of the positive definiteness for a class of operators is given. The operators considered are general enough to include those two- and three-dimensional elasticity, thin plates and shells as their special cases.