应用数学和力学，第8卷第5期（1987年5月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

关于高超声速绕流问题的激波层方法*

袁镒吾

（中南工业大学，1985年4月21日收到）

摘　要

切尔诺依（Г. Г. Черный）的高超声速绕流激波层的级数解法，不适用于 $(\gamma-1)/(\gamma+1)\ll 2/(\gamma+1)M^2\sin^2\beta$ （$\gamma=c_p/c_v$ 为绝热指数，M 为马赫数，β 为激波倾角）的情形．本文只假定在激波邻近存在激波层，在此薄层内，气体密度很大，但不排除 $(\gamma-1)/(\gamma+1)\ll 2/(\gamma+1)M^2\sin^2\beta$ 的情形．

本文与切尔诺依方法的差别在于不把流动元展为 $(\gamma-1)/(\gamma+1)$ 的级数，而是采用稍许改变了的 M．E．Швец 法[2]．文中以尖头薄体的高超声速绕流问题为例，阐述了本方法的大要．对于薄圆锥的情形，得到了计算激波倾角的公式．对于 $\gamma=1$ 的情形，本文方法的一级近似解(4.9)与通用公式(3.11)完全一致．对于 $(\gamma-1)/(\gamma+1)\sim 1/M^2\sin^2\beta$ 的情形，本文的一级近似解(3.10)比通用公式(3.11)要精确些．

切尔诺依的一级近似解虽然也和通用公式(3.11)一致，但是当 $\gamma=1$ 时，$(\gamma-1)/(\gamma+1)$ 已不能代表 ρ_1/ρ_2 的数量级（ρ_1 为未扰液流的密度，ρ_2 为激波上气体的密度），因此，级数(1.3)已不复正确，切尔诺依法这时便失去了理论根据．

一、问题的提法

兹考虑平面或轴对称物体的高超声速绕流问题．在物体周线上的每一点作法线，并作这些法线的正交曲线，以此正交曲线作坐标系，记为 x, y（图1）．在此坐标系中，运动方程为[1]

$$\left.\begin{aligned}
&\rho\left(\frac{u}{1+y/R}\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{uv}{R+y}\right)=-\frac{1}{1+y/R}\frac{\partial P}{\partial x}\\
&\rho\left(\frac{u}{1+y/R}\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{u^2}{R+y}\right)=-\frac{\partial P}{\partial y}\\
&\frac{\partial}{\partial x}(\rho u r^{\nu-1})+\frac{\partial}{\partial y}[\rho v r^{\nu-1}(1+y/R)]=0\\
&\frac{u}{1+y/R}\frac{\partial S}{\partial x}+v\frac{\partial S}{\partial y}=0
\end{aligned}\right\}\tag{1.1}$$

* 钱伟长推荐．

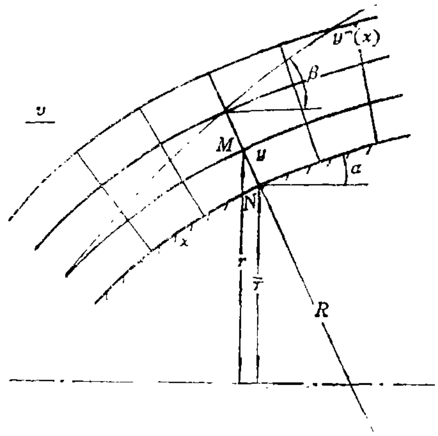

图 1

式中u及v分别代表沿x及y的速度分量，R是剖面周线的曲率半径。$\nu=1$时，对应于平面剖面，$\nu=2$时，对应于轴对称剖面。

激波上的条件为

$$
\left.\begin{aligned}
&P_2=\frac{2}{\gamma+1}\rho_1 V^2\sin^2\beta-\frac{\gamma-1}{\gamma+1}P_1\\
&\frac{\rho_1}{\rho_2}=\frac{uy^{*\prime}/(1+y^*/R)-v}{V\left(\sin\alpha+\cos\alpha\left(\frac{y^{*\prime}}{1+y^*/R}\right)\right)}\\
&\qquad=\frac{\gamma-1}{\gamma+1}+\frac{2}{\gamma+1}\frac{1}{M^2\sin^2\beta}\\
&u+\frac{vy^{*\prime}}{1+y^*/R}=V\left(\cos\alpha-\sin\alpha\frac{y^{*\prime}}{1+y^*/R}\right)
\end{aligned}\right\}\qquad(1.2a,b,c)
$$

式中 V为来流的速度；β为激波的倾角；α为物体周线的倾角；$y^*(x)$为激波的曲线；标号“1”及“2”分别代表来流及激波上的参量。

高超声速时，激波很强，$\rho_1/\rho_2\ll 1$，激波紧紧地邻近于物体的表面，气流在无限小薄层（称为激波层）内流动。

我们试来估算激波上各流动元的数量级。记$\rho_1/\rho_2=\varepsilon$，并设[4]

$$y^*\sim O(\varepsilon)$$

则由(1·2c)得

$$u_2\sim V\cos\alpha\sim O(1)$$

由(1·2b)得

$$\rho_1/\rho_2\sim v_2+O(\varepsilon)$$

故

$$v_2\sim O(\varepsilon)$$

由(1·2a)可得

$$P_2\sim O(1)$$

我们假定自激波至物面整个区域内流动参数都有上述的数量级[1]，切尔诺依取$\varepsilon=(\gamma-1)/(\gamma+1)$，即假定(1.2b)中右边第二项$2/(\gamma+1)M^2\sin^2\beta$很小，因而$\varepsilon$足以代表$\rho_1/\rho_2$

的数量级。在此情形，流动元便可展为下列级数[1]

$$\left.\begin{aligned} y&=\varepsilon y_0+\cdots \\ u&=u_0+\varepsilon u_1+\cdots \\ v&=\varepsilon v_0+\cdots \\ P&=P_0+\varepsilon P_1+\cdots \\ \rho&=\rho_0/\varepsilon+\rho_1+\cdots \end{aligned}\right\} \tag{1.3}$$

式中 $\varepsilon=(\gamma-1)/(\gamma+1)$。

但是，在ρ_1/ρ_2为小量的前提下，仍有可能出现这样的情况，即$(\gamma-1)/(\gamma+1)\ll 2/(\gamma+1)M^2\sin^2\beta, \gamma=1$时，即将出现这种情形。在此情形下，$(\gamma-1)/(\gamma+1)$就不能代表$\rho_1/\rho_2$的数量级了，级数(1.3)就不复正确了。

本文只保留激波层的概念，即假定在激波层一薄层内，几乎集中了波面与物面间的全部气体物质，因而 ρ_1/ρ_2 为小量，即保留了上述切尔诺依关于激波上流动元的数量级的估算的结论，但是抛弃了切氏的级数展开法，即不用级数公式(1.3)，而是采用稍许改变了的 M. E. Швец[2]法。

下面就用本法求解尖头薄体的高超声速绕流问题以说明本方法的大要。

二、尖头薄体的高超声速绕流问题的解法

兹考虑尖头薄体的高超声速绕流问题，根据平面截面律，薄物体的高超声速绕流与活塞膨胀所引起的平面不稳定流动相似。在此情形，旋转物体的轴对称绕流，相当于具柱面波的流动；翼剖面的绕流，相当于具平面波的流动。

设：P及ρ为气体物质的压力及密度；R为气体物质距对称轴(面)的距离；独立变量取时间t及兰格兰日坐标m；它的值由$dm=\rho^0 r^{\nu-1}dr$决定(r为初始时刻R的值，ρ^0为初密度；$\nu=1,2$相应于具平面波及柱面波的流动)。

理想气体绝热运动的方程为[1]

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial R}{\partial m}\rho^0 R^{\nu-1}=\frac{\rho^0}{\rho} \\ &\frac{\partial^2 R}{\partial t^2}=-R^{\nu-1}\frac{\partial P}{\partial m} \\ &\frac{\partial}{\partial t}P/\rho^\gamma=0 \end{aligned}\right\} \tag{2.1a,b,c}$$

1. 零级近似

由于(2.1a)的右端是微量，按M. E. Швец的方法[2]，求零级近似解时，可将(2.1)改写成为

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial R_0}{\partial m}=0 \\ &\frac{\partial^2 R_0}{\partial t^2}=-R_0{}^{\nu-1}\frac{\partial P_0}{\partial m} \\ &\frac{\partial}{\partial t}\frac{P_0}{\rho_0{}^\gamma}=0 \end{aligned}\right\} \tag{2.2}$$

上式最后一式的得来，是由于

$$P/\rho^{\gamma}=(P_0+P_1)(\rho_0+\rho_1)^{-\gamma}=(P_0+P_1)(\rho_0^{-\gamma}-\gamma\rho_0^{-\gamma-1}\rho_1+\cdots)=P_0/\rho_0{}^{\gamma}+\cdots \tag{2.3}$$

积分(2.2)得

$$\left.\begin{aligned} &R_0=R_0(t)\\ &P_0=P(t)-\frac{\ddot{R}_0}{R_0{}^{\nu-1}}m\\ &\rho_0=P_0{}^{1/\gamma}/\vartheta_0(m)\end{aligned}\right\} \tag{2.4a,b,c}$$

式中$R_0(t)$，$P(t)$，$\vartheta_0(m)$为任意函数。

2. 一级近似

求一级近似解时，按 M. E. Швец 法，可将(2.1)改写成为

$$\left.\begin{aligned} &\rho^0R^{\nu-1}\frac{\partial R}{\partial m}=\rho^0/\rho_0\\ &\frac{\partial^2R}{\partial t^2}=-R^{\nu-1}\frac{\partial P}{\partial m}\\ &\frac{\partial}{\partial t}P/\rho^{\gamma}=0\end{aligned}\right\} \tag{2.5}$$

然后求(2.5)的精确解。

我们现在稍许改变M. E. Швец的方法。因为$\rho^0/\rho\ll1$，则必有$\rho^0/\rho_0\ll1$，令

$$\rho^0/\rho_0\sim\varepsilon \tag{2.6}$$

式中标号“～”表示数量级相同，ε为小量。令

$$\left.\begin{aligned} &\rho=\rho_0+\rho_1+\rho_2+\cdots\\ &P=P_0+P_1+P_2+\cdots\\ &R=R_0+R_1+R_2+\cdots\end{aligned}\right\} \tag{2.7}$$

并规定：ρ_0的数量级为ε^{-1}；ρ_1，ρ_0及R_0的数量级为1；ρ_2，P_1及R_1的数量级为ε；P_2及R_2的数量级为ε^2，…。

将(2.7)代入(2.1)得

$$\left.\begin{aligned} &\rho^0(R_0+R_1)^{\nu-1}\frac{\partial(R_0+R_1)}{\partial m}=\frac{\rho^0}{\rho_0+\rho_1}\\ &\frac{\partial^2(R_0+R_1)}{\partial t^2}=-(R_0+R_1)^{\nu-1}\frac{\partial(P_0+P_1)}{\partial m}\\ &\frac{\partial}{\partial t}[(P_0+P_1)/(\rho_0+\rho_1)^{\gamma}]=0\end{aligned}\right\} \tag{2.8a,b,c}$$

略去数量级为$O(\varepsilon^2)$各项，(2.8a)可简化为

$$R_0^{\nu-1}\frac{\partial R_1}{\partial m}=1/\rho_0 \tag{2.9}$$

现简化(2.8b)：

$$\frac{\partial^2R_0}{\partial t^2}+\frac{\partial^2R_1}{\partial t^2}=-[R_0^{\nu-1}+(\nu-1)R_0{}^{\nu-2}R_1+\cdots]\cdot\left(\frac{\partial P_0}{\partial m}+\frac{\partial P_1}{\partial m}\right)$$

$$=-\left[R_0^{\nu-1}\frac{\partial P_0}{\partial m}+(\nu-1)R_0^{\nu-2}R_1\frac{\partial P_0}{\partial m}+R_0^{\nu-1}\frac{\partial P_1}{\partial m}\right]$$

将(2.2)代入得

$$R_0^{\nu-1}\frac{\partial P_1}{\partial m}=(\nu-1)\frac{\ddot{R}_0}{R_0}R_1-\frac{\partial^2 R_1}{\partial t^2} \tag{2.10}$$

同理，(2.8c)可简化成为：

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{P_1}{P_0}-\gamma\frac{\rho_1}{\rho_0}\right)=0 \tag{2.11}$$

将(2.9)～(2.11)积分，最后得

$$\left.\begin{aligned}
&R_1=-\frac{1}{R_0^{\nu-1}}\int_{m^*}^{m}\frac{\vartheta_0(m)}{P_0^{1/\gamma}}dm+R_1^*(t)\\
&P_1=(\nu-1)\frac{\ddot{R}_0}{R_0^{\nu}}\int_{m^*}^{m}R_1\,dm\\
&\qquad-\frac{1}{R_0^{\nu-1}}\int_{m^*}^{m}\frac{\partial^2 R_1}{\partial t^2}dm+P_1^*(t)\\
&\frac{P_1}{P_0}-\gamma\frac{\rho_1}{\rho_0}=\vartheta_1(m)
\end{aligned}\right\} \tag{2.12a,b,c}$$

边界条件为[1]

（1） 在激波上的条件：

$$\left.\begin{aligned}
&m=\rho^0R^{*\nu}/\nu\\
&P^*=\frac{2}{\gamma+1}\rho^0D^2-\frac{\gamma-1}{\gamma+1}P^0\\
&\rho^*=\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\rho^0\Big/\left(1+\frac{2}{\gamma-1}\frac{a^{0\,2}}{D^2}\right)
\end{aligned}\right\} \tag{2.13a,b,c}$$

这里，a为声速，$D=dR^*/dt$为激波传播速度，P^0，ρ^0为初压力及初密度。

（2） 活塞表面上的条件

$$m=0\text{时}，\quad R=\bar{R}(t) \tag{2.14}$$

现在，问题归结为求(2.4)及(2.12)的满足边界条件(2.13)及(2.14)的解，我们分别就两种不同情形来解这问题，这两种情形是

1) $$\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\sim\frac{a^{0\,2}}{D^2}\sim O(\varepsilon)$$

2) $$\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\ll\frac{2}{\gamma+1}\frac{a^{0\,2}}{D^2}\sim O(\varepsilon)$$

三、$\dfrac{\gamma-1}{\gamma+1}\sim\dfrac{a^{0\,2}}{D^2}\sim O(\varepsilon)$时，尖头薄体高超声速绕流问题的解

设$R_0(t)$是激波的传播规律，由(2.8c)得

$$\rho_0+\rho_1+\rho_2+\cdots=\rho^0\Big/\left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1}+\frac{2}{\gamma+1}\frac{a^{0\,2}}{\dot{R}}\right)=\rho^0\Big/\left[\left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1}+\frac{a^{0\,2}}{\dot{R}_0^2}\right)-\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\frac{a^{0\,2}}{\dot{R}_0^2}\right]$$

$$=\rho^0\left[\left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1}+\frac{a^{0\,2}}{\dot R_0^2}\right)^{-1}+\left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1}+\frac{a^{0\,2}}{\dot R_0^2}\right)^{-2}\left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right)\frac{a^{0\,2}}{\dot R_0^2}+\cdots\right]$$

故得（在激波上）

$$\rho_0=\rho^0\Big/\left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1}+\frac{a^{0\,2}}{\dot R_0^2}\right),\quad \rho_1=\frac{\rho_0^2}{\rho^0}\left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right)\frac{a^{0\,2}}{\dot R_0^2} \tag{3.1}$$

(2.13b)可变为

$$P_0+P_1=\rho^0\dot R_0^2-\frac{\gamma-1}{\gamma+1}(\rho^0\dot R_0^2+P^0)$$

故得（在激波上）

$$P_0=\rho^0\dot R_0^2,\quad P_1=-\frac{\gamma-1}{\gamma+1}(\rho^0\dot R_0^2+P^0) \tag{3.2}$$

现求$\vartheta_0(m)$，在激波上，将(3.1)及(3.2)代入(2.4c)可求得$\vartheta(m^*)$，于是得

$$\rho^0\Big/\left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1}+\frac{a^{0\,2}}{\dot R^2(\tau)}\right)=\frac{(\rho^0\dot R_0^2(\tau))^{1/\gamma}}{\vartheta_0(m)}$$

故

$$\vartheta_0(m)=\frac{(\rho^0\dot R_0^2(\tau))^{1/\gamma}}{\rho^0}\left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1}+\frac{a^{0\,2}}{\dot R_0^2(\tau)}\right) \tag{3.3}$$

$$\rho_0=P_0^{1/\gamma}\rho^0\Big/\left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1}+\frac{a^{0\,2}}{\dot R^2(\tau)}\right)\left(\rho^0\dot R_0^2(\tau)\right)^{1/\gamma} \tag{3.4}$$

将(3.2)将代(2.4b)得

$$P(t)=\rho^0\dot R_0^2+\frac{\ddot R_0}{R_0^{\nu-1}}\frac{\rho^0R_0^\nu}{\nu}$$

得

$$P_0=\rho^0\dot R_0^2+\rho^0\frac{\ddot R_0R_0}{\nu}-\frac{\ddot R_0}{R_0^{\nu-1}}m \tag{3.5}$$

在(2.12a)中，因在激波上，$R_1=0$，故$R_1^*(t)=0$，将(3.3)及(3.5)代入(2.12a)，并注意到$m=\rho^0R_0^\nu(\tau)/\nu$，$dm=\rho^0R_0^{\nu-1}(\tau)\dot R_0(\tau)d\tau$得

$$R_1=-\frac{1}{R_0^{\nu-1}}\int_\tau^t\frac{\left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1}+\frac{a^{0\,2}}{\dot R_0^2(\tau)}\right)R_0^{\nu-1}(\tau)\dot R_0^{2/\gamma+1}(\tau)d\tau}{\left[\dot R_0^2+\frac{R_0\ddot R_0}{\nu}\left(1-\frac{R_0^\nu(\tau)}{R_0^\nu}\right)\right]^{1/\gamma}}$$

在(2.12b)中，因在激波上

$$P_1=-\frac{\gamma-1}{\gamma+1}(\rho^0\dot R_0^2+P^0)$$

故得

$$P_1^*(t)=-\frac{\gamma-1}{\gamma+1}(\rho^0\dot R_0^2+P^0)$$

$$P_1=(\nu-1)\frac{\ddot R_0}{R_0^\nu}\int_{m^*}^m R_1dm-\frac{1}{R_0^{\nu-1}}\int_{m^*}^m\frac{\partial^2R_1}{\partial t^2}dm-\frac{\gamma-1}{\gamma+1}(P^0+\rho^0\dot R_0^2) \tag{3.6}$$

将(3.1)及(3.2)代入(2.12c)得

$$\vartheta_1(m)=-\left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right)\left(1+\frac{a^{0\,2}}{\gamma\dot{R}_0^2(\tau)}\right)-\gamma\left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right)\frac{a^{0\,2}}{\dot{R}_0^2(\tau)}\Big/\left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1}+\frac{a^{0\,2}}{\dot{R}_0^2(\tau)}\right)$$

于是得

$$\rho_1=\frac{\rho_0}{\gamma}\left[\frac{P_1}{P_0}+\left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right)\left\{1+\gamma\frac{a^{0\,2}}{\dot{R}_0^2(\tau)}\Big/\left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1}+\frac{a^{0\,2}}{\dot{R}_0^2(\tau)}\right)\right\}\right] \tag{3.7}$$

要得到问题的最后解，还必须利用在活塞表面上的条件，设活塞运动规律为$\bar{R}(t)$，则应满足条件：当$\tau=0$时

$$R=R_0+R_1+O(\varepsilon^2)=\bar{R}(t)$$

于是得

$$R_0-\frac{1}{R_0^{\nu-1}}\int_0^t\frac{\left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1}+\frac{a^{0\,2}}{\dot{R}_0^2(\tau)}\right)R_0^{\nu-1}(\tau)\dot{R}_0^{2/\gamma+1}(\tau)d\tau}{\left[\dot{R}_0^2+\frac{R_0\ddot{R}_0}{\nu}\left(1-\frac{R_0^\nu(\tau)}{R_0^\nu}\right)\right]^{1/\gamma}}=\bar{R}(t)+O(\varepsilon^2) \tag{3.8}$$

细长圆锥的绕流情形（$\nu=2$）

$$\left.\begin{aligned}\bar{R}&=ut\\ R_0&=Dt\end{aligned}\right\} \tag{3.9}$$

将(3.9)代入(3.8)得

$$D-\left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1}+\frac{a^{0\,2}}{D^2}\right)\frac{D}{2}=u$$

因

$$u=V\mathrm{tg}\alpha,\qquad D=V\mathrm{tg}\beta$$

故得

$$\frac{u}{a^0}=\frac{V}{a^0}\alpha=K,\quad \frac{D}{a^0}=\frac{V}{a^0}\beta=K_c$$

代入上式得

$$K_c-\frac{1}{2}K_c\left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1}+\frac{1}{K_c^2}\right)=K$$

解之得

$$\frac{K_c}{K}=\frac{\gamma+1}{\gamma+3}+\sqrt{\left(\frac{\gamma+1}{\gamma+3}\right)^2+\frac{\gamma+1}{\gamma+3}\frac{1}{K^2}} \tag{3.10}$$

而计算圆锥激波倾角的通用公式为[3]

$$\frac{K_c}{K}=\frac{\gamma+1}{\gamma+3}+\sqrt{\left(\frac{\gamma+1}{\gamma+3}\right)^2+\frac{2}{\gamma+3}\cdot\frac{1}{K^2}} \tag{3.11}$$

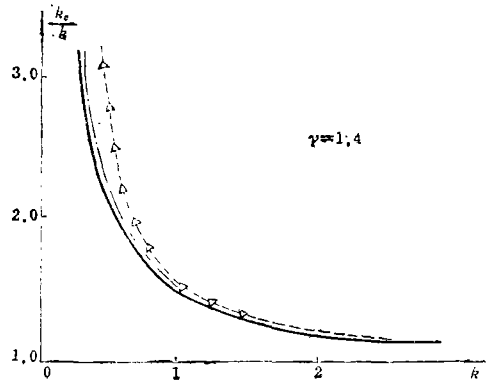

图 2

图2将本文公式(3.10)与通用公式(3.11)及精确解进行了比较。图中实曲线表通用公式(3.11)，虚线表数值解($\alpha=20°$)，点画线表本文公式(3.10)。从图可见，当$K<1$时，本文公式(3.10)比通用公式(3.11)要精确些。

四、$\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\ll\frac{2}{\gamma+1}\frac{a^{0\,2}}{\dot{R}^{0\,2}}\sim O(\varepsilon)$时，尖头薄体高超声速绕流问题的解

在此情形，我们求各级近似解时，均略去$(\gamma-1)/(\gamma+1)$。

(2.13c)可改写成为

$$\rho_0+\rho_1+\rho_2+\cdots=\rho^0\left(\frac{2}{\gamma+1}\frac{a^{0\,2}}{\dot{R}_0^2}+\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right)^{-1}$$

$$=\rho^0\left[\left(\frac{2}{\gamma+1}\frac{a^{0\,2}}{\dot{R}_0^2}\right)^{-1}-\left(\frac{2}{\gamma+1}\frac{a^{0\,2}}{\dot{R}_0^2}\right)^{-2}\left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right)+\cdots\right]$$

故得

$$\rho_0=\rho^0\left(\frac{2}{\gamma+1}\frac{a^{0\,2}}{\dot{R}_0^2}\right)^{-1},\quad \rho_1=0 \tag{4.1}$$

在激波上的条件(2.13b)改写成

$$P_0+P_1=\rho^0\dot{R}_0^2-\frac{\gamma-1}{\gamma+1}(\rho^0\dot{R}_0^2+P^0)$$

故得

$$P_0=\rho^0\dot{R}_0^2,\qquad P_1=0 \tag{4.2}$$

将 (4.1)及(4.2)代入(2.4c)得

$$\vartheta_0(m)=\frac{1}{\rho_0}(\rho^0\dot{R}_0^2(\tau))^{1/\gamma}\left(\frac{2}{\gamma+1}\frac{a^{0\,2}}{\dot{R}_0^2(\tau)}\right) \tag{4.3}$$

故

$$\rho_0=\rho^0P_0^{1/\gamma}\Big/\left[\frac{2}{\gamma+1}\frac{a^{0\,2}}{\dot{R}_0^2(\tau)}\left(\rho^0\dot{R}_0^2(\tau)\right)^{1/\gamma}\right] \tag{4.4}$$

将(4.2)代入(2.4b)得

$$P(t)=\rho^0\dot{R}_0^2+\frac{\ddot{R}_0}{R_0^{\nu-1}}\frac{\rho^0R_0^\nu}{\nu}$$

故

$$P_0=\rho^0\dot{R}_0^2+\rho^0\frac{\ddot{R}_0R_0}{\nu}-\frac{\ddot{R}_0}{R_0^{\nu-1}}m \tag{4.5}$$

将(4.3)及(4.5)代入(2.12)并注意到$R_1^*(t)=0$，得

$$R_1=-\frac{1}{R_0^{\nu-1}}\int_*^t\frac{R_0^{\nu-1}(\tau)\dot{R}_0^{2/\gamma+1}(\tau)\left(\frac{2}{\gamma+1}\frac{a^{0\,2}}{\dot{R}_0^2(\tau)}\right)d\tau}{\left[\dot{R}_0^2+\frac{R_0\ddot{R}_0}{\nu}\left(1-\frac{R_0^\nu(\tau)}{R_0^\nu}\right)\right]^{1/\gamma}} \tag{4.6}$$

在(2.12b)中，因在激波上

$$P_1=0$$

故得

$$P_1^* = 0$$

于是有

$$P_1 = (\nu - 1)\frac{\ddot{R}_0}{R_0^\nu}\int_{m^*}^{m} R_1 dm - \frac{1}{R_0^{\nu-1}}\int_{m^*}^{m}\frac{\partial^2 R_1}{\partial t^2}dm \tag{4.7}$$

将(4.1)及(4.2)代入(2.12c)得$\vartheta_1(m)=0$。故

$$\rho_1 = \frac{\rho_0}{\gamma}\frac{P_1}{P_0} \tag{4.8}$$

设活塞运动规律为$\bar{R}(t)$，在活塞表面上的条件为：当$\tau=0$时

$$R = R_0 + R_1 + O(\varepsilon^2) = \bar{R}(t)$$

于是得

$$R_0 - \frac{1}{R_0^{\nu-1}}\int_0^t \frac{R_0^{\nu-1}(\tau)\dot{R}^{2/\gamma+1}(\tau)\left(\frac{2}{\gamma+1}\frac{a^{0\,2}}{\dot{R}_0^2(\tau)}\right)d\tau}{\left[\dot{R}_0^2 + \frac{R_0\ddot{R}_0}{\nu}\left(1 - R_0^\nu(\tau)/R_0^\nu\right)\right]^{1/\gamma}} = \bar{R}(t)$$

细长圆锥的情形，$\nu=2$

$$\bar{R} = ut, \qquad R_0 = Dt$$

代入上式可得

$$D - \frac{1}{\gamma+1}\frac{a^{0\,2}}{D} = u$$

即

$$K_c - \frac{1}{\gamma+1}\cdot\frac{1}{K_c} = K$$

故得

$$\frac{K_c}{K} = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{\gamma+1}\frac{1}{K^2}} \tag{4.9}$$

从(4.9)及通用公式(3.11)可知，当$\gamma=1$时，两式是完全一致的、按切尔诺依法所得一级近似解，虽然也与通用公式(3.11)一致，但当$\gamma=1$时，$(\gamma-1)/(\gamma+1)$已不能代表ρ_1/ρ_2的量级，因此，把流动元展为$(\gamma-1)/(\gamma+1)$的级数的公式(1.3)已不正确了。所以，切尔诺依法不适用于$\gamma=1$的情形。本文所提方法就补救了这一缺点。

参 考 文 献

[1] Черный Г. Г., *Течения Газа с Большой Сверхзвуковой Скоростью*, (1959)125—139.

[2] Швец М. Е., О Приближенном решении некоторых задач гидродинамики пограничного слоя, *ПММ*., 3 (1949), 257—266.

[3] Аржаников Н. С., Г. С. Садекова, *Аэродинамика Больших Скоростей* (1965), 373—380.

[4] 复旦大学数学系编，《流体力学》(1960)，521.

On Shock Layer Method for the Hypersonic Flow Problems

Yuan Yi-wu

(South-Central University of Technology, Changsha)

Abstract

Chernyi's series method is not proper for the case that $(\gamma-1)/(\gamma+1)\ll 2/(\gamma+1)(M^2\sin^2\beta)$ ($\gamma=c_p/c_v$—adiabatic index number, M—Mach number, shock incidence). In this paper, we only suppose that in the neighbour of the shock, there exists a shock layer in which the density of the gas is very big, but we do not remove the case that $(\gamma-1)/(\gamma+1)\ll 2/(\gamma+1)$ $(M^2\sin^2\beta)$.