

相似理论与应用一方程和二方程 模式理论的范围

蔡 树 棠

(中国科学技术大学近代力学系, 上海市应用数学和力学研究所)

麻 柏 坤

(中国科学技术大学近代力学系)

(1985年12月19日收到)

摘 要

一般的流体力学工作者, 对一方程模式和二方程模式理论的适用范围是并不清楚的, 即使是湍流模式理论的工作者, 也并不见得对这些理论的适用范围非常清楚, 甚至有些时候, 算出的结果和实验不相符合也还弄不清楚问题出在那里, 本文则是从相似理论的角度来讨论湍流一方程和二方程模式理论的适用范围, 给出这些理论能应用的范围的判据。

一、引 言

通常常见的一和二方程模式理论有下面几种:

- a) 1967年Bradshaw, Ferriss和Atwell给出的湍流边界层中剪切应力模式;
- b) 1968年Nee和Kovaszny给出的湍流动量交换系数 ϵ_m 的模式;
- c) 1970年Saffman给出了 $K-\bar{\omega}^2$ 的二方程模式;
- d) 1972年Jones与Launder给出了 $K-\epsilon$ 的二方程模式, 在有标量场扩散时, 则为 $K-\epsilon-g$ 模式。

其他类似的模式理论还有很多, 所有这些模式理论适用范围都很不清楚, 因此用的时候无所适从, 产生很大的困难, 本文就是从涡量脉动相似性的角度来讨论常见的一方程模式理论和二方程模式理论的适用范围, 给出这些模式理论的适用范围, 以方便某些非湍流模式理论工作者应用时选择, 同时也讨论这些理论的局限性, 并给出了相应的判别准则。

二、雷诺应力的速度梯度形式

从1895年建立雷诺方程以后, 雷诺应力的表达形式一直是湍流理论的中心议题之一, Bousinesq假设, 以及混合长度理论都是围绕着这一个中心议题而工作的, 在粘性流体中应力张量表达为

$$\sigma_{ij} = \mu \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) + \left(-\frac{2}{3}\mu + \kappa \right) \frac{\partial U_a}{\partial x_a} \delta_{ij} - P \delta_{ij} \quad (2.1)$$

式中 σ_{ij} 为应力张量, U_i 为流体速度, P 为压强, μ 为粘性系数, κ 为第二粘性系数. 对于不可压缩流体, 上列方程式简化为

$$\sigma_{ij} = \mu \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) - P \delta_{ij} \quad (2.1)'$$

对于不可压缩流体的湍流运动, 人们很自然地会想到, 把雷诺应力 $-\overline{\rho u_i u_j}$ 表达成

$$-\overline{\rho u_i u_j} = \mu_T \left(\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i} \right) - P_T \delta_{ij} \quad (2.2)$$

式中 μ_T 就是湍流粘性系数, $P_T = \overline{u_j u_j} / 3$, \bar{U}_i 是雷诺平均速度. 或考虑到大涡旋的各向异性, 写成

$$-\overline{\rho u_i u_j} A_{ij\alpha\beta} \frac{\partial \bar{U}_\alpha}{\partial x_\beta} - P_T \delta_{ij} \quad (2.2)'$$

方程(2.2)是绝大多数一方程模式和二方程模式理论的出发点. 我们先不说 μ_T 用那些物理量表达出来. 仅仅表达式(2.2)或(2.2)'就有很大的局限性. 因为分子碰撞时, 驰豫时间为 10^{-11} 秒, 远远小于日常生活中碰到的时间尺度, 所以表现为没有记忆, 而能用局部平均速度梯度来表示粘性应力, 而有(2.1)或(2.1)'. 但是在湍流问题上, 湍流衰减得很慢, 也就是湍流的驰豫时间极长. 在通常考虑的时间范围内, 以前产生的涡旋远没有衰减掉, 因此一般情形雷诺应力不能用当时当地的平均速度梯度表示出来, 而必须考虑到流体质点过去的历史. 所以表达式(2.2)或(2.2)'是要求相当严格才能成立的表达式. 有人认为只要把(2.2)改成各向异性时的表达式(2.2)'就能使雷诺应力表达式到处能用. 这是一种错误理解. 因为(2.2)不能普遍适用的原因, 主要并不是大涡旋的各向异性, 而是由于湍流涡旋衰减时间太长, 必须考虑流体质点过去的历史. 例如平均流速为螺旋式运动的流体质点, 就不能应用(2.2)或(2.2)'. 同样绝大多数一二方程模式理论适用性也很差. 只有流体质点的径迹线比较平直才能适用. 像长直管子或边界层的定常流动, 由于一条径迹线上流体质点的湍流涡旋结构相同或相差不多, 才能把流体质点历史上的平均流速梯度用现在的局部的平均流速梯度代入, 这样问题才能得到简化, (2.2)或(2.2)'才能成立.

三、涡量脉动和相似性

在不可压缩流体的湍流流场中, 湍流脉动速度的方程式为

$$\begin{cases} \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + U_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u_i u_j} + \nu \nabla^2 u_i \\ \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

式中 u_i 为脉动速度, U_i 为雷诺平均速度, p 为脉动压力, $-\overline{\rho u_i u_j}$ 为雷诺应力.

把(3.1)的第一式取旋度, 得到

$$\frac{\partial \omega_{ik}}{\partial t} + U_j \frac{\partial \omega_{ik}}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial \omega_{ik}}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_k} - \frac{\partial U_k}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial U_j}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\partial U_j}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial U_k}{\partial x_j} \\
 & = \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_j} \overline{u_i u_j} - \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \overline{u_k u_j} + \nu \nabla^2 \omega_{ik}
 \end{aligned} \quad (3.2)$$

式中 $\omega_{ik} = \frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i}$

在某一流体质点 P_0 附近, 我们假定湍流涡旋的尺度 l 比较小. 我们取和 P_0 点一起运动的运动坐标系 Y . 这时在 P_0 点附近的雷诺平均速度 U'_i 就可写成

$$U'_i \approx \left(\frac{\partial U_j}{\partial y_\alpha} \right)^0 y_\alpha + \frac{1}{2l} \left(\frac{\partial^2 U_j}{\partial y_\alpha \partial y_\beta} \right)^0 y_\alpha y_\beta \quad (3.3)$$

式中 y_α 为运动坐标系 Y 中的坐标. 在运动坐标系 Y 中, 方程 (3.2) 变成

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{u'_i}{\partial y_k} - \frac{\partial u'_k}{\partial y_i} \right) + U'_j \frac{\partial}{\partial y_j} \left(\frac{\partial u'_i}{\partial y_k} - \frac{\partial u'_k}{\partial y_i} \right) + u'_j \frac{\partial}{\partial y_j} \left(\frac{\partial u'_i}{\partial y_k} - \frac{\partial u'_k}{\partial y_i} \right) \\
 & + u'_j \frac{\partial}{\partial y_j} \left(-\frac{\partial U'_i}{\partial y_k} - \frac{\partial U'_k}{\partial y_i} \right) + \frac{\partial U'_j}{\partial y_k} \frac{\partial u'_i}{\partial y_j} - \frac{\partial U'_j}{\partial y_i} \frac{\partial u'_k}{\partial y_j} \\
 & + \frac{\partial u'_j}{\partial y_k} \frac{\partial u'_i}{\partial y_j} - \frac{\partial u'_j}{\partial y_i} \frac{\partial u'_k}{\partial y_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial y_k} \frac{\partial U'_i}{\partial y_j} - \frac{\partial u'_j}{\partial y_i} \frac{\partial U'_k}{\partial y_j} \\
 & = \frac{\partial^2}{\partial y_k \partial y_j} \overline{u'_i u'_j} - \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j} \overline{u'_k u'_j} + \nu \nabla^2 \left(\frac{\partial u'_i}{\partial y_k} - \frac{\partial u'_k}{\partial y_i} \right)
 \end{aligned} \quad (3.4)$$

式中带“'”号的量, 都是运动坐标系中的相应量. 我们现在引入无量纲变量.

$$\tau = \frac{t}{T}, \quad \xi_i = y_i / l, \quad \phi_i = \frac{u'_i}{q}, \quad q^2 = \overline{u'_i u'_i}$$

式中 T 为 P_0 点湍流涡旋的特征时间, l 为湍流涡旋的特征线尺度, q 为湍流涡旋的特征速度. 这样我们就能够把湍流脉动速度的方程 (3.4) 无量纲化, 于是得到

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{T} \frac{q}{l} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial \xi_k} - \frac{\partial \phi_k}{\partial \xi_i} \right) + \left[\left(\frac{\partial U_j}{\partial y_\alpha} \right)^0 l \xi_\alpha + \frac{1}{2l} \left(\frac{\partial^2 U_j}{\partial y_\alpha \partial y_\beta} \right)^0 l^2 \xi_\alpha \xi_\beta \right] \\
 & \cdot \frac{q}{l^2} \frac{\partial}{\partial \xi_j} \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial \xi_k} - \frac{\partial \phi_k}{\partial \xi_i} \right) + \frac{q^2}{l^2} \phi_j \frac{\partial}{\partial \xi_j} \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial \xi_k} - \frac{\partial \phi_k}{\partial \xi_i} \right) \\
 & + q \phi_j \left[\left(\frac{\partial^2 U_i}{\partial y_j \partial y_k} \right)^0 - \left(\frac{\partial^2 U_k}{\partial y_j \partial y_i} \right)^0 \right] + \frac{q}{l} \left[\left(\frac{\partial U_j}{\partial y_k} \right)^0 \right. \\
 & \left. + l \xi_\alpha \left(\frac{\partial^2 U_j}{\partial y_k \partial y_\alpha} \right)^0 \right] \frac{\partial \phi_i}{\partial \xi_j} - \frac{q}{l} \left[\left(\frac{\partial U_j}{\partial y_i} \right)^0 + l \xi_\alpha \left(\frac{\partial^2 U_j}{\partial y_i \partial y_\alpha} \right)^0 \right] \frac{\partial \phi_k}{\partial \xi_j} \\
 & + \frac{q^2}{l^2} \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial \xi_k} \frac{\partial \phi_i}{\partial \xi_j} - \frac{\partial \phi_j}{\partial \xi_i} \frac{\partial \phi_k}{\partial \xi_j} \right) + \frac{q}{l} \left[\left(\frac{\partial U_i}{\partial y_j} \right)^0 + l \xi_\alpha \left(\frac{\partial^2 U_i}{\partial y_j \partial y_\alpha} \right)^0 \right] \frac{\partial \phi_j}{\partial \xi_k} \\
 & - \frac{q}{l} \left[\left(\frac{\partial U_k}{\partial y_j} \right)^0 + l \xi_\alpha \left(\frac{\partial^2 U_k}{\partial y_j \partial y_\alpha} \right)^0 \right] \frac{\partial \phi_j}{\partial \xi_i} \\
 & = \frac{\partial^2}{\partial y_k \partial y_j} \overline{u'_i u'_j} - \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j} \overline{u'_k u'_j} + \frac{\nu q}{l^3} \nabla_{\xi}^2 \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial \xi_k} - \frac{\partial \phi_k}{\partial \xi_i} \right)
 \end{aligned} \quad (3.4)'$$

这样方程 (3.4)' 中各无量纲函数前面的系数有下面几种类型:

$$(1) \quad \frac{q}{Tl}$$

$$(2) \quad \frac{\partial U_j}{\partial x_\alpha} \frac{q}{A} \quad (j=1,2,3; \alpha=1,2,3)$$

$$(3) \quad \frac{\partial^2 U_j}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} q \quad (j=1,2,3; \alpha=1,2,3; \beta=1,2,3)$$

$$(4) \quad q^2/A^2$$

$$(5) \quad \frac{\partial^2 \overline{u_i u_j}}{\partial x_k \partial x_j} - \frac{\partial^2 \overline{u_k u_j}}{\partial x_i \partial x_j} \quad (i=1,2,3; k \neq i)$$

$$(6) \quad \frac{\nu q}{A^3}$$

每一种类型又包含有许多不同的项,它们的量级也不完全一样。在讨论相似性问题时,通常都是讨论近似的相似性。因为真正的完全相似性是并不存在的。在讨论近似相似性的时候,通常要把小项略去,才能达到相似目的。但是在不同区域里,各项的相对大小是有变化的,因此在不同区域里,存在的近似相似性也是各不相同的。例如对平面槽的情形,在湍流能量关系这个问题上,各种能量的相对大小是变化的。在近壁的湍流能量强产生区域里,雷诺应力在平均流动上作功项(即湍流能量的产生项)和湍流能量耗散项是主要项,湍流能量扩散项是小项,这时的近似相似性就是卡门的相似性。在槽子的中心部分,湍流能量产生项是小项,湍流能量扩散项和耗散项是主要项。这时的近似相似性就是风洞网格湍流实验中的相似性。对尾流或射流等也有类似情形,在接近边界的湍流强产生区域,湍流能量的扩散项是小项,湍流能量的产生项和耗散项是主要项。在中心区域,则湍流能量产生项是小项,而湍流能量扩散项和耗散项是主要项。

我们现在来具体讨论这些区域里的近似相似性。首先要提醒一下,相似性意味着只和局部量有关,也就是隐含着与历史无关,所以和(2.2)或(2.2)'是一致的。对于平均流速接近平直前进的流动,我们假定平均流速的主要方向为 x ,也就是 U_x 要比 U_y 或 U_z 大很多。假定速度 U_x 变化的主要方向在 x 轴的垂直方向,也就是在 yz 平面里,或者简单地就在 y 方向或 z 方向。在这样的假定下,对平面问题来说, $\partial U_i/\partial x_j$ 中最大项为 $\partial U_x/\partial y$, $\partial^2 U_i/\partial x_j \partial x_k$ 中最大项为 $\partial^2 U_x/\partial y^2$ 。我们现在讨论两个例子

(1) 二维槽的情形

对近壁面湍流强产生区域,我们把涡量粘性耗散项 $\nu q/A^3$ 略去,这时近似相似性所要求的条件为

$$\frac{q}{TA} \left/ \frac{dU}{dy} \right. \frac{q}{A} = C_1, \quad \frac{q}{A} \left/ \frac{dU}{dy} \right. \left/ \frac{d^2U}{dy^2} \right. = C_2, \quad \frac{q}{A} \left/ \frac{dU}{dy} \right. \left/ \frac{q^2}{A^2} \right. = C_3$$

化简得到

$$\left\{ \begin{array}{l} T = \frac{1}{C_1} \frac{dU}{dy} \\ A = \frac{dU}{dy} \left/ C_2 \frac{d^2U}{dy^2} \right. \\ q = \frac{1}{C_2 C_3} \frac{(dU/dy)^2}{d^2U/dy^2} = \frac{1}{C_3} A \frac{dU}{dy} \end{array} \right. \quad (3.5)$$

这个就是卡门相似理论的结果,也包含有混合长度理论在内。在二维槽的中心部分,我们略去 qd^2U/dy^2 项,再求近似相似性,则有

$$\frac{q}{TA} \left/ \frac{dU}{dy} \right/ \frac{q}{A} = C_4, \quad \frac{q}{A} \left/ \frac{dU}{dy} \right/ \frac{q^2}{A^2} = C_5, \quad \frac{q}{A} \left/ \frac{dU}{dy} \right/ \nu \frac{q}{A^3} = C_6$$

化简以后, 得到

$$\left. \begin{aligned} T &= \frac{1}{C_4 \frac{dU}{dy}} \\ A &= \left(\frac{C_6 \nu}{\frac{dU}{dy}} \right)^{\frac{1}{2}} \\ q &= \frac{1}{C_5} A \frac{dU}{dy} = \frac{C_6^{\frac{1}{2}}}{C_5} \left(\nu \frac{dU}{dy} \right)^{\frac{1}{2}} \\ q^2 &= \frac{C_6}{C_5^2} \nu \frac{dU}{dy} \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

最后一个式子也可以写成

$$\tau = -\overline{\rho u_x u_y} = C_6 \rho \nu \frac{dU}{dy} \quad (3.7)$$

这就是 Boussinesq 最初的假定公式。(3.5), (3.6)和(3.7)中所有的 $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$ 和 C 都是常数。我们再看 R_A , 得到

$$R_A = \frac{qA}{\nu} = \frac{1}{C_5} \frac{A^2 \frac{dU}{dy}}{\nu} = \frac{C_6}{C_5} \quad (3.8)$$

从雷诺应力公式(3.7), 我们可以得到二维槽中心部分为抛物线形流速分布。

在 $dU/dy=0$ 点附近, 我们就把 $(q/A)(dU/dy)$ 项略去, 这时近似相似性要求的条件为

$$\frac{q}{TA} \left/ q \frac{d^2U}{dy^2} \right/ = C_7, \quad \frac{q^2}{A^2} \left/ q \frac{d^2U}{dy^2} \right/ = C_8, \quad \frac{\nu q}{A^3} \left/ \frac{q^2}{A^2} \right/ = C_9$$

化简得到

$$\left. \begin{aligned} A &= \left(\frac{1}{C_8 C_9} \right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{\nu}{d^2U} \right)^{\frac{1}{3}} \\ T &= \frac{1}{C_7} (C_8 C_9)^{\frac{1}{3}} \nu^{\frac{1}{3}} \left(\frac{d^2U}{dy^2} \right)^{\frac{2}{3}} \\ q &= \left(\frac{C_8}{C_7^2} \right)^{\frac{1}{3}} \nu^{\frac{2}{3}} \left(\frac{d^2U}{dy^2} \right)^{\frac{1}{3}} \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

而有

$$R_A = \frac{qA}{\nu} = \frac{1}{C_9} \quad (3.10)$$

式中 C_7, C_8, C_9 都是常数。

在 dU/dy 和 d^2U/dy^2 都很小的区域, 那么就接近均匀各向同性湍流的情形。这时就把 $(q/A)(dU/dy)$ 和 $q d^2U/dy^2$ 项都略去。这时近似相似性要求为

$$\frac{q}{TA} \left/ \frac{q^2}{A^2} \right/ = C_{10}, \quad \frac{q^2}{A^2} \left/ \frac{\nu q}{A^3} \right/ = C_{11}$$

式中 C_{10} 和 C_{11} 是常数。化简以后得到

$$T = \frac{1}{C_{10}} \frac{A}{q}, R_A = \frac{qA}{\nu} = C_{11} \quad (3.11)$$

如果二维槽特别宽，扩散到槽中心的湍流涡旋已经十分微弱。这时湍流涡旋处在运动后期，脉动速度的非线性项可以略去，这时的相似性要求为

$$\frac{q}{TA} / \nu \frac{q}{A^3} = \frac{A^2}{\nu T} = C_{12} \quad (3.11)'$$

(2) 二维湍流尾流的情形

在接近湍流尾流边缘的湍流能量强产生区域内，我们把度量粘性耗散项 $\nu q/A^3$ 略去，这时近似相似性要求的条件为

$$\frac{q}{TA} / \frac{\partial U}{\partial y} \frac{q}{A} = C'_1, \frac{q}{A} \frac{\partial U}{\partial y} / q \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = C'_2, \frac{q}{A} \frac{\partial U}{\partial y} / \frac{q^2}{A^2} = C'_3$$

化简得到

$$\left. \begin{aligned} T &= \frac{1}{C'_1} \frac{\partial U}{\partial y} \\ A &= \frac{\partial U}{\partial y} / C'_2 \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \\ q &= \frac{1}{C'_3} A \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{1}{C'_2 C'_3} \frac{(\partial U / \partial y)^2}{\partial^2 U / \partial y^2} \end{aligned} \right\} \quad (3.5)'$$

在湍尾流的中心部分，我们略去 $q \partial^2 U / \partial y^2$ 项，这时近似相似性要求

$$\frac{q}{TA} / \frac{\partial U}{\partial y} \frac{q}{A} = C'_4, \frac{q}{A} \frac{\partial U}{\partial y} / \frac{q^2}{A^2} = C'_5, \frac{q}{A} \frac{\partial U}{\partial y} / \nu \frac{q}{A^3} = C'_6$$

化简以后就得到

$$\left. \begin{aligned} T &= \frac{1}{C'_4} \frac{\partial U}{\partial y} \\ A &= \left(\frac{C'_6 \nu}{\partial U / \partial y} \right)^{\frac{1}{2}} \\ q &= \frac{1}{C'_5} A \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{(C'_6)^{\frac{1}{2}}}{C'_5} \left(\nu \frac{\partial U}{\partial y} \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \right\} \quad (3.6)'$$

由于相似性的关系，我们有雷诺剪切应力的表达式为

$$\tau = -\overline{\rho u_x u_y} = C \rho \nu \frac{\partial U}{\partial y} \quad (3.7)'$$

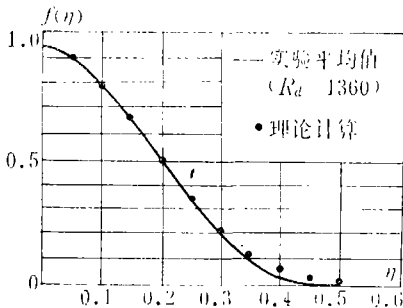


图1 平均速度亏损分布

利用这个结果讨论湍流尾流的平均流速分布和脉动速度平方可以参看周培源教授的文章。和实验结果比较的情形，见图1和图2。

其他相似性的情况也类似二维槽情形，不过是把原来的平均速度 U 的全微分改成偏微分而已。二维尾流和二维槽唯一不同之点在于同一类的速度有好多项，在讨论问题时仅仅把最大项留下而已。在不带有速度梯度的问题里，相似性条件是完全一样的。

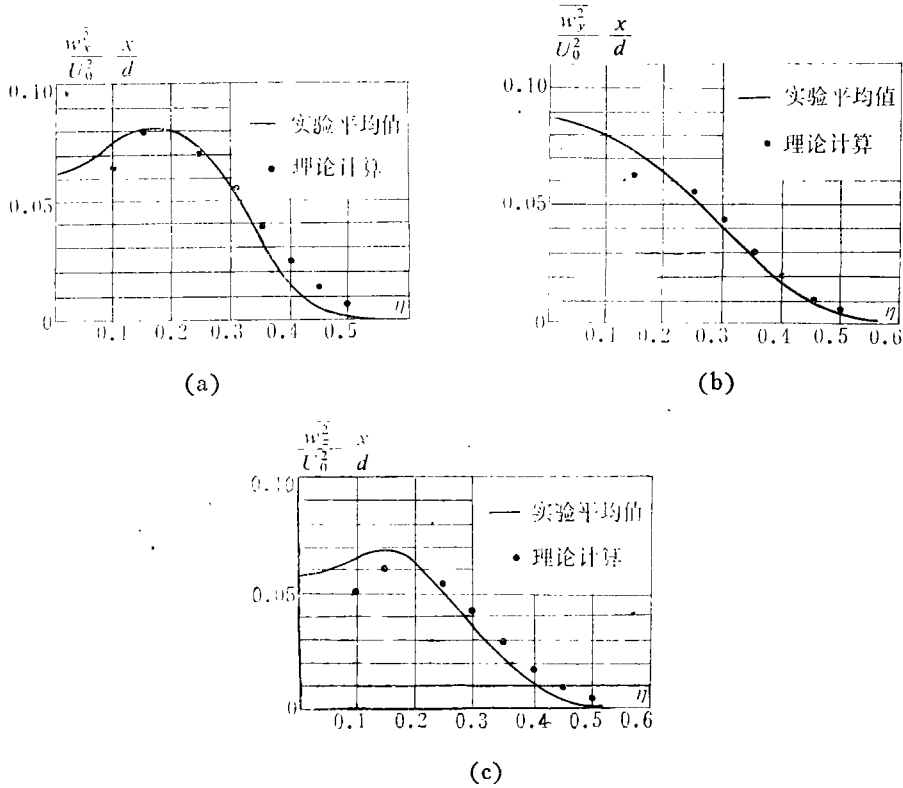


图2 速度脉动平方平均值的分布

四、一方程模式和相似性

我们这里只讨论几种常见的一方程模式。

(a) Bradshaw, Ferriss和 Atwell 模式

在1967年 Bradshaw 等人给出了湍流边界层中剪切应力的方程式

$$\frac{D}{Dt} \sigma_{21} = a \sigma_{21} \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial x_2} - a \frac{\partial}{\partial x_2} \left[g \left(\frac{x_2}{\delta} \right) \left(\frac{\sigma_{21}^3}{\rho} \right)^{\frac{1}{2}} \right] - \frac{1}{A} \left(\frac{\sigma_{21}^3}{a \rho} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.1)$$

等式左端就是周培源教授(17)方程的一个原形,等式右端则是经过简化以后的形式。式中 $A = \delta f(x_2/\delta)$, δ 为边界层厚度, $f(x_2/\delta)$ 和 $g(x_2/\delta)$ 都由实验定出, a 为常数。这个模式不属于表达式(2.2)的范围之内,因为等式左边 σ_{21} 前的符号 (D/Dt) 。一般说来,一个新的理论总是要包含旧理论内容的成功部分,(4.1)式也并不例外。如果在(4.1)式中保留右端的第一项和第三项,而把其余两项全部略去,则我们就得到混合长度理论,而有

$$\sigma_{21} = a^3 \rho A^2 \left(\frac{\partial \bar{U}_1}{\partial x_2} \right)^2 \quad (4.1)'$$

由于湍流的弛豫时间很长,所以流体团在运流和扩散过程中,它的过去的历史所产生的影响并没有完全消失掉。(4.1)式的左端项就是考虑 σ_{21} 局部增加和运流的影响,右端的第二项就是考虑扩散的影响。这里很多函数和量都是从实验定出,因此这个理论属于半经验理论范围。因为 f 和 g 及常数 a 都是从湍流边界层实验定出,因此只能直接用于湍流边界层。除非根据另外的实验数据,另定出函数 f 和 g 及常数 a 才能用于其他地方。(4.1)' 只相应于相似性

(3.5).

(b) Nee 和 Kovasznyai 模式

另一个一方程模式是 Nee 和 Kovasznyai 1968 年给出的。这个模式属于表达式(2.2)范围之内。它直接写出 ϵ_m (即 ν_T) 所满足的方程式。 $\epsilon_m = \nu_T = \mu_T / \rho$ 就是湍流的表现运动粘性系数。 ϵ_m 的定义为

$$-\overline{u_1 u_2} \equiv \epsilon_m \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial x_2} \quad (2.2)'$$

Nee 等给出的 ϵ_m 的微分方程为

$$\frac{D\epsilon_m}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\epsilon_m \frac{\partial \epsilon_m}{\partial x_2} \right) + A \epsilon_m \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial x_2} - B \frac{\epsilon_m^2}{A^2} - C \frac{\epsilon_m^2}{U_0^2} \frac{dU_0}{dx_1} \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial x_2} \quad (4.2)$$

这个模式也是对湍流边界层适用的。式中 U_0 为湍流边界层外势流的速度, A 为一长度, A , B 和 C 都是常数。(4.2) 式如果只取等式右端的第二项和第三项, 也就得到通常的混合长度的表达式

$$\epsilon_m = \frac{A}{B} A^2 \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial x_2} \quad (4.2)'$$

(4.2)' 也仅仅相应于相似性(3.5)。(4.2) 式左端是 ϵ_m 的局部增加项和运流修正项。(4.2) 式右端第一项为 ϵ_m 的扩散修正项, 第四项为边界层外部压力对 ϵ_m 的影响项。

所以(4.1)和(4.2)都只适用于于边界层的湍流能量强产生区(即对数流速区), 仅仅是加以适当修正而已。这个区域的相似性相应于(3.5)式给定的范围。对湍流的近壁区和离边界较远接近均匀各向同性湍流的区域是不能应用的。

五、二方程模式

二方程模式基本上都是用两个物理量通过量纲分析的办法组成物理量 ϵ_m 。这两个物理量又各自满足自己的微分方程式。所以二方程模式基本上都是应用表达式(2.2)或(2.2)'的, 因此受到(2.2)或(2.2)'适用范围的限制, 也就是说只能对流体质点平均速度径迹线比较平直才能应用。现在我们来讨论一下最常用的两种二方程模式。

(a) Saffman 模式

1970年 Saffman 把湍流运动粘性系数 ϵ_m 写成

$$\epsilon_m = \text{const } \overline{q^2} / \sqrt{\overline{\omega^2}} \quad (5.1)$$

式中 $\overline{q^2}$ 就是湍流脉动速度平方的平均值, $\overline{\omega^2}$ 就是湍流脉动涡量平方的平均值。 $\overline{q^2}$ 所满足的准确方程式为

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \overline{q^2} + \bar{U}_j \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{q^2} + \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{q^2 u_j} + 2 \overline{u_j u_k} \frac{\partial \bar{U}_k}{\partial x_j} \\ = - \frac{2}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_k} \overline{u_k} - 2\nu \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \nu \nabla^2 \overline{q^2} \end{aligned} \quad (5.2)$$

$\overline{\omega^2}$ 所满足的准确方程式为

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{\omega^2}}{\partial t} + \bar{U}_j \frac{\partial \overline{\omega^2}}{\partial x_j} + 2 \overline{\omega_j \alpha_j} + 2 \overline{\omega_j \beta_j} + 2 \overline{\omega_j \gamma_j} + \overline{\omega_j u_k} \frac{\partial \Omega_j}{\partial x_k} \\ = \nu \nabla^2 \overline{\omega^2} - 2\nu \frac{\partial \omega_k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega_k}{\partial x_j} \end{aligned} \quad (5.3)$$

式中

$$\omega_k = \varepsilon_{kij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \quad \Omega_k = \varepsilon_{kij} \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j}, \quad \bar{q}^2 = \overline{u_k u_k}, \quad q \equiv \sqrt{\bar{q}^2}$$

$$\alpha_k = \varepsilon_{kij} u_i, {}_a \bar{U}_{a,j}, \quad \beta_k = \varepsilon_{kij} \bar{U}_i, {}_a u_{a,j}, \quad \gamma_k = \varepsilon_{kij} (u_i u_a), {}_j a$$

(5.2)和(5.3)有各种不同的简化方案,我们在这里仅仅举出一种作为例子。例如(5.2)式可以简化成

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{\bar{q}^2}{2} \right) = \epsilon_m \left(\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_2} \right)^2 - \frac{\partial}{\partial x_2} \left[A_1 \epsilon_m \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\bar{q}^2}{2} \right) \right] - C \frac{1}{A} \left(\frac{\bar{q}^2}{2} \right)^{\frac{3}{2}} \quad (5.2)'$$

式中左边为湍流能量局部增加项和运流项。右边第一项为湍流能量产生项,第二项为湍流能量扩散项,第三项为耗散项。 A 为某一长度,实际上 A 在湍流能量产生区域,它就变成混合长度。 A_1 和 C 都是常数。

(5.3)式的一个简化方案为

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{\omega}^2 + \bar{U}_j \bar{\omega}^2, {}_j = \alpha \bar{\omega}^2 [(\bar{U}_i, {}_j)^2]^{\frac{1}{2}} - \beta (\bar{\omega}^2)^{\frac{3}{2}} + (\sigma \epsilon_m \bar{\omega}^2, {}_j), {}_j \quad (5.3)'$$

等式左边第一项为脉动涡量平方的局部增加项,第二项为运流项。等式右端第一项为生成项,第三项为扩散项。右边第二项的主要部分实际上由两项组成,相应于均匀各向同性湍流中的 $-(7/3)(\bar{u}^2)^{\frac{3}{2}} k_{\%}^{\%}$ 和 $-(14/3)\bar{u}^2 f_{\%}^{\%}$ 。因为 $k_{\%}^{\%}$ 是负的, $f_{\%}^{\%}$ 是正的,所以两项中前一项为正后一项为负。因此用一项 $-\beta(\bar{\omega}^2)^{\frac{3}{2}}$ 来代替这两项之和,效果不可能太好。式(5.3)'中的 α , β 和 σ 都是常数。

我们现在来讨论Saffman模式和相似性的关系及它的应用范围。

(1)在壁面附近湍流能量强产生区域内,流体团的脉动涡量和平均流动的涡量成正比,流体团移动的距离也就是混合长度。这样

$$\sqrt{\bar{q}^2} \sim l \frac{d\bar{U}}{dy}, \quad \sqrt{\bar{\omega}^2} \sim \frac{d\bar{U}}{dy}, \quad \epsilon_m \sim \frac{l^2 \left(\frac{d\bar{U}}{dy} \right)^2}{\frac{d\bar{U}}{dy}} \sim l^2 \frac{d\bar{U}}{dy}$$

这就是混合长度理论的结果。这个结果相应于(5.2)'式中略去左边项和右端中间的扩散项。也相应于(5.3)'中略去左端的两项和右端最后的扩散项。所以Saffman模式包含有混合长度理论的内容。至于我们在(5.2)'和(5.3)'中略去的那几项,正好就是由于湍流弛豫时间(衰减时间)长而补进去的运流项和不均匀性引起的扩散项。在这个区域里,相应的相似性就是(3.5)式表达的相似性。

(2)在近似均匀各向同性区域内(如管流和槽流的中心部分),在定常运动时 u^2 和 λ^2 都接近于常数。这样

$$\bar{q}^2 \sim \bar{u}^2, \quad \bar{\omega}^2 \sim \frac{\bar{u}^2}{\lambda^2}, \quad \epsilon_m \sim \frac{q^2}{\omega^2} \sim \sqrt{\bar{u}^2} \lambda \sim \text{const}$$

这个结果也是大家所知道的。在这个区域里,相应的相似性就是(3.11)式表达的相似性。

所以Saffman模式从其本质来说是一个内插公式,它把两种特殊情形内插地联系起来。从相似性的角度看来,则是从(3.5)式表达的相似性,逐步过渡到(3.6)式表达的相似性,再过渡到(3.9)式表达的相似性,最后过渡到(3.11)或(3.11)'式表达的相似性。由于(5.3)'中用一项 $\beta(\bar{\omega}^2)^{\frac{3}{2}}$ 代替了两项,所以用起来要差一些。

至于它的适用范围，它一方面受到(2.2)或(2.2)'式适用范围的限制，同时也受到这几特殊条件下的相似性的适用范围的限制。至于应用时候的好坏，还决定于参数的选取和联接的好坏。

(b) Jones Launder 模式或称 $K-\varepsilon$ 模式

1972年 Jones 和 Launder 给出了另一种二方程模式。他们用的两个物理量，一个是湍流的动能 $K = q^2/2$ ，另一个是湍流的能量耗散 ε 。 ε 的表达式为

$$\varepsilon = \nu \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}}$$

因此这种模式又称为 $K-\varepsilon$ 模式。他们用量纲分析的方法得到湍流运动粘性系数的表达式为

$$\epsilon_m = \text{const}(q^2)^2/\varepsilon \quad (5.4)$$

ε 的值在均匀各向同性湍流条件下就化为 $15\nu(u^2/\lambda^2)$ ，所以它的值接近于与 $\nu\omega^2$ 成比例。 ε 所满足的准确方程式为

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \bar{U}_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = & - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\overline{u_j \varepsilon} + \frac{2\nu}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right) \\ & + 2\nu \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} - 2\nu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_k} - \overline{2u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_k}} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\nu \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_k} \right) \\ & - 2\nu \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} - 2\nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_k}} \right) \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) \end{aligned} \quad (5.5)$$

式中

$$\bar{\varepsilon} = \nu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

(5.5)式也有各种不同的简化形式。我们在这里只写一个最简单的简化形式。就是

$$\frac{D\varepsilon}{Dt} = - \frac{\partial}{\partial x_k} \overline{\varepsilon u_k} - 2\nu \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} - 2\nu^2 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_j} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_j} \quad (5.5)'$$

式中几项的物理意义都很清楚。左边项是 ε 的局部变化和运流项。右边第一项就是 ε 的扩散项，第二项就是相应于 $\nu k^2 (\overline{q^2})^{\frac{3}{2}}$ 的项，第三项为相应于 $\nu^2 (\overline{q^2}/\lambda^4)$ 的项。其中缺乏和平均流动相互作用的项。所以方程(5.5)'简化得比(5.3)'要好一些，这样用起来得到的结果也会比用(5.3)'得到的好一些。

我们现在来讨论 Jones Launder 模式和相似性的关系及它的应用范围。

(1) 在壁面附近湍流能量强产生区域内，(5.2)式中 $2\overline{u_j u_k} \frac{\partial \bar{U}_k}{\partial x_j}$ 和 $-2\nu \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \frac{\partial u_k}{\partial x_j}$ 两项是大项，其他项都是小项。因此我们有

$$\varepsilon \equiv \nu \overline{\frac{\partial u_k}{\partial x_j} \frac{\partial u_k}{\partial x_j}} \sim -\overline{u_j u_k} \frac{\partial \bar{U}_k}{\partial x_j}$$

又因为在这个区域内

$$\overline{q^2} \sim l^2 \left(\frac{dU}{dy} \right)^2$$

而

$$-\overline{u_j u_k} \frac{\partial \bar{U}_k}{\partial x_j} \sim l^2 \left(\frac{dU}{dy} \right)^3$$

所以湍流运动粘性系数

$$\epsilon_m \sim \frac{(\overline{q^2})^2}{\varepsilon} \sim l^2 \frac{dU}{dy}$$

这结果就是混合长度理论的结果。在这个区域里相应的相似性为(3.5)式所表达的相似性。

(2) 在近似均匀各向同性的区域内

$$\epsilon \sim \nu \frac{q^2}{\lambda^2}$$

因此

$$\epsilon_m \sim \frac{(q^2)^2}{e} \sim \frac{q^2 \lambda^2}{\nu} \sim \frac{\sqrt{q^2} \lambda}{\nu} \sqrt{q^2} \lambda \sim R_\lambda \sqrt{q^2} \lambda$$

在定常流动时, R_λ 和 $\sqrt{q^2} \lambda$ 都不随时间改变。这时相应的相似性为(3.11), 所以

$$\epsilon_m \sim \text{const}$$

因此 Jones Launder (或 $K-\epsilon$) 模式实际上也是一个内插公式。把壁面附近的湍流强产生区和近似均匀各向同性的湍流区用微分方程来内插地联系起来。从相似性的角度看, 就是由(3.5)式表达的相似性过渡到(3.6)式表达的相似性, 再过渡到(3.9)式表达的相似性, 最后过渡到(3.11)或(3.11)'表示的相似性。虽然 Jones Launder 模式比 Saffman 模式在近似均匀各向同性湍流区域内多出一个因子 R_λ , 但因为在这种区域里 R_λ 接近常数(从(3.11)的相似性可以得到 R_λ 为常数), 而 ϵ_m 的表达式前面又容许一个常数因子, 所以在通常情形下, 本质上没有太大差别。当然如果河道等特别宽, 湍流涡旋扩散过来已到衰变后期, 这时 R_λ 不再是常数, 两者就会显出较大的区别。Jones Launder 模式和 Saffman 模式还有一个差别, 就是(5.3)'不太准确, 而(5.5)'要比较准确一点。

至于 Jones Launder 模式的适用范围, 基本上也和 Saffman 模式差不多。它一方面受到(2.2)或(2.2)'适用范围的限制, 同时也受到这几种特殊条件下的相似性的适用范围的限制。至于应用时的好坏, 还决定于参数的选取和联接的好坏。但是在相似性(3.11)'相应的范围内, 用 Jones Launder 模式得到的 ϵ_m , 由于因子 R_λ 的存在, 可能会比实际情况减小的要快。例如有人算过的有对流的燃烧室, 实验和计算不符, 可能就是这个原因。

六、结论和讨论

(1) 雷诺应力的梯度形式的表达式(2.2)或(2.2)'适用范围是相当狭窄的。原因是湍流的衰减时间太长, 历史的影响一般不能不考虑。而绝大多数一二方程模式理论是应用梯度表达式(2.2)或(2.2)'的, 所以绝大多数一二方程模式理论的应用范围也是相当狭窄的。

(2) 相似理论要求局部物理量之间满足一定关系式, 所以实际上隐含着和湍流历史过程的无关性。因此相似理论的应用范围也是相当狭窄的。

(3) 湍流的一方程模式理论的应用范围实际上和混合长度零方程模式的应用范围是一样的, 但加上了适当的修正。

(4) 湍流的二方程模式理论实际上是混合长度理论和均匀各向同性湍流理论的内插公式。不同阶段相应于不同的相似性。

考虑湍流的历史影响, 应该应用湍流的应力模式, 但是怎样进行简化, 都是一个严重而又急待解决的问题。

参 考 文 献

- [1] Chou, P. Y. (周培源), On velocity correlations and the solutions of the equations of turbulent fluctuation, *Quart. Appl. Math.*, **3**, 1, April (1945), 38—54.
- [2] 周培源, 涡量脉动的相似性结构与湍流理论, *力学学报*, **3**, 4 (1959), 281—297. *中国科学*, **8** (1959), 1095—1119.
- [3] 蔡树棠、麻柏坤, 涡量脉动相似结构和圆形涡旋流速分布, *力学学报*, **13**, 2 (1981), 187—189.
- [4] 蔡树棠, 不可压缩流体一般湍流理论在可压缩流体运动时的推广, 《理论物理与力学论文集》, 科学出版社 (1982), 161—185.
- [5] Launder, B. E. and D. B. Spalding, *Mathematical Models of Turbulence*, Academic Press, London and New York (1975).
- [6] Hinze, J. O., *Turbulence*, Second Edition (1975).
- [7] Bradshaw, P., *Turbulence*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York (1976).
- [8] Walter, Fost and Trever H. Moulden, *Handbook of Turbulence*, Vol. I, Plenum Press, New York and London (1977).
- [9] 谷一郎, 《乱流》 (1979).

Similar Theory and the Applicable Ranges of One-Equation and Two-Equation Models

Tsai Shu-tang

(Dept. of Modern Mech., University of Science and Technology of China,
Hefei; Shanghai Institute of Application Math. and Mech., Shanghai)

Ma Bai-kun

(Dept. of Modern Mech., University of Science and Technology of China, Hefei)

Abstract

Here, we are discussing the applicable ranges of one-equation and two-equation turbulence models with the view point of similar theory. The criterions of determining the applicable ranges of these models are given.