

# 角点支承矩形板的纵横弯曲\*

成祥生

(同济大学, 1986年4月30日收到)

## 摘 要

本文用复分法讨论在四角点被支承的矩形板的纵横联合弯曲问题, 文中也分别讨论了薄板的横向弯曲和稳定性的问题。

## 一、前 言

在四角点被支承的矩形板的弯曲问题曾由 Б. Г. Галёркин 等人作过理论计算和实验研究<sup>[1-7]</sup>, 但 Галёркин 使用的挠度函数较复杂<sup>[1, 2]</sup>, 其中以张福范<sup>[7]</sup>所得的结果较为精确, 他使用的是迭加法。

本文将用复分法分析角点支承矩形板的纵横弯曲问题, 选用的挠度函数简单, 因为它们只须要满足薄板的几何边界条件, 若再使其满足一部分内力边界条件, 则可提高计算的精度。虽然挠度函数有三项, 相应有三个参数, 但我们仅按一个参数进行变分, 从而所花费的计算工作量较小。

## 二、挠度函数的选取

设一矩形薄板, 支承于四角点, 四边自由, 如图1所示。我们的讨论仅限于对称弯曲。若板面受有均布横向载薄 $q_0$ 和在两对对边上分别受有沿 $x$ 和 $y$ 方向的均布的纵向载薄 $p_x$ 和 $p_y$ , 见图1。由于对称弯曲, 今选取如下的挠度函数

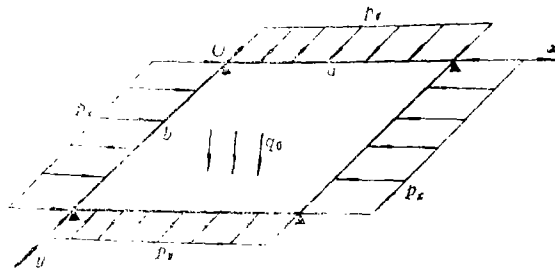


图 1

\* 钱伟长推荐。

$$w = f_1 \sin \frac{\pi}{b} y + f_2 \sin \frac{\pi}{a} x + f_0 \sin \frac{\pi}{a} x \sin \frac{\pi}{b} y \quad (2.1)$$

其中 $a$ 和 $b$ 分别为薄板沿 $x$ 轴和 $y$ 轴方向边的长度,  $f_1$ 和 $f_2$ 分别为边长为 $b$ 和 $a$ 边跨中央的挠度, 而 $f_0$ 则表示板中心的挠度, 它们都是待定的参数。

可以看出, 挠度函数(2.1)满足问题的几何边界条件

$$w(0, 0) = 0, \quad w(a, 0) = 0, \quad w(0, b) = 0, \quad w(a, b) = 0 \quad (2.2)$$

如果采用 Rayleigh-Ritz法<sup>[11, 12]</sup>分析问题, 则挠度函数仅仅满足薄板的几何边界条件(2.2)就可以了, 但如能满足一部或全部内力边界条件, 则可提高计算的精确度。

由于所有四条边界是自由的, 如所讨论的是各向同性板, 则应满足如下的内力边界条件:

对于 $x=0$ 和 $x=a$ 边, 应有

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2-\mu) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] = 0 \quad (2.4)$$

对于 $y=0$ 和 $y=b$ 边, 应有

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + (2-\mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] = 0 \quad (2.6)$$

其中(2.3)和(2.5)式是边界上的弯矩为零的条件, 而(2.4)和(2.6)是边界上综合横向剪力为零的条件。式中 $\mu$ 为板材料的波桑比。

如将(2.1)式的挠度函数 $w$ 分别代入(2.3)和(2.5), 则可发现: 若欲它满足这些公式, 则分别要求系数 $f_1$ 和 $f_2$ 为零, 这是不可能的。因此, 在边界上弯矩为零的条件(2.3)和(2.5)是不能满足的。但它们都属于自然边界条件, 通过变分它们各自均能近似地满足<sup>[14]</sup>。

今使全部四条边界上的综合横向剪力为零, 即满足条件(2.4)和(2.6)。现将(2.1)式的挠度函数 $w$ 代入(2.4)和(2.6), 可以得到

$$\left. \begin{aligned} f_2 &= -\frac{\pi}{4} f_0 \left[ 1 + (2-\mu) \frac{a^2}{b^2} \right] \\ f_1 &= -\frac{\pi}{4} f_0 \left[ 1 + (2-\mu) \frac{b^2}{a^2} \right] \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

若令

$$\left. \begin{aligned} \beta_1 &= -\frac{\pi}{4} \left[ 1 + (2-\mu) \frac{b^2}{a^2} \right] \\ \beta_2 &= -\frac{\pi}{4} \left[ 1 + (2-\mu) \frac{a^2}{b^2} \right] \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

则(2.7)式可写成

$$f_1 = \beta_1 f_0, \quad f_2 = \beta_2 f_0 \quad (2.9)$$

其中 $\beta_1$ 和 $\beta_2$ 都是常数。

于是函数(2.1)可表示如下

$$w = f_0 \left( \beta_1 \sin \frac{\pi}{b} y + \beta_2 \sin \frac{\pi}{a} x + \sin \frac{\pi}{a} x \sin \frac{\pi}{b} y \right) \quad (2.10)$$

这样, (2.10)的挠度函数  $w$  中只包含一个未知参数  $f_0$ , 并且它是独立的。同时这个挠度函数除了满足几何边界条件(2.2)之外, 尚满足薄板周边综合横向剪力为零的部分内力边界条件(2.4)和(2.6)。如应用Rayleigh-Ritz法, 这样就可提高问题计算的精度。

如果薄板保正交各向异性板, 则内力边界条件(2.4)和(2.6)应用下式来代替<sup>(8)</sup>

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \left( 2 \frac{D_3}{D_1} - \mu_2 \right) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right]_{x=0} = 0 \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \left( 2 \frac{D_3}{D_2} - \frac{D_1}{D_2} \mu_2 \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right]_{y=0} = 0 \quad (2.12)$$

其中各个符号也参见[8]。

### 三、薄板的纵横弯曲

设一矩形薄板, 四角被支承, 受力如图1所示; 并假定  $p_x$  和  $p_y$  小于临界力, 这时整个系统的形变势能是<sup>(9)</sup>

$$U = \frac{D}{2} \iint \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2\mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2(1-\mu) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy \quad (3.1)$$

其中

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$$

是板的弯曲刚度;  $E$  和  $h$  分别为板材料的弹性模量和板厚。

如果是正交各向异性板, 则(3.1)式应以下式来代替<sup>(8)</sup>

$$U = \frac{1}{2} \iint \left[ D_1 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + D_2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2D_1 \mu_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 4D_4 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy \quad (3.2)$$

式中各个符号也参见[8]。

外力的势能是<sup>(10)</sup>

$$W = \iint q_0 w dx dy + \frac{1}{2} \iint \left[ p_x \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + p_y \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy \quad (3.3)$$

以上各式中所有的二重积分均遍及板的中面。

于是系统的总势能为

$$\Pi = U - W \quad (3.4)$$

根据Rayleigh-Ritz法<sup>(11,12)</sup>, 系统在稳定平衡时, 其总势能为最小, 即

$$\delta \Pi = 0 \quad (3.5)$$

从而可确定唯一的未知参数  $f_0$ 。

将挠度(2.10)代入(3.1)和(3.3), 积分后可得

$$U = \frac{1}{2} f_0^2 \sum_i F_i \quad (i=1, 2, 3, 4) \quad (3.6)$$

$$W = f_0 F_5 + \frac{1}{2} f_0^2 (p_x F_6 + p_y F_7) \quad (3.7)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} F_1 &= \frac{\pi^4}{4} ab \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2 D \\ F_2 &= \frac{\pi^4}{2} \frac{b}{a^3} \left( \beta_2^2 + \frac{4}{\pi} \beta_2 \right) D \\ F_3 &= \frac{\pi^4}{2} \frac{a}{b^3} \left( \beta_1^2 + \frac{4}{\pi} \beta_1 \right) D \\ F_4 &= 2\mu\pi^4 \frac{1}{ab} \left( \frac{4}{\pi^2} \beta_1 \beta_2 + \frac{1}{\pi} \beta_1 + \frac{1}{\pi} \beta_2 \right) D \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

$$\left. \begin{aligned} F_5 &= \frac{2}{\pi} q_0 ab \left( \beta_1 + \beta_2 + \frac{2}{\pi} \right) \\ F_6 &= \frac{\pi^2}{2} \frac{b}{a} \left( \beta_2^2 + \frac{4}{\pi} \beta_2 + \frac{1}{2} \right) \\ F_7 &= \frac{\pi^2}{2} \frac{a}{b} \left( \beta_1^2 + \frac{4}{\pi} \beta_1 + \frac{1}{2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

将(3.6)和(3.7)代入(3.4), 并由(3.5)对 $f_0$ 进行变分, 可得

$$f_0 = \frac{F_5}{\sum_i F_i - p_x F_6 - p_y F_7} \quad (i=1, 2, 3, 4) \quad (3.10)$$

这样板的挠度可由(2.10)和(3.10)完全确定.

若为一方板的情形, 计算比较简单些, 因为这时 $b=a$ , 若取 $\mu=0.3$ , 则由(2.8)可得

$$\beta_1 = \beta_2 = \beta = -2.1206 \quad (3.11)$$

由(3.8)及(3.9)可求得各式的数值如下

$$\left. \begin{aligned} F_1 &= 97.41D/a^2, \quad F_2 = F_3 = 87.5161D/a^2 \\ F_4 &= 27.6163D/a^2, \quad F_5 = -2.29480q_0a^2 \\ F_6 &= F_7 = 11.33470 \end{aligned} \right\} \quad (3.12)$$

将(3.11)及(3.12)代入(3.10)可得

$$f_0 = - \frac{2.2948 q_0 a^4}{300.0585D - 11.3347(p_x + p_y)a^2} \quad (3.13)$$

若给出 $p_x$ 和 $p_y$ , 则可由(2.10)及(3.13)便得到关于支承于四角点的方板在均布横向载荷 $q_0$ 及双向均匀压力联合作用下的纵横弯曲问题的解答

$$\begin{aligned} w = & - \frac{2.2948q_0a^4}{300.0585D - 11.3347(p_x + p_y)a^2} \\ & \cdot \left[ -2.1206 \left( \sin \frac{\pi}{a} y + \sin \frac{\pi}{a} x \right) + \sin \frac{\pi}{a} x \sin \frac{\pi}{a} y \right] \end{aligned} \quad (3.14)$$

该式表示板在横向力 $q_0$ 及双向纵向力 $p_x$ 和 $p_y$ 联合作用之下板的挠曲面方程.

在上式中我们假定 $p_x$ 和 $p_y$ 为压力, 如为拉力则应在 $p_x$ 和 $p_y$ 前改为正号.

若要求板中点 $\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$ 处的最大挠度, 则由(3.14)得

$$w_{\max} = \frac{7.4379 q_0 a^4}{300.0585D - 11.3347(p_x + p_y)a^2} \quad (3.15)$$

如果薄板在中心受一集中力 $P$ 及纵向力 $p_x$ 和 $p_y$ 同时作用, 则(3.9)式的 $F_5$ 应换为

$$F_5 = P(\beta_1 + \beta_2 + 1) \quad (3.16)$$

对于方板

$$F_5 = -3.24116P \quad (3.17)$$

将(3.17)代入(3.10), 可得

$$f_0 = -\frac{3.24116 Pa^2}{300.0585D - 11.3347(p_x + p_y)a^2} \quad (3.18)$$

若给出 $p_x$ 和 $p_y$ , 则可由(2.10)和(3.18)便得到支承于四角点的方板在中心受集中载荷及双向均匀压力联合作用下的纵横弯曲问题的解答

$$w = -\frac{3.24116 Pa^2}{300.0585D - 11.3347(p_x + p_y)a^2} \cdot \left[ -2.1206 \left( \sin \frac{\pi}{a} y + \sin \frac{\pi}{a} x \right) + \sin \frac{\pi}{a} x \sin \frac{\pi}{a} y \right] \quad (3.19)$$

该式表示了板在中心受横向集中力及纵向力 $p_x$ 和 $p_y$ 联合作用之下板的挠曲面方程。由上式可求出板中心点 $\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$ 处的最大挠度

$$w_{\max} = \frac{10.5054 Pa^2}{300.0585D - 11.3347(p_x + p_y)a^2} \quad (3.20)$$

如果没有纵向力 $p_x$ 和 $p_y$ , 则得到板横向弯曲问题的解答。

如果纵向力 $p_x$ 和 $p_y$ 的大小没有限定, 则由上式可令分母为零, 便可求得临界力的大小。对于最后两种情形, 我们以下将作数值计算。

#### 四、薄板的横向弯曲和稳定性

##### (A) 薄板的横向弯曲

如果没有纵向力, 就是横向弯曲的情形。当薄板只有横向的分布力时, 只要在(3.13)和(3.14)的分母中, 令 $p_x = p_y = 0$ , 可得到

$$f_0 = -0.007648 q_0 a^4 / D \quad (4.1)$$

以及薄板在横向均匀分布载荷 $q_0$ 作用之下挠曲面的方程

$$w = -0.007648 \frac{q_0 a^4}{D} \left[ -2.1206 \left( \sin \frac{\pi}{a} y + \sin \frac{\pi}{a} x \right) + \sin \frac{\pi}{a} x \sin \frac{\pi}{a} y \right] \quad (4.2)$$

最大挠度是在板的中点 $\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$ 处, 其值为

$$w_{\max} = 0.02479 q_0 a^4 / D \quad (4.3)$$

最大弯矩也在板的中点, 其值为

$$M_{\max} = 0.1100 q_0 a^2 \quad (4.4)$$

令将最大挠度及最大弯矩值和张福范<sup>[7]</sup>, Галеркин<sup>[1,2]</sup>所得的对应值列表比较如下

表 1

作者	数值 $w_{\max}\left(\frac{q_0 a^4}{D}\right)$	最大挠度 $M_{\max}(q_0 a^2)$	最 小 弯 矩
张福范 <sup>[7]</sup>	0.02529		0.1119
Галёркин <sup>[1, 2]</sup>	0.02490		0.1090
本 文	0.02479		0.1100

从上表中可看出用三种方法所得的结果其间相差不是很大。

如果薄板在中心受集中力 $P$ 作用, 那只要在(3.18)和(3.19)中令 $p_x = p_y = 0$ , 可得到

$$f_0 = -0.01080 Pa^2/D \quad (4.5)$$

以及薄板在中心受集中力 $P$ 作用下挠曲面的方程

$$w = -0.01080 \frac{Pa^2}{D} \left[ -2.1206 \left( \sin \frac{\pi}{a} y + \sin \frac{\pi}{a} x \right) + \sin \frac{\pi}{a} x \sin \frac{\pi}{a} y \right] \quad (4.6)$$

最大挠度是在板的中点 $\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$ , 其值为

$$w_{\max} = 0.03501 Pa^2/D \quad (4.7)$$

这个数字比张福范用迭加法所得的结果<sup>[7]</sup> $0.039443 Pa^2/D$ 稍小。

最大弯矩也在板的中点, 其值为

$$M_{\max} = 0.155279P \quad (4.8)$$

若按级数解的结果, 在中心受载点的弯矩为无限大, 此处所得的结果相当于文献[13]的表11中所给出的: 为总载荷 $P$ 均匀分布于 $0.235a$ 见方的小面积上所产生的最大弯矩。

### (B) 薄板的稳定性

如果要求薄板的临界载荷, 则可从(3.14)或(3.19)式求之, 但更一般的求法如下。

因为此时外力的势能 $W$ 仅由 $p_x$ 和 $p_y$ 所产生, 于是令 $q_0 = 0$ , 由(3.9)则得 $F_6 = 0$ , 从而

$$W = \frac{1}{2} f_0^2 (p_x F_6 + p_y F_7) \quad (4.9)$$

其中 $F_6$ 和 $F_7$ 仍由(3.9)表示。

若令 $p_y = \alpha p_x$ , 则

$$W = \frac{1}{2} f_0^2 p_x (F_6 + \alpha F_7) \quad (4.10)$$

将(3.6)和(4.10)代入(3.4), 并由(3.5)可得最小的临界载荷

$$\min(p_x)_{cr} = \frac{\sum F_i}{F_6 + \alpha F_7} \quad (i=1, 2, 3, 4) \quad (4.11)$$

若 $p_x = p_y$ , 则 $\alpha = 1$ , 并将(3.12)的诸 $F$ 值代入上式, 可得方板受双向等压力时的最小临界载荷

$$\min(p_x)_{cr} = \min(p_y)_{cr} = 13.2363 \frac{D}{a^2} \quad (4.12)$$

对于更复杂的薄板稳定性问题, 亦可类似地进行分析。

## 五、结 束 语

1. 本文用变分法给出了在四个角点被支承的矩形板纵横联合弯曲问题的一般解答(3.10)。

2. 文中亦分别讨论了薄板横向弯曲和稳定性的问题。并分别求出了在均布横向载荷 $q_0$ 作用及中心受载情形之下方板的最大挠度(4.3)及(4.7)和最大弯矩值(4.4)及(4.8)。并将前者的数值列表和已知值作了比较。

3. 同时也求出了方板受双向等压时的临界力公式(4.12)。

4. 选取的挠度函数除满足全部几何边界条件外, 尚满足一部分内力边界条件, 因此可提高计算的精度。

5. 所选用的挠度函数在形式上简单, 由于使它满足一部分内力边界条件, 因此得出一些约束条件, 于是有些系数不是独立的, 这样就减少了被变分的系数的数目, 从而使计算简单。

6. 如果要求更精确的解答, 则可在(2.1)中取更多的项, 例如

$$w = \sum_n f_n^{(1)} \sin \frac{n\pi y}{b} + \sum_m f_m^{(2)} \sin \frac{m\pi x}{a} + \sum_m \sum_n f_{mn}^{(3)} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

其中 $m$ 和 $n$ 可取到3或5, 不过这时计算将变得比较复杂和冗赘。

## 参 考 文 献

- [1] Галёркин Б. Г., *Упругие Тонкие Плиты*, Госстройиздат., М. (1933).
- [2] Галёркин Б. Г., *Избранные Трубы*, Том. I, Москва (1953), 15.
- [3] Dimifrov, N., *Bauingenieur*, 32 (1957), 359.
- [4] Marcus, H., *Die Theorie Elastischer Gewebe*, Zweite Auflage, Berlin (1932), Seite 173.
- [5] Nadai, A., *Z. Angew. Math. Mech.* 2 (1922), Seite 1.
- [6] Шиманский Ю. А., *Изгиб Пластин*, ОНТИ., (1934).
- [7] 张福范, «弹性薄板», 第二版, 科学出版社 (1984).
- [8] Лехничкий С. Г., *Анизотропные Пластинки*, Гостехиздат., М. (1957).
- [9] Timoshenko, S. and S. Woinowsky-Krieger, *Theory of Plates and Shells*, Second Edition, McGraw-Hill Book Company, Inc. (1959).
- [10] Timoshenko, S., *Theory of Elastic Stability*, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York (1936).
- [11] Rayleigh, J. W. S., *Theory of Sound*, Macmillan and Co., Ltd., London (1877).
- [12] Ritz, W., *Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der Mathematischen Physik*, *J. Reine u. angew. Mathematik*, 135 (1908), S. 1-61.
- [13] Калманок А. С., *Расчёт Пластинок*, Москва (1959), 87.
- [14] 钱伟长, «变分法及有限元» (上册), 科学出版社 (1980).

## Combined Longitudinal with Lateral Bending of Rectangular Plates Supported at Points of Corners

Cheng Xiang-sheng

*(Tongji University, Shanghai)*

### Abstract

This paper discusses the problems of combined longitudinal with lateral bending of rectangular plates which are supported at four points of corners by means of the variational calculus. In the text the lateral bending and the stability of thin plates are also treated respectively.