用于几何非线性分析的增量形式的虚功方程*

王颖坚

（北京大学力学系，1986年6月2日收到）

摘　要

本文导出了适用于几何非线性有限元分析的增量形式的虚功方程．在这个增量形式的虚功方程中，考虑了积累误差的影响．

增量方法是在有限元几何非线性分析中的一个重要的基本方法．Brockman[1]和Murakawa[2]以不同的途径导出了增量形式的虚功原理关系式．本文严格地导出了考虑误差影响的增量形式的虚功方程，它对于包括大位移和大转动的几何非线性分析是方便的和实用的．

一、虚功方程

在非线性有限元分析中，对变量的描述有两种不同的方式．一种是，对应于每一次加载状态，描述弹性体变形状态的位移、应变和应力都以最临近的前一个载荷状态所对应的弹性体构形为参考系．这种描述方法，称为即时的Lagrange型描述（updated Lagrangian formulation）．另一种是，对于任何一个加载状态，描述弹性体变形状态的位移、应变和应力，都以初始的未变形的弹性体为参考系．这称之为总体的Lagrange型描述(total Lagrangian formulation)．

我们采用后一种描述方法——总体的Lagrange型描述．

我们将运用Piola-Kirchhoff第二应力张量及相应的Green-Lagrange应变张量[3][4]来表达增量形式的虚功方程．

我们考虑弹性体的三种不同的状态：

状态　c_0——弹性体的初始状态；

状态　c_n——对应于载荷状态n的弹性体的变形状态；

状态c_{n+1}——当载荷自状态n获得某一增量时，弹性体变形后所达到的新的状态．

在状态c_0，我们以V_0表达弹性体的体积，以∂V_{σ_0}表达V_0的给定应力的那部分边界面，以∂V_{u_0}表达V_0的给定位移的那部分边界面．显然

$$\partial V_0=\partial V_{\sigma_0}+\partial V_{u_0}$$

其中∂V_0是V_0的边界面．

* 郭仲衡推荐．

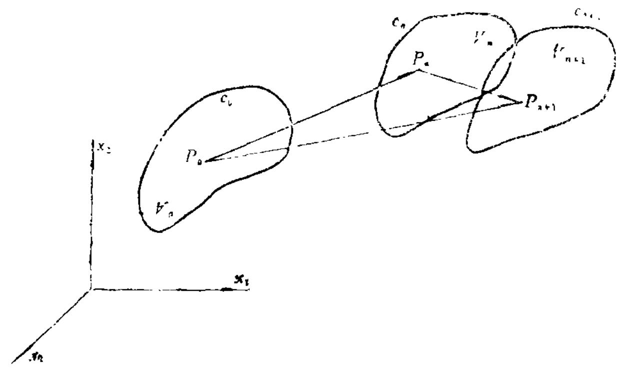

图　1

同样，在状态 c_n，我们以 V_n 表达弹性体的体积，以 ∂V_n 表达 V_n 的边界面，∂V_{σ_n} 表达给定应力的部分边界面，∂V_{u_n}表达给定位移的部分边界面。显然

$$\partial V_n=\partial V_{\sigma_n}+\partial V_{u_n}$$

考虑变形状态 c_n。体力和边界面上的力的虚功，可表述为

$$W_V=\int_{\partial V_{\sigma_n}}\mathbf{p}^n\cdot\delta\mathbf{u}dA_n+\int_{V_n}\rho\mathbf{F}^n\cdot\delta\mathbf{u}dV_n \tag{1.1}$$

这里，$\mathbf{p}^n$ 是边界面 ∂V_{σ_n} 上单位面积的面力，$\mathbf{F}_n$ 是体积 V_n 中单位质量上的体力。

方程 (1.1) 中的第一个积分可以表达为

$$\int_{\partial V_{\sigma_0}}\mathbf{t}^n\cdot\delta\mathbf{u}dA$$

这里，$\mathbf{t}^n$ 是作用于边界面 ∂V_{σ_0} 的单位面积上的虚假表面力向量 (surface pseudo-traction vector)。

设 $\mathbf{N}$ 是边界面 ∂V_0 的单位法向量，τ_{kj} 是第一 Piola-Kirchhoff 应力张量 $\underset{\sim}{T}$ 的分量，于是我们有

$$\mathbf{t}^n\cdot\delta\mathbf{u}=\mathbf{N}\cdot\underset{\sim}{T}\cdot\delta\mathbf{u}=N_j\tau_{jk}\delta u_k \tag{1.2}$$

按照定义[3][4]

$$\tau_{jk}=S^n_{ij}\frac{\partial x_k}{\partial X_i} \tag{1.3}$$

其中 S^n_{ij} 是对称的第二Piola-Kirchhoff 应力张量的分量；x_k 与X_i 分别是状态 c_n 和状态 c_0 的物质点的坐标分量。$\partial x_k/\partial X_i$ 是变形梯度张量的分量。

因此，方程 (1.1) 中的第一个积分可以被写成为

$$\int_{\partial V_{\sigma_n}}\mathbf{p}^n\cdot\delta\mathbf{u}dA_n=\int_{\partial V_{\sigma_0}}\mathbf{t}^n\cdot\delta\mathbf{u}dA$$
$$=\int_{\partial V_{\sigma_0}}S^n_{ij}\frac{\partial x_k}{\partial X_i}N_j\delta u_k dA=\int_{\partial V_0}S^n_{ij}\frac{\partial x_k}{\partial X_i}N_j\delta u_k dA \tag{1.4}$$

上面最后一个等式是由于在 ∂V_{u_0} 上 $\delta\mathbf{u}=0$。应用 Gauss 公式，我们有

$$\int_{\partial V_0}S^n_{ij}\frac{\partial x_k}{\partial X_i}N_j\delta u_k dA=\int_{V_0}\left(S^n_{ij}\frac{\partial x_k}{\partial X_i}\right)_{,j}\delta u_k dV+\int_V S^n_{ij}\frac{\partial x_k}{\partial X_i}\delta u_{k,j}dV \tag{1.5}$$

然而，

$$\int_{V_n}\rho\mathbf{F}^n\cdot\delta\mathbf{u}dV_n=\int_{V_0}\rho_0 f^n_k\delta u_k dV \tag{1.6}$$

其中，ρ_0 和 ρ 分别是状态 c_0 和状态 c_n 的材料密度；f_k^n 是状态 c_0 的单位质量的体力分量。

将(1.5)和(1.6)代入方程(1.1)中，可知

$$W_V=\int_{V_0}\left[\left(S_{ij}^n\frac{\partial x_k}{\partial X_i}\right)_{,j}+\rho_0 f_k^n\right]\delta u_k dV+\int_{V_0}S_{ij}^n\frac{\partial x_k}{\partial X_i}\delta u_{k,j}dV$$

考虑到平衡方程

$$\left(S_{ij}^n\frac{\partial x_k}{\partial X_i}\right)_{,j}+\rho_0 f_k^n=0$$

我们得到

$$\int_{V_0}S_{ij}^n\frac{\partial x_k}{\partial X_i}\delta u_{k,j}dV=\int_{\partial V_{\sigma_0}}t_i^n\delta u_i dA+\int_{V_0}\rho_0 f_k^n\delta u_k dV \tag{1.7}$$

若我们以 z_i 表示状态 c_{n+1} 的物质点的坐标，则

$$z_i=X_i+u_i^{n+1}$$

$$x_i=X_i+u_i^n$$

类似地，对于状态 c_{n+1} 我们有

$$\int_{V_0}S_{ij}^{n+1}\frac{\partial z_k}{\partial X_i}\delta u_{k,j}dV=\int_{\partial V_{\sigma_0}}t_i^{n+1}\delta u_i dA+\int_{V_0}\rho_0 f_k^{n+1}\delta u_k dV \tag{1.8}$$

二、增量形式的虚功方程

我们记

$$\begin{aligned}z_i&=X_i+u_i^{n+1}\\&=x_i+\Delta u_i\end{aligned}$$

其中 $\Delta u_i=u_i^{n+1}-u_i^n$ 是从状态 c_n 至状态 c_{n+1} 的位移增量。

按照定义，Green-Lagrange 应变张量的分量

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ij}&=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial x_k}{\partial X_i}\frac{\partial x_k}{\partial X_j}-\delta_{ij}\right]\\&=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial(X_k+u_k)}{\partial X_i}\frac{\partial(X_k+u_k)}{\partial X_j}-\delta_{ij}\right]\\&=\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}+u_{k,i}u_{k,j})\end{aligned} \tag{2.1}$$

这里 δ_{ij} 是 Kronecker 符号：

$$\delta_{ij}=\begin{cases}0 & (\text{当 } i\neq j \text{ 时})\\ 1 & (\text{当 } i=j \text{ 时})\end{cases}$$

令

$$\Delta S_{ij}=S_{ij}^{n+1}-S_{ij}^n$$

$$\Delta e_{ij}=e_{ij}^{n+1}-e_{ij}^n$$

$$\Delta u_{k,i}=u_{k,i}^{n+1}-u_{k,i}^n$$

$$\Delta t_i = t_i^{n+1} - t_i^n$$

$$\Delta f_i = f_i^{n+1} - f_i^n$$

考虑到

$$\varepsilon_{ij}^{n+1} = (u_{i,j}^{n+1} + u_{j,i}^{n+1} + u_{k,i}^{n+1} u_{k,j}^{n+1})/2$$

$$\varepsilon_{ij}^n = (u_{i,j}^n + u_{j,i}^n + u_{k,i}^n u_{k,j}^n)/2$$

可以得知

$$\begin{aligned} \Delta\varepsilon_{ij} &= [\Delta u_{i,j} + \Delta u_{j,i} + u_{k,i}^n \Delta u_{k,j} \\ &\quad + u_{k,j}^n \Delta u_{k,i} + \Delta u_{k,i}\Delta u_{k,j}]/2 \\ &= \Delta e_{ij} + \Delta\eta_{ij} \end{aligned} \tag{2.2}$$

这里，Δe_{ij} 表示 $\Delta\varepsilon_{ij}$ 的线性部分，$\Delta\eta_{ij}$ 是 $\Delta\varepsilon_{ij}$ 的非线性部分，即

$$\Delta e_{ij} = (\Delta u_{k,j} + \Delta u_{j,i} + u_{k,i}^n \Delta u_{k,j} + u_{k,j}^n \Delta u_{k,i})/2$$

$$\Delta\eta_{ij} = \Delta u_{k,i}\Delta u_{k,j}/2$$

现在，我们考虑载荷状态 $n+1$ 所对应的变形状态 c_{n+1}，虚功方程(1.8)可以写作

$$\int_{V_0} S_{ij}^{n+1} \frac{\partial z_k}{\partial X_i} \delta u_{k,j}^{n+1}\, dV = \int_{\partial V_{\sigma_0}} t_i^{n+1}\, \delta u_i^{n+1}\, dA + \int_{V_0} \rho_0 f_i^{n+1}\, \delta u_i^{n+1}\, dV$$

在状态 c_{n+1}，$\mathbf{u}^n$ 是已知的，显然有

$$\delta u_i^{n+1} = \delta\Delta u_i$$

因此

$$\int_{V_0} S_{ij}^{n+1} z_{k,i} \delta\Delta u_{k,j} dV = \int_{\partial V_{\sigma_0}} t_i^{n+1} \delta\Delta u_i dA + \int_{V_0} \rho_0 f_i^{n+1} \delta\Delta u_i dV \tag{2.3}$$

利用第二 Piola-Kirchhoff 应力张量 $\underset{\sim}{S}^{n+1}$ 的对称性，容易得到

$$\begin{aligned} S_{ij}^{n+1} z_{k,i}\delta\Delta u_{k,j} &= \frac{1}{2} S_{ij}^{n+1}(z_{k,i}\delta\Delta u_{k,j} + z_{k,j}\delta\Delta u_{k,i}) \\ &= \frac{1}{2} S_{ij}^{n+1}[(x_{k,i} + \Delta u_{k,i})\delta\Delta u_{k,j} + (x_{k,j} + \Delta u_{k,j})\delta\Delta u_{k,i}] \\ &= \frac{1}{2} S_{ij}^{n+1}(x_{k,i}\delta\Delta u_{k,j} + x_{k,j}\delta\Delta u_{k,i}) \\ &\quad + \frac{1}{2} S_{ij}^{n+1}(\Delta u_{k,i}\delta\Delta u_{k,j} + \Delta u_{k,j}\delta\Delta u_{k,i}) = S_{ij}^{n+1}\delta\Delta\varepsilon_{ij} \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} \delta\Delta e_{ij} &= \frac{1}{2}[\delta\Delta u_{i,j} + \delta\Delta u_{j,i} + u_{k,i}^n \delta\Delta u_{k,j} + u_{k,j}^n \delta\Delta u_{k,i} \\ &\quad + \Delta u_{k,i}\delta\Delta u_{k,j} + \Delta u_{k,j}\delta\Delta u_{k,i}] \\ &= \frac{1}{2}\Big[\Big(\frac{\partial X_k}{\partial X_i} + \frac{\partial u_k^n}{\partial X_i}\Big)\delta\Delta u_{k,j} + \Big(\frac{\partial X_k}{\partial X_j} + \frac{\partial u_k^n}{\partial X_j}\Big)\delta\Delta u_{k,i} \\ &\quad + \Delta u_{k,i}\delta\Delta u_{k,j} + \Delta u_{k,j}\delta\Delta u_{k,i}\Big] \\ &= \frac{1}{2}(x_{k,i}\delta\Delta u_{k,j} + x_{k,j}\delta\Delta u_{k,i} + \Delta u_{k,i}\delta\Delta u_{k,j} + \Delta u_{k,j}\delta\Delta u_{k,i}) \end{aligned}$$

因此，由方程(2.3)导出

$$\int_{V_0}(\Delta S_{ij}\delta\Delta e_{ij}+S_{ij}^n\delta\Delta\eta_{ij})dV=\int_{\partial V_{\sigma_0}}\Delta t_i\delta\Delta u_i dA+\int_{V_0}\rho_0\Delta f_i\delta\Delta u_i dV+\delta R \quad (2.4)$$

这里

$$\delta R=\int_{\partial V_{\sigma_0}}t_i^n\delta\Delta u_i dA+\int_{V_0}\rho_0 f_i^n\delta\Delta u_i dV-\int_{V_0}S_{ij}^n\delta\Delta e_{ij}dV$$

其物理意义解释如下：由于积累误差，在加载状态 n，平衡条件一般地不能严格满足，因此存在着剩余误差

$$\delta R=\int_{\partial V_{\sigma_0}}t_i^n\delta\Delta u_i dA+\int_{V_0}\rho_0 f_i^n\delta\Delta u_i dV-\int_{V_0}S_{ij}^n x_{k,i}\delta\Delta u_{k,j}dV$$

若在状态 c_n，平衡条件严格满足，则由方程(1.7)可知

$$\delta R=0$$

然而在实际计算过程中，

$$\delta R\neq 0$$

三、结　论

方程(2.4)是适用于几何非线性有限元分析的增量形式的虚功方程。若不考虑积累误差，认为在前一个加载状态，平衡条件可以严格满足，则方程(2.4)与文[1]和[2]中的结果是一致的。

然而，在非线性有限元分析中，在平衡迭代过程必须考虑剩余误差。

参 考 文 献

[1] Brockman, R. A., Nonlinear finite element analysis of sandwich composites, AFWAL-TR-81-3006, AD-A106, March (1981), 378.

[2] Murakava, H., Incremental hybrid finite element method for finite deformation problem (with special emphases on complementary energy principles), Ph. D. Thesis, School of ESM, Georgia Institute of Technology (1978).

[3] Malvern, L. E., *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*, Prentice-Hall, Inc. (1969).

[4] Spencer, A. J. M., *Continuum Mechanics*, London Longman (1980).

Incremental Virtual Work Equation for Geometric Nonlinear Analysis

Wang Ying-jian

(*Dept. of Mechanics, Peking University, Beijing*)

Abstract

In this paper, an incremental virtual work equation is derived. It is suitable for geometric nonlinear analysis in finite element method. The effect of truncation errors is considered in the incremental virtual work equation.