应用数学和力学，第8卷第5期（1987年5月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

软弹簧Duffing方程在次谐与超次谐区域中的一些现象

徐振源　刘曾荣

（安徽淮南师专）（合肥安徽大学）

（许政范推荐，1985年10月20日收到）

摘　　要

本文用Melnikov-Holmes方法讨论了软弹簧Duffing方程在小扰动之下进入浑沌的情况，发现在有限浑沌区间中次谐与浑沌共存的复杂现象。

一、引　　言

近年来，关于浑沌的数值研究与实验观察的文献与著作大量的出现，也出现了一些用解析方法研究浑沌的工作。文[1]、[2]等利用Melnikov-Holmes 方法讨论了软弹簧Duffing 方程在弱阻尼与周期外激励作用下通向浑沌的途径。在此基础上，我们讨论了两类 Duffing 方程，发现了一些新的现象，以后我们将研究各种分叉的稳定性。

二、阈 值 的 计 算

考虑软弹簧Duffing系统

$$\ddot{x}+x-x^3=0 \tag{2.1}$$

(2.1)是Hamilton系统，其Hamiltonian量为

$$H=\frac{1}{2}(\dot{x})^2+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{4}x^4=\text{const} \tag{2.2}$$

在相平面上，当$H=1/4$时，存在一对heteroclinic轨道组成的 heteroclinic loop，当$0<H<1/4$时，在此loop内存在一族以H为参数的周期轨。随H的增加，这族轨道的周期由 2π 单调地增加到∞，求解后得

1．两条heteroclinic轨道为

$$x_0=\pm\text{th}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t\right),\ y_0=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\text{sech}^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t\right) \tag{2.3}$$

2. 参数为H_k的周期轨道为

$$\left.\begin{aligned} x_k &= \frac{\sqrt{2}\,k}{\sqrt{1+k^2}}\,\mathrm{sn}\left(\frac{t}{\sqrt{1+k^2}},k\right) \\ y_k &= \frac{\sqrt{2}\,k}{1+k^2}\ \mathrm{cn}\left(\frac{t}{\sqrt{1+k^2}},k\right)\mathrm{dn}\left(\frac{t}{\sqrt{1+k^2}},k\right) \end{aligned}\right\} \tag{2.4}$$

其中 sn、dn、cn为Jacobi 椭圆函数，k 满足$H_k=\frac{k^2}{(1+k^2)^2}$，周期$T_k=4\sqrt{1+k^2}\,K(k)$，$K(k)$为第一类完全椭圆积分。

（Ⅰ） 现在我们讨论

$$\ddot{x}+x-x^3=-\varepsilon r\dot{x}-\varepsilon\delta(a\,\mathrm{sgn}\dot{x}+\cos\omega t+\cos 2\omega t) \tag{2.5}$$

对于两条heteroclinic轨道的Melnikov函数为

$$\begin{aligned} M(t_0) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\Big[-ry_0(t)+\delta\cos\omega(t+t_0) \\ &\quad +\delta\cos 2\omega(t+t_0)+\delta a\,\mathrm{sgn}\dot{x}_0\Big]y_0(t)dt \\ &= -\frac{2\sqrt{2}}{3}r\pm\sqrt{2}\pi\omega\delta\,\mathrm{csch}\frac{\sqrt{2}}{2}\pi\omega\cos\omega t_0 \\ &\quad \pm 2\sqrt{2}\pi\omega\,\mathrm{csch}\frac{2\sqrt{2}}{2}\pi\omega\cos 2\omega t_0+2a\delta \end{aligned}$$

当参数δ/r满足

$$\frac{2\sqrt{2}/3}{2a-\sqrt{2}\pi\omega\,\mathrm{csch}\frac{\sqrt{2}}{2}\pi\omega-2\sqrt{2}\pi\omega\,\mathrm{csch}\frac{2\sqrt{2}}{2}\pi\omega}>\frac{\delta}{r}$$

$$>\frac{2\sqrt{2}/3}{2a+\sqrt{2}\pi\omega\,\mathrm{csch}\frac{\sqrt{2}}{2}\pi\omega+2\sqrt{2}\pi\omega\,\mathrm{csch}\frac{2\sqrt{2}}{2}\pi\omega}$$

系统进入浑沌状态。

$$\left.\begin{aligned} R_{\infty d} &= \frac{2\sqrt{2}/3}{2a+\sqrt{2}\pi\omega\,\mathrm{csch}\frac{\sqrt{2}}{2}\pi\omega+2\sqrt{2}\pi\omega\,\mathrm{csch}\frac{2\sqrt{2}}{2}\pi\omega} \\ R_{\infty v} &= \frac{2\sqrt{2}/3}{2a-\sqrt{2}\pi\omega\,\mathrm{csch}\frac{\sqrt{2}}{2}\pi\omega-2\sqrt{2}\pi\omega\,\mathrm{csch}\frac{2\sqrt{2}}{2}\pi\omega} \end{aligned}\right\} \tag{2.6}$$

作为产生浑沌的上下阈值。

对于满足$T=T(k)=4\sqrt{1+k^2}\,K(k)=2m\pi/n$（$m$，$n$为互质整数）的次谐Melnikov 函数为

$$\begin{aligned} M^{\frac{m}{n}}(t_0) &= -rJ_1(m,n)+\delta J_2^{(1)}(m,n)\cos\omega t_0 \\ &\quad +\delta J_2^{(2)}(m,n)\cos 2\omega t_0+J_3\delta \end{aligned} \tag{2.7}$$

其中

$$J_1(m,n)=\pm\frac{8n}{3(1+k^2)^{3/2}}[(k^2-1)K(k)+(k^2+1)E(k)] \tag{2.8}$$

$$J_2^{(j)}(m,n)=\begin{cases}0 & (n\neq j)\\ 2\sqrt{2}\,\pi\omega j^2\mathrm{csch}\dfrac{\pi mK'(k)}{2K(k)} & (n\neq j,\ j=1,2;\ m\text{奇数})\end{cases} \tag{2.9}$$

$$J_3=4nC_k a \tag{2.10}$$

其中C_k满足

$$\frac{C_k^2}{2}-\frac{C_k^4}{4}=H_k$$

由以上结果，次谐和超次谐阈值是

$$R_{dm}^{(j)}=\frac{J_1}{J_3+2\sqrt{2}\,\pi j^2\omega\mathrm{csch}\dfrac{\pi mK'(k)}{2K(k)}} \tag{2.11}$$

$$R_{vm}^{(j)}=\frac{J_1}{J_3-2\sqrt{2}\,\pi j^2\omega\mathrm{csch}\dfrac{\pi mK'(k)}{2K(k)}} \tag{2.12}$$

（Ⅱ） 现在我们讨论

$$\ddot{x}+x-x^3=-\varepsilon rx^2\mathrm{sgn}\dot{x}+\varepsilon\delta(a\mathrm{sgn}\dot{x}+\cos\omega t+\cos2\omega t) \tag{2.13}$$

类似于(Ⅰ)产生浑沌的上下阈值为

$$\tilde{R}_{\infty d}=\frac{2/3}{2a+\sqrt{2}\,\pi\omega\,\mathrm{csch}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\pi\omega+2\sqrt{2}\,\pi\omega\,\mathrm{csch}\dfrac{2\sqrt{2}}{2}\pi\omega} \tag{2.14}$$

$$\tilde{R}_{\infty v}=\frac{2/3}{2a-\sqrt{2}\,\pi\omega\,\mathrm{csch}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\pi\omega-2\sqrt{2}\,\pi\omega\,\mathrm{csch}\dfrac{2\sqrt{2}}{2}\pi\omega} \tag{2.15}$$

$$\widetilde{M}^{m/n}(t_0)=-r\tilde{J}_1+\delta\tilde{J}_2^{(1)}\cos\omega t_0+\delta\tilde{J}_2^{(2)}\cos2\omega t_0+\delta\tilde{J}_3 \tag{2.16}$$

其中

$$\tilde{J}_1=\frac{4}{3}nC_k^3 \tag{2.17}$$

$$\tilde{J}_2^{(j)}=\begin{cases}2\sqrt{2}\,\pi\omega j^2\mathrm{csch}\left(\dfrac{m\pi K'(k)}{2K(k)}\right) & (n=j,\ m\text{是奇数})\\ 0 & (n\neq j,\ \ j=1,\ 2)\end{cases} \tag{2.18}$$

$$\tilde{J}_3=4nC_k a \tag{2.19}$$

次谐和超次谐阈值为

$$\tilde{R}_{md}^{(j)}=\frac{\tilde{J}_1}{\tilde{J}_3+2\sqrt{2}\,\pi\omega j^2\mathrm{csch}\dfrac{\pi mK'(k)}{2K(k)}} \tag{2.20}$$

$$\tilde{R}_{mv}^{(j)}=\frac{\tilde{J}_1}{\tilde{J}_3-2\sqrt{2}\,\pi\omega j^2\mathrm{csch}\dfrac{\pi mK'(k)}{2K(k)}} \tag{2.21}$$

三、分析和讨论

（Ⅰ） 现在我们分析在(2.5)的浑沌区域中发生的现象

（1） 令$m\to\infty$，$k\to1$，对任意固定的ω，完成分叉极限的阈值是

$$\tilde{R}_{md}^{(j)}\to R_d^j=\frac{4\sqrt{2}/3}{4a+2\sqrt{2}\pi\omega j\ \mathrm{csch}\frac{\sqrt{2}}{2}\pi\omega j} \tag{3.1}$$

$$\tilde{R}_{mv}^{(j)}\to R_v^{(j)}=\frac{4\sqrt{2}/3}{4a-2\sqrt{2}\pi\omega j\ \mathrm{csch}\frac{\sqrt{2}}{2}\pi\omega j}\qquad (j=1,2) \tag{3.2}$$

当m单调增加时，k接近于1，我们有

$$R_{md}^{(j)}<R_d^{(j)}\qquad R_{mv}^{(j)}<R_v^{(j)}\qquad (j=1,2) \tag{3.3}$$

（2） 我们比较浑沌阈值和分叉极限阈值

$$R_{\infty d}^{(j)}<R_d^{(j)}\qquad R_{\infty v}^{(j)}>R_v^{(j)}\qquad (j=1,2)$$

按照大小排列则有

$$R_{1d}^{(j)}<\cdots<R_{\infty d}^{(j)}<\cdots<R_d^{(j)}<\cdots<R_{mv}^{(j)}<\cdots<R_v^{(j)}<\cdots<R_{\infty v} \tag{3.4}$$

当$\omega=2$，$a=1/2$

$$R_{\infty d}=0.7762\qquad R_{\infty v}=1.200\qquad R_d^{(1)}=0.7794$$

$$R_v^{(1)}=1.192\qquad R_d^{(2)}=0.9381\qquad R_v^{(2)}=1.0050$$

由(3.4)可以看到，对一定的ω，即

$$a>\frac{\sqrt{2}}{2}\pi\omega j\ \mathrm{csch}\frac{\sqrt{2}}{2}j\pi\omega\qquad (j=1,2)$$

当参数逐渐增大，$R_{md}^{(j)}<\delta/r<R_{mv}^{(j)}$发生奇阶次分叉，当$\delta/r$超过$R_{\infty d}$系统进入浑沌．所以次谐和超次谐与浑沌共 存；当$\delta/r>R_v^{(2)}$时，超次谐消失，此时次谐与浑沌共存；当$\delta/r>R_v^{(1)}$，次谐也消失，系统完全处在浑沌状态。最后，当$\delta/r>R_{\infty v}$，浑沌也消失。由此我们容易理解从实验观察得到的浑沌阈值大于理论计算得到的阈值，因为当次谐超次谐与浑沌共存时，浑沌吸引区域可能很小。

（Ⅱ） 现在我们分析在(2.13)的浑沌区域中发生的现象。类似于（Ⅰ），我们得到

（1）

$$\tilde{R}_{md}^{(j)}\to\tilde{R}_d^{(j)}=\frac{2/3}{2a+\sqrt{2}j\pi\omega\ \mathrm{csch}\frac{\sqrt{2}}{2}\pi j\omega} \tag{3.5}$$

$$\tilde{R}_{mv}^{(j)}\to\tilde{R}_v^{(j)}=\frac{2/3}{2a-\sqrt{2}j\pi\omega\ \mathrm{csch}\frac{\sqrt{2}}{2}\pi j\omega} \tag{3.6}$$

当m单调增加，k接近于1，a满足

$$\frac{\sqrt{2}\pi\omega}{2}\operatorname{csch}\frac{\sqrt{2}\pi\omega}{2}+\frac{2\sqrt{2}\pi\omega}{2}\operatorname{csch}\frac{2\sqrt{2}\pi\omega}{2}<a$$

$$<\frac{3\sqrt{2}\pi\omega j}{4C_k}\operatorname{csch}\omega\sqrt{1+k^2}K'(k)j \tag{3.7}$$

当$\omega=1$，$k=0.95$，$0.50<a<0.73$，我们有

$$\tilde{R}_{md}^{(j)}<\tilde{R}_{d}^{(j)}\qquad\qquad (j=1,2) \tag{3.8}$$

$$\tilde{R}_{mv}^{(1)}>\tilde{R}_{v}^{(1)}\qquad\qquad \tilde{R}_{mv}^{(2)}<\tilde{R}_{v}^{(2)} \tag{3.9}$$

（2） 我们比较浑沌阈值与分叉极限阈值有

$$\tilde{R}_{\infty d}^{(j)}<\tilde{R}_{d}^{(j)}\qquad\qquad \tilde{R}_{\infty v}^{(j)}<\tilde{R}_{v}^{(j)}$$

按照大小排列，成立

$$\tilde{R}_{1}^{(j)}<\cdots<\tilde{R}_{\infty d}^{(j)}<\cdots<\tilde{R}_{mv}^{(2)}<\cdots<\tilde{R}_{v}^{(2)}<\cdots<\tilde{R}_{v}^{(1)}<\cdots<\tilde{R}_{mv}^{(1)}<\cdots<\tilde{R}_{\infty v} \tag{3.10}$$

当 $\omega=1$　$a=0.6$ 有

$$\tilde{R}_{1d}^{(1)}=0\qquad \tilde{R}_{3d}^{(1)}=0.2990\qquad \tilde{R}_{d}^{(2)}=0.3174\qquad \tilde{R}_{d}^{(1)}=0.3064$$

$$\tilde{R}_{\infty d}=0.2795\qquad \tilde{R}_{v}^{(2)}=0.6730\qquad \tilde{R}_{v}^{(1)}=2.9148\qquad \tilde{R}_{\infty v}=45.66$$

由(3.10)可以看到，对一定的ω，a满足(3.7)，当参数δ/r逐渐增加，奇阶次分叉发生；当δ/r超过$\tilde{R}_{\infty d}$，系统进入浑沌状态，所以当$\tilde{R}_{d}^{(2)}<\delta/r<\tilde{R}_{v}^{(2)}$时，次谐与超次谐与浑沌共存，但是当$\delta/r>\tilde{R}_{v}^{(1)}$时，次谐分叉依然存在，次谐与浑沌在整个区域中共存。在这类系统的实验中浑沌更不易发现。

作者对于导师许政范教授的支持和帮助表示感谢。

参 考 文 献

[1] 刘曾荣、姚伟国、朱照宣，软弹簧 Duffing 方程解进入浑沌的途径，应用数学和力学，7，2 (1986)，103—108.

[2] Liu Zeng-rong, About some phenomena in the chaos, *ICNM Symposium* (1985).

[3] Gucknheimer J. and P. Holmes, *Nonlinear Oscillation, Dynamical, and Bifurcation of Vector Fields*, Springer-Verlag (1983).

Some Phenomena for Weak Spring Duffing Equation in Subharmonic and Ultrasubharmonic Region

Xu Zhen-yuan
(*Anhui Huainan Normal College, Huainan*)

Liu Zeng-rong
(*Anhui University, Hefei*)

Abstract

In this paper the situation in which weak spring Duffing equation gets into chaos on account of small perturbation is discussed with Melnikov-Holmes' method and some phenomena in which the different subharmonic and the ultrasubharmonic coexist with the chaos are discovered.