应用数学和力学，第8卷第5期（1987年5月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

关于加权差分方法的一点注记

吴启光

（南京大学，1986年6月15月收到）

摘　要

在这篇短文中，对奇异摄动问题引进了新的差分逼近并证明了一致收敛的必要条件。选择适当的权因子可得到用Ilin方法所得的相同的差分格式。

一、初　值　问　题

$$\left.\begin{aligned} &L^1u_\varepsilon \equiv \varepsilon u'(x)+a(x)u(x)=f(x) \quad (x>0) \\ &u(0)=\varphi \end{aligned}\right\} \tag{1.1}$$

其中 $\varepsilon>0$ 是小参数，$a(x)$，$f(x)$ 是 x 的光滑函数，而且我们假定 $a(x)\geqslant\alpha>0$。

利用表达式

$$(b_i+c_i)u_{i+1}+(1-2b_i)u_i+(b_i-c_i)u_{i-1} \tag{1.2}$$

逼近 $u(x_i)$，其中 b_i，c_i 是待定参数。于是我们有下列差分方程：

$$\varepsilon\frac{u_{i+1}-u_{i-1}}{2h}+a_i\{(b_i+c_i)u_{i+1}+(1-2b_i)u_i+(b_i-c_i)u_{i-1}\}=f_i \tag{1.3}$$

易知(1.3)与(1.1)相容。

令

$$a_i(b_i-c_i)=\varepsilon/2h \tag{1.4}$$

则差分方程(1.3)变成

$$L_h^1u_i\equiv 2a_ib_iu_{i+1}+a_i(1-2b_i)u_i=f_i \tag{1.5}$$

定理1　假设

$$\left.\begin{aligned} &L_h^1u_i=f_i \quad (i>0) \\ &u_0=\varphi \end{aligned}\right\} \tag{1.6}$$

的解关于 ε 一致收敛于(1.1)的解。令 $\rho=h/\varepsilon$ 和非负整数 n 均固定，则

$$\lim_{h\to 0} b_n=\frac{1}{2(1-\exp[-\rho a(0)])} \tag{1.7}$$

证明　根据渐近方法的分析可知当 $\varepsilon\to 0$ 时有

$$u(x)=w_0(x)+v_0(x/\varepsilon)+O(\varepsilon)$$

其中

$$w_0(x)=\frac{f(x)}{a(x)}$$

$$v_0\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)=\left\{\varphi-\frac{f(0)}{a(0)}\right\}\exp\left[-a(0)\frac{x}{\varepsilon}\right]$$

因为ρ和n固定，故有

$$\lim_{h\to 0} u(nh)=\frac{f(0)}{a(0)}+\left\{\varphi-\frac{f(0)}{a(0)}\right\}\exp[-a(0)n\rho] \tag{1.8}$$

利用关于ε一致收敛的的假设和(1.5)得到

$$\lim_{h\to 0}\{2b_n a(0)[u((n+1)h)-u(nh)]+a(0)u(nh)\}=f(0)$$

利用(1.8)式可知

$$\lim_{h\to 0} b_n=\frac{1}{2(1-\exp[-a(0)\rho])}$$

这就是所希望的结果。

推论 若选取

$$b_i=\frac{1}{2}\{1-\exp[-a(x_i)\rho]\}^{-1}$$

$$c_i=\frac{1}{2}\{1-\exp[-a(x_i)\rho]\}^{-1}-\frac{\varepsilon}{2a(x_i)h}$$

则差分方程(1.3)就是(1.1)的指数型拟合差分格式。

二、边 值 问 题

$$\left.\begin{aligned}&L^2u_\varepsilon\equiv\varepsilon u''(x)+a(x)u'(x)=f(x)\quad(0<x<1)\\&u(0)=A,\ u(1)=B,\ a(x)\geqslant\alpha>0\end{aligned}\right\} \tag{2.1}$$

利用表达式

$$\frac{(1+d_i)(u_{i+1}-u_i)+(1-d_i)(u_i-u_{i-1})}{2h} \tag{2.2}$$

逼近$u'(x_i)$，其中d_i为待定参数，于是我们有下列差分方程：

$$\begin{aligned}L_h^2u_i\equiv\varepsilon\frac{u_{i+1}-2u_i+u_{i-1}}{h^2}+a_i\frac{(1+d_i)(u_{i+1}-u_i)+(1-d_i)(u_i-u_{i-1})}{2h}\\=f_i\qquad\qquad(i=1,2,\cdots,N-1)\end{aligned} \tag{2.3}$$

易知(2.3)与(2.1)相容。

定理 2 假设

$$\left.\begin{aligned}&L_h^2u_i=f_i\qquad(i>0,\ i=1(1)N-1)\\&u_0=A,\ u_N=B\end{aligned}\right\} \tag{2.4}$$

的解关于ε一致收敛于(2.1)的解，令$\rho=h/\varepsilon$和非负整数n均固定，则有

$$\lim_{h\to 0} d_n=\mathrm{cth}\left(\frac{a(0)h}{2\varepsilon}\right)-\frac{2\varepsilon}{a(0)h} \tag{2.5}$$

证明 根据渐近方法的分析易知

$$\lim_{h\to 0} u(nh)=u_0(0)+(A-u_0(0))\exp[-a(0)n\rho] \tag{2.6}$$

这里 $u_0(x)$ 是退化问题的解. 用 h 乘(2.3)式我们得到下列方程;

$$\frac{1}{\rho}(u_{i+1}-2u_i+u_{i-1})+\frac{1}{2}a_i(1+d_i)(u_{i+1}-u_i)$$

$$+\frac{1}{2}a_i(1-d_i)(u_i-u_{i-1})=hf_i \qquad (i=1(1)N-1) \tag{2.7}$$

在第 n 个网格点上的差分格式为:

$$\frac{1}{\rho}(u_{n+1}-2u_n+u_{n-1})+\frac{1}{2}a(nh)(1+d_n)(u_{n+1}-u_n)$$

$$+\frac{1}{2}a(nh)(1-d_n)(u_n-u_{n-1})=hf_n \tag{2.8}$$

因为 ρ 和 n 固定, 利用关于 ε 一致收敛的假设可将此式表示为:

$$\lim_{h\to 0}\left\{\frac{1}{\rho}[u((n+1)h)-2u(nh)+u((n-1)h)]\right.$$

$$+\frac{1}{2}a(nh)(1+d_n)[u((n+1)h)-u(nh)]$$

$$\left.+\frac{1}{2}a(nh)(1-d_n)[u(nh)-u((n-1)h)]\right\}=0 \tag{2.9}$$

利用(2.6)式, 我们得到

$$\lim_{h\to 0} d_n=\operatorname{cth}\left(\frac{a(0)\rho}{2}\right)-\frac{2}{a(0)\rho}$$

推论 若选取

$$d_i=\operatorname{cth}\left(\frac{a(x_i)h}{2\varepsilon}\right)-\frac{2\varepsilon}{a(x_i)h} \tag{2.10}$$

则差分方程(2.3)是正型差分格式, 而且方程(2.3)是(2.1)的指数型拟合差分格式.

三、椭圆-抛物奇异摄动问题

$$\left.\begin{aligned} &L^3u_\varepsilon\equiv\varepsilon\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2u}{\partial x^2}-a(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}=f(x,y) \quad (0<x,\ y<1)\\ &u|_\Gamma=0\end{aligned}\right\} \tag{3.1}$$

其中 $\varepsilon>0$ 是小参数, $a(x,y)\geqslant\alpha>0$, 当 $\varepsilon=0$ 时问题(3.1)退化为抛物型方程的初、边值问题

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial^2w_0}{\partial x^2}-a(x,y)\frac{\partial w_0}{\partial y}=f(x,y) && (3.2)\\ &w_0|_{y=0}=0,\quad w_0|_{x=0}=w_0|_{x=1}=0 && (3.3)\end{aligned}\right.$$

在 $y=1$ 这条边上失去了定解条件.

根据渐近方法的分析, 摄动问题(3.1)在 $y=1$ 的附近, 有边界层函数

$$v=\exp\left[-a(x,1)\frac{1-y}{\varepsilon}\right]$$

当 y 在 1 附近时这个函数产生影响, 当远离 1 时是一个微小的量.

当 $\varepsilon\to 0$ 时，(3.1)的解可以写成

$$u(x,y)=w_0(x,y)+c\exp\left(-a(x,1)\frac{1-y}{\varepsilon}\right)+O(\varepsilon) \tag{3.4}$$

其中 $W_0(x,y)$ 是退化问题(3.2)～(3.3)的解。

类似地，利用表达式

$$\frac{(1+e_{i,j})(u_{i,j+1}-u_{i,j})+(1-e_{i,j})(u_{i,j}-u_{i,j-1})}{2k}$$

逼近 $\partial u/\partial y$，其中 $e_{i,j}$ 是待定参数。

差分方程可以写成

$$L^3_{h,k}u_{i,j}\equiv\varepsilon\frac{u_{i,j+1}-2u_{i,j}+u_{i,j-1}}{k^2}+\frac{u_{i+1,j}-2u_{i,j}+u_{i-1,j}}{h^2}$$

$$-\frac{a_{i,j}}{2k}\{(1+e_{i,j})(u_{i,j+1}-u_{i,j})+(1-e_{i,j})(u_{i,j}-u_{i,j-1})\}=f_{i,j} \tag{3.5}$$

易知(3.5)与(3.1)相容。

定理 3 假设

$$\left.\begin{aligned}&L^3_{h,k}u_{i,j}=f_{i,j}\\&u_{i,j}|_{\Gamma_{h,k}}=0\end{aligned}\right\} \tag{3.6}$$

的解关于 ε 一致收敛于(3.1)的解。令 $\rho=k/\varepsilon$ 和非负整数 n 均固定，此处取 $h=k$。令 u 是(3.1)的解，在充分光滑的条件下有

$$\lim_{k\to 0}e_{n,n}=\frac{2\varepsilon}{a(0,1)k}-\operatorname{cth}\left(\frac{a(0,1)k}{2\varepsilon}\right) \tag{3.7}$$

证明 根据渐近方法的分析可知

$$\lim_{k\to 0}u(nk,nk)=w_0(0,0)+c\exp\left(-a(0,1)\frac{1-nk}{\varepsilon}\right) \tag{3.8}$$

差分方程(3.5)变成

$$\frac{1}{\rho}\{u_{i,j+1}-2u_{i,j}+u_{i,j-1}\}+k\left\{\frac{u_{i+1,j}-2u_{i,j}+u_{i-1,j}}{h^2}\right\}$$

$$-\frac{a_{i,j}}{2}\{(1+e_{i,j})(u_{i,j+1}-u_{i,j})+(1-e_{i,j})(u_{i,j}-u_{i,j-1})\}=kf_{i,j} \tag{3.9}$$

因为 ρ 和 n 固定，利用关于 ε 一致收敛的假设

$$\lim_{k\to 0}\left\{\frac{1}{\rho}[u(nk,(n+1)k)-2u(nk,nk)+u(nk,(n-1)k)]\right.$$

$$-\frac{a(nk,nk)}{2}[(1+e_{n,n})(u(nk,(n+1)k)-u(nk,nk))$$

$$\left.+(1-e_{n,n})(u(nk,nk)-u(nk,(n-1)k))]\right\}=0 \tag{3.10}$$

利用(3.8)式可得

$$\lim_{k\to 0}e_{n,n}=\frac{2\varepsilon}{a(0,1)k}-\operatorname{cth}\left(\frac{a(0,1)k}{2\varepsilon}\right)$$

推论 若选取

$$e_{i,j}=\frac{2\varepsilon}{a_{ij}k}-\operatorname{cth}\left(\frac{ka_{ij}}{2\varepsilon}\right)$$

则所得的差分格式与利用 Ilin 方法得到的相同。

参 考 文 献

[1] Doolan, E. P., J. J. H. Miller and W. H. A. Schilders, *Uniform Numerical Methods for Problems with Initial and Boundary Layers* (1980).

[2] 苏煜城、吴启光，椭圆-抛物微分方程奇异摄动问题的差分解法，应用数学和力学，1, 2 (1980), 167—176.

[3] 吴启光，奇异摄动问题的加权差分方法，应用数学和力学，5, 5 (1984), 633—638.

A Note on the Method of Weighted Difference

Wu Chi-kuang

(*Nanjing University, Nanjing*)

Abstract

In this short paper, we introduce a new difference approximation for singular perturbation problem and prove the necessary condition of uniform convergence. Selecting apposite weight factor, we obtain the same difference schemes as in the case of Ilin's method.