应用数学和力学，第 8 卷第 6 期（1987年 6 月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

二阶椭圆型方程斜导数问题的奇异摄动*

金　山

（上海市应用数学和力学研究所，1986年 3 月27日收到）

摘　要

本文研究一类带有非线性边值条件的半线性二阶椭圆型方程的奇异摄动问题：

$$\begin{cases} \varepsilon^2 \sum\limits_{i,j} \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left[a_{ij}(x,\varepsilon)\dfrac{\partial u}{\partial x_j}\right]-h(x,u,\varepsilon)=0 & (x\in\Omega\subset \boldsymbol{R}^n) \\ B\left(x,u,\dfrac{\partial u}{\partial l},\varepsilon\right)=0 & (x\in\partial\Omega) \end{cases}$$

这里，ε 是小参数，$\partial u/\partial l$ 表示沿着和边界不相切方向$\vec{l}(x,\varepsilon)$的方向导数．给出了上述边值问题的解的渐近展开式，利用压缩映象原理证明了渐近解的一致有效性．

一、引　言

Fife, P. C. 在1973 年考虑了带有小参数的半线性椭圆型方程的第一边值问题[1]：

$$\begin{cases} N[u]\equiv\varepsilon^2\sum\limits_{i,j}\dfrac{\partial}{\partial x_i}\left[a_{ij}(x,\varepsilon)\dfrac{\partial u}{\partial x_j}\right]-h(x,u,\varepsilon)=0 & (x\in\Omega) & (1.1) \\ u\Big|_{\partial\Omega}=\varphi(x) & (x\in\partial\Omega) & (1.2) \end{cases}$$

$0<\varepsilon\ll 1$.

本文研究更一般的非线性边值问题：

$$\begin{cases} N[u]=0 & (x\in\Omega) & (1.3) \\ B[u]\equiv B\left(x,u,\dfrac{\partial u}{\partial l},\varepsilon\right)=0 & (x\in\partial\Omega) & (1.4) \end{cases}$$

这里，$\partial/\partial l$ 表示沿边界$\partial\Omega$上某个非切向$\vec{l}\equiv(l_1(x),\cdots,l_n(x))^T$ 的方向导数，

$$\frac{\partial}{\partial l}\equiv\sum_{i=1}^{n} l_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}$$

特别，当B是 $\partial u/\partial l$ 和 u 的线性函数时，(1.3)～(1.4) 就是所谓的第三边值问题．我们将给出渐近解的构造及其一致有效性的证明．

* 江福汝推荐．
中国科学院科学基金资助的课题．

二、形式渐近解的构造

假设：当 $\varepsilon\to 0$ 时，函数 a_{ij}，h，B 均有渐近级数展开式

$$a_{ij}\sim\sum_{p=0}^{\infty}a_{ij}^{(p)}(x)\varepsilon^p,\quad h\sim\sum_{p=0}^{\infty}h^{(p)}(x,u)\varepsilon^p\qquad(x\in\Omega)$$

$$B\sim\sum_{p=0}^{\infty}B^{(p)}(x,u,u')\varepsilon^p\qquad(x\in\partial\Omega)$$

其中 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 中有界域，边界 $\partial\Omega$ 充分光滑，$a_{ij}^{(p)}$，$h^{(p)}$，$B^{(p)}$ 都是关于其变元充分可微的函数；记 $u'\equiv\partial u/\partial l$，$\bar{\Omega}\equiv\Omega\cup\partial\Omega$。

再假设：

H(2.1)　存在 $u_0(x)\in C^{\infty}(\bar{\Omega})$，满足 $h(x,u_0(x),0)=0$，$x\in\bar{\Omega}$。

H(2.2)　$h_u(x,u_0(x),0)\geqslant 2\sigma>0$，$x\in\bar{\Omega}$；$\sigma$：常数，$hu\equiv\partial h/\partial u$。

H(2.3)　算子 N 关于 $\varepsilon\geqslant 0$ 严格椭圆，即：存在常数 $\mu>0$，对一切实向量 $\vec{\xi}\equiv(\xi_1,\cdots,\xi_n)^T$ 和 $x\in\bar{\Omega}$，成立

$$\sum_{i,j}a_{ij}(x,0)\,\xi_i\xi_j\geqslant\mu|\xi|^2,\quad|\xi|\equiv\sum_i(\xi_i^2)^{\frac{1}{2}}.$$

H(2.4)

$$B\left(x,u_0(x),\frac{\partial u_0(x)}{\partial l}+f(x),0\right)\Big|_{x\in\partial\Omega}=0$$

有解 $f(x)\in C^{\infty}(\partial\Omega)$，满足：

$$\bar{B}(x)\equiv B_{u'}\left(x,\,u_0(x),\,\frac{\partial u_0(x)}{\partial l}+f(x),\,0\right)\Big|_{x\in\partial\Omega}\neq 0$$

这里记：$$B_u\equiv\frac{\partial B}{\partial u},\quad B_{u'}\equiv\frac{\partial B}{\partial(u')}$$

H(2.5)　$$B_u\left(x,\,u_0(x),\,\frac{\partial u_0(x)}{\partial l}+f(x),\,0\right)\bar{B}(x)<0,\quad x\in\partial\Omega$$

或：

H(2.5)′　$B_u|_{x\in\partial\Omega}=0$

在假设 H(2.1)和 H(2.2) 成立时，显然对任何非负整数 m，可构造内部近似解（在区域 Ω 内部有效的近似解）：

$$U_m=\sum_{n=0}^{m}u_n(x)\varepsilon^n$$

使满足：

$$N[U_m]=O(\varepsilon^{m+1})\tag{2.1}$$

其中 $u_0(x)$ 是退化方程 $h(x,u,0)=0$ 之解，$u_n(x)(n\geqslant 1)$ 由下式确定：

$$\frac{\partial^n}{\partial\varepsilon^n}(N[U_m])|_{\varepsilon=0}=0\tag{2.2}$$

即：

$$u_n=\frac{P_n(x)}{h_u(x,u_0(x),0)}$$

$P_n(x)$ 是 $u_k(x)$ ($k<n$) 及其一、二阶导数以已知函数为系数的多项式。

下面构造边界层校正项。

在边界 $\partial\Omega$ 邻近我们构造一个适当的边界层校正项 V 使得 U_m+V 近似地满足 (1.3) 和 (1.4)，进一步使 V 在远离 $\partial\Omega$ 的有界区域内按指数衰减。

由于 $\partial\Omega$ 充分光滑，从 $\partial\Omega$ 上出发的向量 $\vec{l}$ 不是切向量，即存在常数 $\omega>0$，使对于同一始端的边界上的内法线向量 $\vec{e}$，总成立估计式：

$$(\vec{l}^T\ \vec{e})\geqslant\omega\qquad(x\in\partial\Omega)$$

所以存在 $\partial\Omega$ 的一个邻域 Ω'，使在 Ω' 上可以定义如下的充分可微的坐标变换：$x\leftrightarrow(s,t)$。其中 $s(x)$ 表示沿 $\vec{l}$ 方向上和点 $x(x\in\Omega')$ 距离最小的 $(n-1)$ 维超曲面 $\partial\Omega$ 上的点，$t(x)$ 表示 x 和 $s(x)$ 之间的距离。再记：

$$\Omega_d\equiv\{x\,|\,x\in\Omega'\cap\Omega,\ t(x)<d\},\quad d\equiv\frac{1}{2}\inf_{x\in\Omega'\cap\Omega}t(x)$$

仍以 $\vec{l}$ 记为过 $\partial\Omega$ 上点 s 的 $\vec{l}$ 方向上的单位向量：

$$\vec{l}=\vec{l}(s)=(l_1(s),\ l_2(s),\cdots,l_n(s))^T$$

引进二种尺度的变量：

$$\xi=t/\varepsilon,\qquad \eta=t\tag{2.3}$$

注意到：

$$\frac{\partial}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial l}=\sum_{i=1}^{n}l_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}$$

所以有：
$$l_i(s)=\left.\frac{\partial x_i}{\partial t}\right|_{t=0}$$

再记：

$$\frac{\partial t}{\partial x_k}\equiv\tilde{l}_k(t,s)=\tilde{l}_k(\eta,s),\quad \tilde{l}\equiv(\tilde{l}_1,\cdots,\tilde{l}_n)^T$$

有：

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial x_k}=\tilde{l}_k\frac{\partial}{\partial t}+D_k\\&\frac{\partial^2}{\partial x_k\partial x_j}=\tilde{l}_k\tilde{l}_j\frac{\partial^2}{\partial t^2}+D_{kj}\frac{\partial}{\partial t}+D_kD_j\end{aligned}\right\}\tag{2.4}$$

D_k，D_{kj} 表示仅作用于 $\partial\Omega$ 上变量 s 的一阶微分算子。由于：

$$1=\left(\frac{\partial t}{\partial x_1},\ \cdots,\ \frac{\partial t}{\partial x_n}\right)\begin{pmatrix}\partial x_1/\partial t\\\vdots\\\partial x_n/\partial t\end{pmatrix}=\tilde{l}^T\Big|_{t=0}\vec{l}$$

可得：

$$(\tilde{l}\,|_{t=0}-\vec{l})^T\vec{l}=0$$

就是：

$$|\tilde{l}(0,s)|^2=|\vec{l}\,|^2+|\tilde{l}(0,s)-\vec{l}\,|^2$$

记：

$$A(\eta,s)\equiv\sum_{i,j}a_{ij}(x(\eta,s),0)\tilde{l}_i(\eta,s)\tilde{l}_j(\eta,s)$$

由H(2.3)得：

$$A(0,s)\geqslant\mu|\tilde{l}(0,s)|^2\geqslant\mu|\tilde{l}|^2=\mu>0 \tag{2.5}$$

我们在边界层 $\partial\Omega$ 附近构造如下形式的校正项：

$$V_m(x,\varepsilon)\equiv\sum_{n=0}^{m}\varepsilon^n v_n\left(t(x),\frac{t(x)}{\varepsilon},s(x)\right)=\sum_{n=0}^{m}\varepsilon^n v_n(\eta,\xi,s)$$

希望在边界层$\partial\Omega$附近，$Z\equiv U_m+\varepsilon V_m$是边值问题(1.3)～(1.4)的 m 阶近似解。注意到(2.1)，则应成立：

$$N[U_m+\varepsilon V_m]-N[U_m]=O(\varepsilon^{m+1}),\quad B[U_m+\varepsilon V_m]=O(\varepsilon^{m+1})$$

由此确定校正项中的 $\{v_n(\eta,\xi,s)\}_0^m$。因为：

$$\frac{\partial^n}{\partial\varepsilon^n}(N[U_m+\varepsilon V_m]-N[U_m])|_{\varepsilon=0}=0\qquad(x\in\Omega)$$

$$\frac{\partial^n}{\partial\varepsilon^n}(B[U_m+\varepsilon V_m])|_{\varepsilon=0}=0\qquad(x\in\partial\Omega)$$

$$(n=0,1,\cdots,m)$$

注意到(2.4)以及

$$\frac{\partial}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial\eta}+\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial\xi}$$

上述边值问题在Ω_d 可改写为：

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial^n}{\partial\varepsilon^n}\left\{\left[\sum_{i,j}a_{ij}(x(\eta,s),\varepsilon)\tilde{l}_i(\eta,s)\tilde{l}_j(\eta,s)\frac{\partial^2 V_m}{\partial\xi^2}+\varepsilon(\cdots)\right.\right.\\&\qquad\left.\left.-V_m h_u(x(\eta,s),\ U_m+\theta\varepsilon V_m,\varepsilon)\right]\right\}\Big|_{\varepsilon=0}=0\qquad(x\in\Omega)\\&\frac{\partial^n}{\partial\varepsilon^n}\left[B\left(s,\ U_m+\varepsilon V_m,\ \frac{\partial}{\partial\eta}U_m+\frac{\partial}{\partial\xi}V_m+\varepsilon\frac{\partial}{\partial\eta}V_m,\varepsilon\right)\right]\Big|_{\substack{\varepsilon=0\\ \eta=\xi=0}}=0\qquad(s\in\partial\Omega)\\&\qquad(n=0,1,2,\cdots,m)\end{aligned}\right\} \tag{2.6}$$

得到确定$\{v_n(\eta,\xi,s)\}_0^m$的相应初值问题：

$$\left.\begin{aligned}&A(\eta,s)\frac{\partial^2 v_0}{\partial\xi^2}-h_u(x(\eta,s),\ u_0,0)v_0=0\qquad(s\in\partial\Omega,\ \xi>0,\ \eta>0)\\&B\left(s,u_0(s),\frac{\partial u_0}{\partial\eta}+\frac{\partial v_0}{\partial\xi},\ 0\right)\Big|_{\xi=\eta=0}=0\qquad(s\in\partial\Omega)\end{aligned}\right\} \tag{2.7}$$

$(n\geqslant1)$

$$\left.\begin{aligned}&A(\eta,s)\frac{\partial^2 v_n}{\partial\xi^2}-h_u(x(\eta,s),u_0,0)v_n=p_n(\eta,\xi,s)\qquad(s\in\partial\Omega,\ \xi>0,\ \eta>0)\\&B_{u'}\left(s,u_0(s),\frac{\partial u_0}{\partial\eta}(s)+\frac{\partial v_0}{\partial\xi}\Big|_{\xi=\eta=0},\ 0\right)\frac{\partial v_n}{\partial\xi}\Big|_{\xi=\eta=0}=r_n(s)\qquad(s\in\partial\Omega)\end{aligned}\right\} \tag{2.8}$$

这里，$p_n(\eta,\xi,s)$和 $r_n(s)$是 $v_i(\eta,\xi,s)$，$\partial v_i/\partial\xi$，$\partial^2 v_i/\partial\xi^2$ $(i<n)$以已知函数为系数的多项式。

(2.9)

由 H(2.4)，应取：

$$\left.\frac{\partial v_0}{\partial \xi}\right|_{\xi=\eta=0}=f(s) \tag{2.10}$$

$$\left.\frac{\partial v_n}{\partial \xi}\right|_{\xi=\eta=0}=r_n(s)/\bar{B}(s) \qquad (n\geqslant 1) \tag{2.11}$$

由(2.5)及有关函数的连续性，存在常数 δ：$0<\delta<d$，使对 $s\in\partial\Omega$，$0\leqslant\eta\leqslant\delta$，成立：

$$A(\eta,s)\geqslant\frac{1}{2}\mu>0$$

从而在 $0\leqslant\xi<\infty$，$0\leqslant\eta\leqslant\delta$ 的范围内，可求解初值问题(2.7)和(2.8)，使其解 $\{v_n\}_0^m$ 具有边界层校正项性质：

$$\lim_{\xi\to\infty} v_n(\eta,\xi,s)=0 \qquad (n=0,1,2,\cdots,m)$$

解的表达是：

$$\left.\begin{aligned}
&v_0=-D_0(\eta,s)f(s)\exp[-\xi\sqrt{\cdots}]\sqrt{\frac{A(\eta,s)}{h_u(x,u_0,0)}}\\
&v_n=\exp[-\xi\sqrt{\cdots}]\left\{C_n(s)-\int_0^{\xi}\exp[2\tilde{\xi}\sqrt{\cdots}]\int_{\tilde{\xi}}^{\infty}\frac{p_n(\eta,\tilde{\tilde{\xi}},s)}{A(\eta,s)}\right.\\
&\quad\left.\cdot\exp[-\tilde{\tilde{\xi}}\sqrt{\cdots}]d\tilde{\tilde{\xi}}\,d\tilde{\xi}\right\} \qquad (n\geqslant 1)
\end{aligned}\right\} \tag{2.12}$$

这里，$\sqrt{\cdots}\equiv\sqrt{\dfrac{h_u(x,u_0,0)}{A(\eta,s)}}\equiv\sqrt{\dfrac{h_u(x(\eta,s),u_0(\eta,s),0)}{A(\eta,s)}}$

$$C_n(s)\equiv-\sqrt{\frac{A(0,s)}{h_u(s,u_0(s),0)}}\left\{\frac{r_n(s)}{\bar{B}(s)}+\int_0^{\infty}\frac{p_n(0,\xi,s)}{A(0,s)}\exp\left[-\xi\sqrt{\frac{h_u(s,u_0,0)}{A(0,s)}}\right]d\xi\right\}$$

$D_0(\eta,s)$是光滑函数，$D_0(0,s)=1$ $(s\in\partial\Omega)$

由H(2.2)，H(2.3)及Ω有界，$\partial\Omega$光滑的假设，

$$\tau\equiv\inf_{\substack{s\in\partial\Omega\\ 0\leqslant\eta\leqslant\delta}}\sqrt{\frac{h_u(x(\eta,s),u_0(x(\eta,s)),0)}{A(\eta,s)}}>0$$

于是由(2.9)、(2.12)我们可以证得，在连续模的意义下，对上述 $\{v_i(\eta,\xi,s)\}_{i=0}^m$ 有估计：

$$\left.\begin{aligned}
&v_0(\eta,\xi,s)=O(\exp[-\tau\xi]) &&(\xi\to\infty)\\
&v_n(\eta,\xi,s)=O(\exp[-\tau\xi]\xi^{3n-1}) &&(\xi\to\infty,\ n\geqslant 1)
\end{aligned}\right\} \tag{2.13}$$

关于$s\in\partial\Omega$ 和 $0\leqslant\eta\leqslant\delta$ 一致地成立。

为简化证明，今后取 $D_0(\eta,s)\equiv 1$。

引进记号 $\delta(x)$，表示一充分可微的截断函数：

$$\delta(x)=\begin{cases}1, & x\in\Omega_\delta,\quad t(x)\leqslant\dfrac{1}{3}\delta\\[2ex] 0, & \left\{x\mid x\in\Omega_\delta,\quad t(x)\geqslant\dfrac{2}{3}\delta\right\}\cup\{x\mid x\in\Omega\backslash\Omega_\delta\}\end{cases} \tag{2.14}$$

定理 1 在假设 H(2.1)，H(2.2)，H(2.3)，H(2.4)下，边值问题 (1.3)，(1.4)对任何非负数 m，存在着形式渐近近似解：

$$Z_m \equiv U_m + \varepsilon\delta(x) V_m$$
$$= \sum_{n=0}^{m} u_n(x)\varepsilon^n + \varepsilon\delta(x)\sum_{n=0}^{m} v_n\left((t(x), \frac{t(x)}{\varepsilon}, s(x)\right) \tag{2.15}$$

其中 $\{u_n(x)\}_0^m$ 是由(2.2)所确定的内部近似解，$\{v_n(t, t/\varepsilon, \varepsilon)\}_0^m$ 是由(2.12)给出的边界层校正项，$\delta(x)$的定义见 (2.14)。

证明 由构造过程可知，对于 $x\in\bar{\Omega}$ 及充分小的 $\varepsilon>0$，$Z_m(x,\varepsilon)$ 有意义。由 (2.2)，(2.6) 有：

$$N[U_m] = O(\varepsilon^{m+1}) \qquad x\in\Omega$$
$$(N[U_m+\varepsilon V_m]-N[U_m]) = O(\varepsilon^{m+2}) \qquad (x\in\Omega_\delta)$$

考虑到 $\delta(x)$ 及其任意一阶导数有界，由 (2.14)，(2.13)得到：

$$N[Z_m] = (N[U_m+\varepsilon V_m]-N[U_m]) + N[U_m] = O(\varepsilon^{m+1}) \qquad (x\in\Omega_{\delta/3})$$
$$N[Z_m] = N[U_m] = O(\varepsilon^{m+1}) \qquad (x\in\Omega\backslash\Omega_{2\delta/3})$$
$$N[Z_m] = N[U_m+\varepsilon\delta V_m] = O(\varepsilon^{m+1}) \qquad (x\in\Omega_{2\delta/3}\backslash\Omega_{\delta/3})$$

综合以上的结果，知：

$$N[Z_m] = O(\varepsilon^{m+1}) \qquad (x\in\Omega) \tag{2.16}$$

由(2.6)，有：

$$B[Z_m] = O(\varepsilon^{m+1}) \qquad (x\in\partial\Omega) \tag{2.17}$$

▽▽

三、余 项 估 计

本节将证明边值问题(1.3)～(1.4)当 ε 充分小时，存在属于$C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})\cap C^{\infty}(\Omega)$ 的解，并给出前述形式渐近解的一致有效性。

引进有关 Hölder 连续函数空间和 Hölder 模的记号：

对确定的 $\alpha\in(0,1)$，记 $C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$为闭域$\bar{\Omega}$上 k 阶导数 Hölder 连续（指数为 α）的函数空间，k 为非负整数。$C^k(\bar{\Omega})$ 表示 $\bar{\Omega}$ 上 k 阶导数连续的函数空间。类似地，给出 $C^{k,\alpha}(\partial\Omega)$，$C^k(\partial\Omega)$ 的定义。

以 $|\cdot|_{k,\alpha}$，$|\cdot|'_{k,\alpha}$ 分别表示 $C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$，$C^{k,\alpha}(\partial\Omega)$ 的范数；以 $|\cdot|_k$，$|\cdot|'_k$ 分别表示 $C^k(\bar{\Omega})$，$C^k(\partial\Omega)$ 的范数，即：

$$|\cdot|_{k,\alpha} = \sum_{n=0}^{k}[\cdot]_n + [\cdot]_{k,\alpha} = |\cdot|_k + [\cdot]_{k,\alpha}$$

$$|\cdot|'_{k,\alpha} = \sum_{n=0}^{k}[\cdot]'_n + [\cdot]'_{k,\alpha} = |\cdot|'_k + [\cdot]'_{k,\alpha}$$

这里：

$$[f]_k \equiv \max_{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=k} \sup_{x\in\bar{\Omega}} \left|\frac{\partial^{\alpha_1+\cdots+\alpha_n} f(x)}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}\right|$$

$$[f]_{k,\alpha}\equiv\max_{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=k}\sup_{x,y\in\bar{\Omega}}\frac{\left|\dfrac{\partial^{\alpha_1+\cdots+\alpha_n}f(x)}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}-\dfrac{\partial^{\alpha_1+\cdots+\alpha_n}f(y)}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}\right|}{\|x-y\|^{\alpha}}$$

$$\|x-y\|\equiv\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

类似地给出$[\cdot]_k'$，$[\cdot]_{k,\alpha}'$的定义。(下文也以$|\cdot|_\alpha$代替$|\cdot|_{0,\alpha}$)。

由(2.1)及$\{v_n\}_0^m$的显式，容易证得：对于由定理1给出的渐近解Z_m，成立估计：

$$|N[Z_m]|_k=O(\varepsilon^{m+2-k}) \tag{3.1}$$

$$|B[Z_m]|_k'=O(\varepsilon^{m+1}) \tag{3.2}$$

其中k为任一自然数。

定理 2 当假设H(2.5)以及定理1的条件成立时，边值问题(1.3)～(1.4)对于充分小的$\varepsilon>0$，存在唯一解$u(x,\varepsilon)$，$u\in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})\cap C^{\infty}(\Omega)$，且当$m\geqslant2$时，对于定理1构造的形式渐近解$Z_m(x,\varepsilon)$，总成立估计：

$$|u-Z_m|_1=O(\varepsilon^{m+1})\qquad(\varepsilon\to0)$$

证明 将对较大的m，证明余项$r(x,\varepsilon)$的存在性，再估计$|r|_{2,\alpha}$。

记：

$$N[Z_m]\equiv-\varepsilon^{m+1}Q(x,\varepsilon) \tag{3.3}$$

显然存在适当小的$\varepsilon_0>0$，当$\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$，有：

$$Q\in C^{\infty}(\bar{\Omega}),\ |Q|_0=O(1),\ |Q|_1=O(1)$$

因此：

$$|Q|_\alpha=O(1) \tag{3.4}$$

令$u=Z_m+r\varepsilon^{m+1}$代入(1.3)，再减去(3.3)，可得关于$r(x,\varepsilon)$的方程：

$$\varepsilon^2\sum_{i,k}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[a_{ik}(x,\varepsilon)\frac{\partial r}{\partial x_k}\right]-h_u(x,Z_m,\varepsilon)r=Q+\Phi \tag{3.5}$$

这里：

$$\Phi(r,x,\varepsilon)\equiv\frac{1}{2}h_{uu}(x,Z_m+\theta r\varepsilon^{m+1},\ \varepsilon)r^2\varepsilon^{m+1}\qquad(0\leqslant\theta\leqslant1)$$

容易证明：

$$|U_m|_k=O(1),\ |V_m|_k=O(\varepsilon^{-k})\qquad(\varepsilon\to0)$$

再注意到 $Z_m=U_m+\varepsilon V_m$，可以断言：

对于函数类

$$\mathrm{I}\equiv\{r\in C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})\,|\,\varepsilon^{m+1}|r|_0\leqslant1,\ \varepsilon^{m+1}|r|_\alpha^2\leqslant1\}$$

以及$\varepsilon\in[0,\varepsilon_0]$，$\theta\in[0,1]$；$|\Phi|_\alpha$一致有界。 (3.6)

类似地记：

$$B[Z_m]\equiv-\varepsilon^{m+1}R(s,\varepsilon) \tag{3.7}$$

由(3.2)可以知道，当$\varepsilon\in[0,\varepsilon_0]$时，$R\in C^{\infty}(\partial\Omega)$，并且$|R|_{1,\alpha}'$关于$\varepsilon\in[0,\varepsilon_0]$一致有界。(1.4)减去(3.7)，得到$r(x,\varepsilon)$必须满足的边值条件：

$$B_{u'}\left(s,Z_m+\varepsilon^{m+1}r,\frac{\partial Z_m}{\partial l}+\theta_1\varepsilon^{m+1}\frac{\partial r}{\partial l},\varepsilon\right)\frac{\partial r}{\partial l}$$

$$+B_u\left(s,Z_m+\theta_2\varepsilon^{m+1}r,\ \frac{\partial Z_m}{\partial l},\varepsilon\right)r=R$$

$$(0\leqslant\theta_1,\ \theta_2\leqslant 1,\ s\in\partial\Omega) \tag{3.8}$$

综合(3.5)、(3.8)，得到 $r(x,\varepsilon)$ 的非线性边值问题：

$$\left.\begin{aligned}&\varepsilon^2\sum_{i,j}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x,\varepsilon)\frac{\partial r}{\partial x_j}\right)-h_u(x,Z_m,\varepsilon)r=Q+\Phi(r,x,\varepsilon) && (x\in\Omega)\\ &\frac{\partial r}{\partial l}+a\left(s,\varepsilon,r,\frac{\partial r}{\partial l}\right)r=b\left(s,\varepsilon,r,\frac{\partial r}{\partial l}\right) && (s\in\partial\Omega)\end{aligned}\right\} \tag{3.9}$$

这里：

$$\left.\begin{aligned}&a\equiv\frac{B_u(s,Z_m+\varepsilon^{m+1}\theta_2 r,\ \partial Z_m/\partial l,\varepsilon)}{B_{u'}(s,Z_m+\varepsilon^{m+1}r,\ \partial Z_m/\partial l+\varepsilon^{m+1}\theta_1\partial r/\partial l,\varepsilon)}\\ &b\equiv\frac{R(s,\varepsilon)}{B_{u'}(s,Z_m+\varepsilon^{m+1}r,\ \partial Z_m/\partial l+\varepsilon^{m+1}\theta_1\partial r/\partial l,\varepsilon)}\\ &\qquad\qquad(0\leqslant\theta_1,\ \theta_2\leqslant 1)\end{aligned}\right\} \tag{3.10}$$

由(3.6)及H(2.5)，H(2.4)，可断言：

只要 ε_0 适当小，则当 $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$时，对于函数类 $\mathbb{I}$：

$$\mathbb{I}\equiv\left\{r\in C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})\,|\,\varepsilon^m|r|_\alpha<1,\ \ \varepsilon^m\left|\frac{\partial r}{\partial l}\right|^1_\alpha<1\right\} \tag{3.11}$$

函数 a，b 于 $s\in\partial\Omega$ 有意义，且有性质：

$$\begin{aligned}&\max(|b|'_{1,\alpha},\ |a|'_{1,\alpha})\leqslant C\\ &a\leqslant 0\quad[\text{或 } a\equiv 0,\ \text{如果H(2.5)}'\text{成立}]\end{aligned} \tag{3.12}$$

常数C不依赖于 r，ε，θ_1，θ_2 之选择。

由H(2.2)可知，ε_0 适当小，可同时有立：

$$-h_u(x,Z_m,\varepsilon)\leqslant-\sigma<0\qquad(x\in\bar{\Omega},\ \varepsilon\in(0,\varepsilon_0]) \tag{3.13}$$

形式地定义算子 T：

$$q=T(\varphi)$$

表示 q 是由 φ 决定的下述边值问题的解：

$$\left.\begin{aligned}&\hat{L}[q]\equiv\varepsilon^2\sum_{i,j}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial q}{\partial x_j}\right)-h_u(x,Z_m,\varepsilon)q=Q+\Phi(\varphi,x,\varepsilon) && (x\in\Omega)\\ &\hat{B}[q]\equiv\frac{\partial q}{\partial l}+a\left(x,\varepsilon,\varphi,\frac{\partial\varphi}{\partial l}\right)q=b\left(x,\varepsilon,\varphi,\frac{\partial\varphi}{\partial l}\right) && (x\in\partial\Omega)\end{aligned}\right\} \tag{3.14}$$

为了证明算子T 在某个适当的函数空间中有不动点，给出下述引理：

引理3.1 （参见文[4]p.128 Th.6.31 及注）

设
$$L\equiv\sum_{i,j}a_{ij}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_i b_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}+c(x)$$

是区域Ω中的严格椭圆算子，即成立：

$$\sum_{i,j}a_{ij}(x)\xi_i\xi_j\geqslant\mu|\xi|^2$$

常数 $\mu>0$，$x\in\Omega$ 和 $\vec{\xi}=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)^T\in\mathbf{R}^n$。又设 $c(x)\leqslant 0$，边界 $\partial\Omega$ 属于 $C^{2,\alpha}(\mathbf{R}^n)$，$L$ 的系

数都属于$C^{\alpha}(\bar{\Omega})$；设$B\equiv r(x)+\vec{\beta}(x)^T\nabla$，视$B$为作用于$\partial\Omega$上的函数$u$的边界算子。

其中 $\vec{\beta}(x)=(\beta_1(x),\cdots,\beta_n(x))^T$，$r(x)$，$\beta_i(x)\in C^{1,\alpha}(\partial\Omega)$，$\nabla=\left(\frac{\partial}{x_1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^T$

并且对于$\partial\Omega$上单位法向量$\vec{e}(x)$，总成立：$r(x)(\vec{\beta}(x)^T\vec{e}(x))<0$，则下述斜导数问题：

$$\begin{cases} L[u]\equiv\sum\limits_{i,j}a_{ij}(x)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}+\sum\limits_i b_i(x)\dfrac{\partial u}{\partial x_i}+c(x)u=f(x) & (x\in\Omega)\\ B[u]\equiv ru+\vec{\beta}^T\nabla u\equiv r(x)u+\sum\limits_i\beta_i(x)\dfrac{\partial u}{\partial x_i}=\varphi(x) & (x\in\partial\Omega)\end{cases}$$

对于所有的$f(x)\in C^{\alpha}(\bar{\Omega})$以及$\varphi(x)\in C^{1,\alpha}(\partial\Omega)$，存在唯一的属于$C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$的解。

推论 当$c(x)\leqslant 0$，$r(x)\geqslant 0$，且$c(x)\not\equiv 0$时，上述引理也成立。

引理3.2 （参见文[4]，p.127，Th.6.30）

设Ω是$\mathbf{R}^n$中边界属于$C^{2,\alpha}$的区域，又设$u\in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$是$L[u]=f$在$\Omega$中之解，并满足边界条件$B[u]=\varphi$，（$\Omega$，$L$，$B$，$\vec{\beta}$，$\vec{e}$的定义见引理3.1），其中$|\vec{\beta}^T\vec{e}|\geqslant K>0$，关于$x\in\partial\Omega$一致地成立；再设：

$$\max_{i,j}(|a_{ij}(x)|_{\alpha},\ |b_i(x)|_{\alpha},\ |c(x)|_{\alpha},\ |r(x)|'_{1,\alpha},\ |\beta_i(x)|'_{1,\alpha})\leqslant\Lambda$$

常数$K>0$，$\Lambda>0$。则成立估计：

$$|u|_{2,\alpha}\leqslant C(|u|_0+|\varphi|'_{1,\alpha}+|f|_{0,\alpha})$$

其中常数C只和n，α，λ，Λ，K以及Ω有关，而不依赖于φ，f的选择。

引理3.3 （参见文[5]，Ch.V，§33，(B)）

a_i，a，$b>0$，$0<\alpha_i<1$ $(i=1,2,\cdots,n)$，有估计

$$a=O\left(\sum_{i=1}^n a_i a^{\alpha_i}+b\right),$$

则成立估计：
$$a=O\left(\sum_{i=1}^n a_i^{\frac{1}{1-\alpha_i}}+b\right)$$

引理3.4 （参见文[5]，同上）

设m为非负整数，$0<\lambda<1$，则对于$C^{m,\lambda}(\bar{\Omega})$中的一切函数，成立估计：

$$[u]_{k,\lambda}=O\left([u]_{m,\lambda}^{\frac{k+\lambda}{m+\lambda}}\ [u]_0^{\frac{m-k}{m+\lambda}}+[u]_0R^{-(k+\lambda)}\right)$$

这里$k<m$，k是非负整数，R是只和Ω有关的常数。

引理3.5 （О. А. Олейник，参见文[3]Teo.4）

对于引理3.1中给出的严格椭圆算子L，设$c(x)<0$，$x\in\Omega$；给出已知函数a，b：$a(x)>0$，$b(x)\leqslant 0$，$x\in\partial\Omega$；则对下述斜导数问题：

$$\begin{cases} L[u]\equiv\sum\limits_{i,j}a_{ij}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}+\sum\limits_i b_i\dfrac{\partial u}{\partial x_i}+Cu=f & (x\in\Omega)\\ B[u]\equiv a(x)\dfrac{\partial u}{\partial l}+b(x)u=\varphi(x) & (x\in\partial\Omega)\end{cases}$$

之解有估计：

$$|u|_0\leqslant \frac{M}{\min|c|}+\frac{m}{\min(|a|+|b|)}\left[K_1+\frac{K_2}{\min|c|}\max_{x\in\Omega}\left(\sum_{i,j}|a_{ij}|+\sum_i|b_i|+|c|\right)\right]$$

这里 $m\equiv|\varphi|_0'$，$M\equiv|f|_0$. 常数 K_1, K_2 只依赖于区域 Ω 和 $\vec{l}$ 的选择，$\vec{l}$ 限定为某个与 $\partial\Omega$ 上内法线向量 $\vec{e}$ 交成锐角的方向。

引理3.6 （参见文[4] p.108, Th.6.17）

设 u 是方程 $L[u]=f$（见引理3.1）在开集 Ω 中属于 $C^2(\Omega)$ 的解. 其中 f 及 L 的系数属于 $C^{k,\alpha}(\Omega)$, 则 $u\in C^{k+2,\alpha}(\Omega)$; 如果 f 及 L 的系数属于 $C^\infty(\Omega)$, 则 $u\in C^\infty(\Omega)$。

引理3.7 （参见文[4] p.138, 引理6.38）

设 $\Omega\in\mathbf{R}^n$, $\partial\Omega\in C^{k,\alpha}$ $(k\geqslant 1)$, 开集 $\Omega'\supset\bar{\Omega}$, 如果 $\varphi\in C^{k,\alpha}(\partial\Omega)$, 则存在函数 $\Phi\in C_0^{k,\alpha}(\Omega')$, 使 $\Phi|_{\partial\Omega}=\varphi$。并成立估计:

$$|\Phi|_{k,\alpha}\leqslant C(|\varphi|'_{k,\alpha})$$

这里 $C_0^{k,\alpha}(\Omega')$ 指紧支集在 Ω' 中的 $C^{k,\alpha}$ 函数类,

$$C_0^{k,\alpha}(\Omega')\equiv\{f\in C^{k,\alpha}(\Omega')\,|\,\overline{\mathrm{supp}f}\subset\Omega'\}$$

常数 C 只依赖于 k, $\partial\Omega$ 和 Ω' 的选择。

继续证明定理 2:

考察线性边值问题 (3.14), 由有关系数的光滑性以及 (3.13)、(3.14); 和 $(\vec{l}^T\vec{e})|_{x\in\partial\Omega}\geqslant\omega>0$, 由引理3.1易得: 给定 $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$, 对任一 $\varphi(x,\varepsilon)\in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$, 存在唯一的解 $q(x,\varepsilon)\in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$, 即前述算子 T 对于给定的 $\varepsilon>0$, 是 $C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ 上的到自身的映照。

由引进的几个引理, 我们可以证得:

引理3.8 （证明细节因为限于篇幅, 从略）

对于(3.14)之解 $q(x,\varepsilon)$, 成立下述估计:

$$|q|_{2,\alpha}\leqslant K/\varepsilon^2 \qquad (K>0)$$

关于函数类 Ⅲ

$$\mathrm{III}\equiv\left\{\varphi\in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})\,\middle|\,\begin{matrix}\varepsilon^{m+1}|\varphi|_\alpha\leqslant 1,\ \varepsilon^{m+1}\left|\dfrac{\partial\varphi}{\partial l}\right|'_{1,\alpha}\leqslant 1\\ \varepsilon^{m+1}|\varphi|'_{1,\alpha}\leqslant 1,\ \ \varepsilon^{m+1}|\varphi|^1_\alpha\leqslant 1\end{matrix}\right\} \tag{3.15}$$

以及 $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ 一致地满足。

选取 $\varepsilon_1\leqslant\varepsilon_0$, 使当 $\varepsilon\in(0,\varepsilon_1]$, 成立:

$$\varepsilon K^2\leqslant 1,\ \varepsilon K\leqslant 1 \tag{3.16}$$

可知, 当 $m\geqslant 4$ 时, 对于 $\varphi\in H_\varepsilon\equiv\{\varphi\in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})\,|\,|\varphi|_{2,\alpha}\leqslant K/\varepsilon^2\}$, φ 一定同时属于函数类 Ⅰ, Ⅱ, Ⅲ。于是, 算子 T 是巴拿赫空间 $[C^{2,\alpha}(\bar{\Omega}),\ \|\cdot\|=|\cdot|_{2,\alpha}]$ 的凸紧子空间 H_ε 上到自身的连继映照。

记 $\qquad q_1\equiv T(\varphi_1),\ q_2\equiv T(\varphi_2),\ \Delta q\equiv q_1-q_2$

从 Δq 满足的边值问题出发, 类似于引理3.8的推导, 易证得: 当 $m\geqslant 3$ 时, 存在常数 $G>0$, 不依赖于 $\varepsilon\in(0,\varepsilon_1]$ 的选择, 成立关系:

$$|T(\varphi_1)-T(\varphi_2)|\leqslant(G/\varepsilon^2)\varepsilon^{m-1}|\varphi_1-\varphi_2|_{2,\alpha} \tag{3.17}$$

即: $m\geqslant 4$ 时, 适当选取 $\varepsilon_1>0$ 小, T 是 H_ε 到自身的压缩算子。

由压缩映象原理, 方程(3.9) $T(r)=r$ 在 H_ε 上存在唯一解, 记为 $\tilde{r}_\varepsilon$, 同时得到估计:

$$|\tilde{r}_\varepsilon|_{2,\alpha}\leqslant K/\varepsilon^2 \tag{3.18}$$

关于 $\varepsilon\in(0,\varepsilon_1]$ 一致地成立。

由引理 3.6 可知：

$$\tilde{r}_m(x,\varepsilon)\equiv\tilde{r}_\varepsilon(x)\in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})\cap C^\infty(\Omega) \tag{3.19}$$

由边值问题(3.9)的导出过程可知，当 $m\geqslant 4$，$0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$，边值问题(1.3)～(1.4) 存在唯一解：

$$u(x,\varepsilon)=Z_m(x,\varepsilon)+\varepsilon^{m+1}\tilde{r}_m(x,\varepsilon)\in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})\cap C^\infty(\Omega),$$

记 $$r_{m-2}\equiv[(Z_m-Z_{m-2})+\varepsilon^{m+1}\tilde{r}_m]\varepsilon^{-(m-1)}$$

得到：

$$|r_{m-2}|=O(1),\quad u(x,\varepsilon)=Z_{m-2}+\varepsilon^{m-1}r_{m-2}$$

作足标变换：$n=m-2$，即证得定理2。 ▽▽

四、推论和注释

1. 如果边值条件是半线性的：

$$B[u]\equiv\alpha(x,\varepsilon)\frac{\partial u}{\partial l}+\beta(x,u,\varepsilon)=0 \tag{4.1}$$

这里 α，β 当 $\varepsilon\to 0$ 时有渐近幂级数展开式：

$$\alpha\sim\sum_i^\infty\alpha_i(x)\varepsilon^i,\quad \beta\sim\sum_i^\infty\beta_i(x)\varepsilon^i$$

则用文[6]的方法，可以推出：

定理 3 在假设 H(2.1)～H(2.5)和(4.1)形式的边值条件下，边值问题 (1.3)、(1.4) 当 ε 充分小时，存在唯一解 $u(x,\varepsilon)$，$u\in C^0(\bar{\Omega})$，并对任意非负整数 m，成立估计：

$$|u-Z_m|_0=O(\varepsilon^{m+1})\qquad(\varepsilon\to 0)$$

就是说，在连继模意义下，条件 $m\geqslant 2$ 的限制是不必要的。

2. 定理 1、2、3 的结果可以在更一般的条件下成立，即允许边值条件中给出的斜导数求导方向 $\vec{l}$ 有一个摄动：

即：

$$\left.\begin{aligned}&\vec{l}=\vec{l}(x,\varepsilon)=(l_1(x,\varepsilon),\cdots,l_n(x,\varepsilon))^T\\&\frac{\partial}{\partial l}=\sum_{i=1}^n l_i(x,\varepsilon)\frac{\partial}{\partial x_i}\\&(\vec{l}(x,0)^T\vec{e})|_{x\in\partial\Omega}\geqslant\omega>0\end{aligned}\right\} \tag{4.2}$$

其中，$l_i(x,\varepsilon)$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 关于 ε 有渐近幂级数展开式。

这是因为，可以对 Олейник 的定理（本文引理3.5）的结果作如下拓广：

在求导方向 $\vec{l}$ 满足(4.2)时，存在一个适当小的正数 ε_0，($\varepsilon_0>0$ 只依赖区域Ω 及边界 $\partial\Omega$ 的选择)，使 $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ 时，该定理关于所论斜导数问题的解函数的连续模的先验估计中可以取到这样的常数 K_1，K_2：它们不依赖求导方向 $\vec{l}(x,\varepsilon)$随 ε 的变化。

参 考 文 献

[1] Fife, P. C., Semilinear elliptic boundary value problems with small parameters, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **52**, 2 (1973), 205—232.

[2] O'Malley, R. E., *Introduction to Singular Perturbations*, Academic Press, New York (1974).

[3] Олейник О. А., О свойствах решений некоторых краевых задач для уравнений эллиптического типа, *Mam. Сб. Т.*, **30**, 72 (1952), 695—702.

[4] Gilbary, D. and N. S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order* (1977). (中译本, 上海科技出版社 (1981))

[5] Miranda, C., *Partial Differential Equations of Elliptic Type*, 2nd Rev. Ed., Berlin, Springer-Verlag (1970).

[6] 江福汝, 关于常微分方程非线性边值问题的奇异摄动, 中国科学, A辑, 3 (1985), 232—242.

Singularly Perturbed Nonlinear Second Order Elliptic Equation

Jin Shan

(Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Shanghai)

Abstract

In this paper, we study singular perturbation problems of some semi-linear second order elliptic equations with nonlinear boundary value conditions:

$$\varepsilon^2\sum_{i,j}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[a_{ij}(x,\varepsilon)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right]-h(x,u,\varepsilon)=0 \qquad x\in\Omega\subset R^n$$

$$B\left(x,u,\frac{\partial u}{\partial l},\varepsilon\right)=0 \qquad x\in\partial\Omega$$

where ε is a small positive parameter and $\partial u/\partial l$ is a directional derivative, which lies on an oblique vector $\vec{l}(x,\varepsilon)$. We have given a construction of the asymptotic solutions and proof of their asymptotic correctness, which is based on the principle of contraction mapping.