

屈曲杆大挠度弹性曲线的摄动解及其 不完全分岔问题的奇异摄动解法*

周 哲 玮

(上海市应用数学和力学研究所, 1985年10月18日收到)

摘 要

本文用摄动法求解了屈曲杆大挠度情况下的弹性曲线, 并考虑支座处的缺陷对分岔(失稳)问题的影响, 用奇异摄动的不完全分岔理论进行了计算, 给出了分岔图解, 并对其物理意义进行了讨论.

一、引 言

压杆的失稳和临界荷载是一古老的经典问题. 用线性理论讨论压杆稳定问题所得出的 Euler 公式, 给出了一系列临界载荷和相应的屈曲形式. 然而杆端的实际挠度是未定的, 在线性理论范围内可认为它取任意值. 要讨论屈曲杆大挠度情况下的弹性曲线, 必须应用曲率的精确表达式. Euler 用椭圆积分得到了弹性曲线的精确解答^[1].

分岔理论研究非线性方程

$$f[w, \lambda] = 0 \quad (1.1)$$

解的分支问题. 在压杆稳定问题中, λ 即为载荷参数, w 为顶端挠度. 方程(1.1)的分岔点是由它相应的线性问题

$$f_w[w, \lambda]\phi = 0 \quad (\phi \neq 0) \quad (1.2)$$

来决定的. 分岔问题的一系列分岔点也就是 Euler 临界载荷值, 解的分支即为相应的屈曲形式.

在实验和实际应用中, 很少得出理论所估计那样突然的失稳, 因为实际结构的缺陷总是存在的. 例如, 理论上的固支边界条件在实验中之难以实现是众所周知的. 尽量清除这些缺陷对失稳的影响, 就可得到与理论较为符合的实验结果.

本文用摄动法给出了从分岔点分支出来的解曲线的近似表达式, 并用奇异摄动的不完全分岔理论^[2]讨论了支座处微小转动对分岔的影响, 给出了分岔图解, 并讨论了其物理含义.

二、压杆稳定的分岔问题及其扰动分岔问题

研究图1中的细杆, 其下端固定而顶端自由. 若载荷稍大于临界值, 杆将产生大挠度. 取

* 潘立宙推荐.

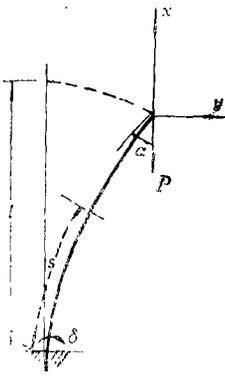


图 1

引入无量纲量

$$z = \frac{s}{l}, \quad \lambda = \frac{Pl^2}{EI} \quad (2.4)$$

问题可表达为

$$d^2\theta/dz^2 + \lambda \sin\theta = 0 \quad (2.5)$$

$$\theta(0) = 0, \quad d\theta/dz(1) = 0 \quad (2.6)$$

我们称之为屈曲杆的分岔问题。

如果杆下端固定处有一微小转角 δ ，其方向如图1所示，则问题成为

$$d^2\theta/dz^2 + \lambda \sin\theta = 0 \quad (2.7)$$

$$\theta(0) = \delta, \quad d\theta/dz(1) = 0 \quad (2.8)$$

我们称之为屈曲杆的扰动分岔问题。

方程的非线性项 $\sin\theta$ 具有展开式

$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{6} + \frac{\theta^5}{120} - \dots \quad (2.9)$$

三、分岔问题的分岔点及解分支的摄动表达式

注意到 $\theta_0 = 0$ 是问题(2.5), (2.6)的解，这条解曲线上的奇异点即为我们所求的分岔点，

也即相应的线性问题(3.1), (3.2)的特征值。

$$\phi'' + \lambda\phi = 0 \quad (3.1)$$

$$\phi(0) = 0, \quad \phi'(1) = 0 \quad (3.2)$$

其中 $\phi = \phi(z)$ 为 z 的函数，“'”表示对 z 的导数。

$$\text{解得} \quad \lambda_n = \frac{\pi^2}{4} (2n+1)^2 \quad (n=0, 1, 2, \dots) \quad (3.3)$$

相应的特征函数为

$$\phi_n = \sqrt{2} \sin \frac{\pi(2n+1)}{2} z \quad (n=0, 1, 2, \dots) \quad (3.4)$$

从实际问题出发，我们研究由最小特征值 λ_0 分岔的解分支。与 λ_0 相应的载荷值即为最小临界载荷。

$$\lambda_0 = \frac{\pi^2}{4} \quad (3.5)$$

定义振幅参数 ε

$$\varepsilon = \int_0^1 \theta \cdot \phi_0 dz \tag{3.6}$$

将解分支的展开式写为

$$\theta = \theta_0 + \theta_1 \varepsilon + \theta_2 \varepsilon^2 + \theta_3 \varepsilon^3 + \dots \tag{3.7}$$

$$\lambda = \lambda_0 + \lambda_1 \varepsilon + \lambda_2 \varepsilon^2 + \dots \tag{3.8}$$

其中 $\theta_0, \theta_1, \theta_2, \dots$ 分别为 z 的待定函数;

$\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots$ 为待定常数.

将(2.9), (3.7), (3.8)式代入(2.5), (2.6), 可得到一系列求解 θ_k, λ_k 的线性问题. ($k=1, 2, \dots$)

$$\varepsilon: \quad \frac{d^2 \theta_1}{dz^2} + \lambda_0 \theta_1 = 0 \tag{3.9}$$

$$\theta_1(0) = 0, \quad \frac{d\theta_1}{dz}(1) = 0 \tag{3.10}$$

$$\varepsilon^2: \quad \frac{d^2 \theta_2}{dz^2} + \lambda_0 \theta_2 = -\lambda_1 \theta_1 \tag{3.11}$$

$$\theta_2(0) = 0, \quad \frac{d\theta_2}{dz}(1) = 0 \tag{3.12}$$

$$\varepsilon^3: \quad \frac{d^2 \theta_3}{dz^2} + \lambda_0 \theta_3 = \frac{1}{6} \lambda_0 \theta_1^3 - \lambda_1 \theta_2 - \lambda_2 \theta_1 \tag{3.13}$$

$$\theta_3(0) = 0, \quad \frac{d\theta_3}{dz}(1) = 0 \tag{3.14}$$

可求得

$$\theta = \sqrt{\frac{2}{3}} \sin \frac{\pi z}{2} \varepsilon + \frac{\sqrt{2}}{96} \sin \frac{3\pi z}{2} \varepsilon^3 + \dots \tag{3.15}$$

$$\lambda = \lambda_0 + \frac{\lambda_0}{4} \varepsilon^2 + \dots \tag{3.16}$$

$$\therefore P = \frac{\pi^2 EI}{4l^2} \left(1 + \frac{\varepsilon^2}{4} + \dots \right) \tag{3.17}$$

与精确解^[1]的比较可见表1, 其中 $\alpha = \theta(1)$ 为压杆顶端的倾角.

表1

$\alpha(^{\circ})$		0°	20°	40°	60°	80°	100°	120°	140°	160°	176°
$\frac{P}{P_{cr}}$	[1]	1	1.015	1.063	1.152	1.293	1.518	1.884	2.541	4.029	9.116
	本文	1	1.015	1.061	1.138	1.248	1.394	1.576	1.799	2.068	2.321

由表1可知, 当杆端几乎已弯到水平位置时, 本文对屈曲杆大挠度弹性曲线的摄动解与精确解的误差仍小于4%. 这说明在工程应用中使用摄动近似表达式是完全合理的.

四、扰动分岔问题的奇异摄动解法

在支座处产生微小转角 δ 时, 扰动问题(2.7), (2.8)的分岔性质将发生变化. 如文[2]所建

议的, 我们可用内外场匹配渐近展开法来求得扰动问题的渐近解. 由于此时扰动在边界上产生, 我们在摄动展开的过程中来处理扰动端点条件, 从而得到了与一般情形下形式大致相同的摄动方程.

在分岔点 λ_0 附近和远离 λ_0 的区域分别称为内场和外场, 在不同的区域内将采用不同的渐近展开式. 与一般在位置空间划分区域的作法不同, 此时的区域划分是在参数空间进行的.

4.1 外场解

在远离分岔点 λ_0 处的渐近展开式称为外场解. 以支座处微小转角 δ (图1)为小参数, 我们作如下的渐近展开.

$$\text{设} \quad \theta = \theta_0 + \theta_1 \delta + \theta_2 \delta^2 + \theta_3 \delta^3 + \dots \quad (4.1)$$

其中 $\theta_i, i=0, 1, 2, \dots$ 是 z 的待定函数.

代入(2.7), (2.8), 可得关于 θ_k ($k=1, 2, \dots$)的一系列线性问题. 我们首先考虑对解分支 $\theta_0=0$ 的扰动

$$\delta: \quad \frac{d^2 \theta_1}{dz^2} + \lambda \theta_1 = 0 \quad (4.2)$$

$$\theta_1(0) = 1, \quad \frac{d\theta_1}{dz}(1) = 0 \quad (4.3)$$

$$\delta^2: \quad \frac{d^2 \theta_2}{dz^2} + \lambda \theta_2 = 0 \quad (4.4)$$

$$\theta_2(0) = 0, \quad \frac{d\theta_2}{dz}(1) = 0 \quad (4.5)$$

$$\delta^3: \quad \frac{d^2 \theta_3}{dz^2} + \lambda \theta_3 = \frac{1}{6} \lambda \theta_1^3 \quad (4.6)$$

$$\theta_3(0) = 0, \quad \frac{d\theta_3}{dz}(1) = 0 \quad (4.7)$$

可将问题(4.2), (4.3)化为具齐次边界条件的非齐次方程

$$\text{设} \quad \theta_1 = \bar{\theta} + \theta^* \quad (4.8)$$

$$\theta^* = \cos \sqrt{\lambda^*} z \quad (4.9)$$

$$\lambda^* = n^2 \pi^2 \quad (4.10)$$

$$\therefore \quad \theta^*(0) = 1, \quad \frac{d\theta^*}{dz}(1) = 0 \quad (4.11)$$

问题化为以下形式

$$\frac{d^2 \bar{\theta}}{dz^2} + \lambda \bar{\theta} = (\lambda^* - \lambda) \cos \sqrt{\lambda^*} z \quad (4.12)$$

$$\bar{\theta}(0) = 0, \quad \frac{d\bar{\theta}}{dz}(1) = 0 \quad (4.13)$$

我们用线性算子 $\mathcal{L} = d^2/dz^2 + \lambda$ 的特征函数 v_m 展开的办法来求解(4.12), (4.13)

也即寻找满足

$$v_m'' + \lambda v_m - \sigma_m v_m = 0 \quad (4.14)$$

$$v_m(0) = 0, \quad v_m'(1) = 0 \quad (4.15)$$

的特征函数序列 v_m . 其中“'”为对 z 求导.

$$\text{可求得} \quad v_m = \phi_m = \sqrt{2} \sin \frac{\pi(2m+1)}{2} z \quad (4.16)$$

$$\sigma_m = \lambda - \frac{\pi^2}{4} (2m+1)^2 \quad (m=0, 1, 2, \dots) \quad (4.17)$$

(4.12), (4.13)的解可表达为

$$\bar{\theta} = \sum_{m=0}^{\infty} \left[\frac{\int_0^1 \left\{ (\lambda^* - \lambda) \cos \sqrt{\lambda^*} z \cdot \sqrt{2} \sin \frac{\pi(2m+1)}{2} z \right\} dz}{\sigma_m} \sqrt{2} \sin \frac{\pi(2m+1)}{2} z \right] \quad (4.18)$$

最后可得

$$\theta = \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{4(2m+1)(n^2\pi^2 - \lambda) \sin \frac{\pi(2m+1)}{2} z}{\pi[(2m+1)^2 - 4n^2] \left[\lambda - \frac{\pi^2}{4} (2m+1)^2 \right]} \cos n\pi z \right\} \delta + O(\delta^2) \quad (4.19)$$

可见, 当 $\lambda \rightarrow \lambda_0 = \pi^2/4$, 对于 $\theta_0 = 0$ 的扰动解分支在分岔点 λ_0 无界.

当 θ_0 为解分支(3.15), (3.16), 也即 $\theta_0 \neq 0$ 时, 所得到关于 θ_k ($k=1, 2, \dots$) 的一系列线性问题为

$$\delta^0: \quad \frac{d^2\theta_1}{dz^2} + \lambda \left(1 - \frac{1}{2} \theta_0^2\right) \theta_1 = 0 \quad (4.20)$$

$$\theta_1(0) = 1, \quad \frac{d\theta_1}{dz}(1) = 0 \quad (4.21)$$

$$\delta^2: \quad \frac{d^2\theta_2}{dz^2} + \lambda \left(1 - \frac{1}{2} \theta_0^2\right) \theta_2 = \frac{\lambda}{2} \theta_0 \theta_1^2 \quad (4.22)$$

$$\theta_2(0) = 0, \quad \frac{d\theta_2}{dz}(1) = 0 \quad (4.23)$$

$$\delta^3: \quad \frac{d^2\theta_3}{dz^2} + \lambda \left(1 - \frac{1}{2} \theta_0^2\right) \theta_3 = \frac{\lambda}{6} \theta_1^3 + \lambda \theta_0 \theta_1 \theta_2 \quad (4.24)$$

$$\theta_3(0) = 0, \quad \frac{d\theta_3}{dz}(1) = 0 \quad (4.25)$$

这时的线性算子为

$$\mathcal{L}(\varepsilon) = \frac{d^2}{dz^2} + \left(\lambda_0 + \frac{\lambda_0}{4} \varepsilon^2 + \dots\right) \left(1 - \frac{1}{2} \theta_0^2(\varepsilon)\right) \quad (4.26)$$

其特征值问题为

$$v_m'' + \left(\lambda_0 + \frac{\lambda_0}{4} \varepsilon^2 + \dots\right) \left[1 - \frac{1}{2} \theta_0^2(\varepsilon)\right] v_m - \sigma_m v_m = 0 \quad (4.27)$$

$$v_m(0) = 0, \quad v_m'(1) = 0 \quad (4.28)$$

故我们用对 ε 的摄动展开来求解, ε 由(3.6)式定义.

$$\text{设} \quad v_m = v_{m0} + v_{m1}\varepsilon + v_{m2}\varepsilon^2 + \dots \quad (4.29)$$

$$\sigma_m = \sigma_{m0} + \sigma_{m1}\varepsilon + \sigma_{m2}\varepsilon^2 + \dots \quad (4.30)$$

代入(4.27), (4.28), 可得一系列求解 v_{mi}, σ_{mi} ($i=1, 2, \dots$) 的线性问题.

$$\varepsilon^0: \quad v_{m0}'' + \lambda_0 v_{m0} = \sigma_{m0} v_{m0} \quad (4.31)$$

$$v_{m_0}(0)=0, \quad v'_{m_0}(1)=0 \quad (4.32)$$

$$\varepsilon^1: \quad v''_{m_1} + \lambda_0 v_{m_1} = \sigma_{m_0} v_{m_1} + \sigma_{m_1} v_{m_0} \quad (4.33)$$

$$v_{m_1}(0)=0, \quad v'_{m_1}(1)=0 \quad (4.34)$$

$$\varepsilon^2: \quad v''_{m_2} + \lambda_0 v_{m_2} = -\lambda_0 \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \phi_0^2 \right) v_{m_0} + \sigma_{m_0} v_{m_2} + \sigma_{m_2} v_{m_0} \quad (4.35)$$

$$v_{m_2}(0)=0, \quad v'_{m_2}(1)=0 \quad (4.36)$$

由(4.31), (4.32)可解得

$$v_{m_0} = \phi_m = \sqrt{2} \sin \frac{\pi(2m+1)}{2} z = \sqrt{2} \sin \sqrt{\lambda_m} z \quad (4.37)$$

$$\lambda_m = \lambda_0 - \sigma_{m_0} \quad (4.38)$$

$$\therefore \quad \sigma_{m_0} = \lambda_0 - \lambda_m \quad (4.39)$$

由(4.33), (4.34), 不考虑与 ε^0 阶问题相同的解, 可得

$$\sigma_{m_1} = v_{m_1} = 0 \quad (4.40)$$

故(4.35), (4.36)成为

$$v''_{m_2} + \lambda_m v_{m_2} = v_{m_0} \left(\frac{\lambda_0}{4} + \sigma_{m_2} \right) - \frac{\sqrt{2} \lambda_0}{8} \left[\sin \frac{\pi(2m+3)}{2} z + \sin \frac{\pi(2m-1)}{2} z \right] \quad (4.41)$$

$$v_{m_2}(0)=0, \quad v'_{m_2}(1)=0 \quad (4.42)$$

$$\therefore \quad \sigma_{m_2} = -\frac{\lambda_0}{4} \quad (4.43)$$

最后解得

$$v_m = \phi_m + O(\varepsilon^2) \quad (4.44)$$

$$\sigma_m = \lambda_0 - \lambda_m + O(\varepsilon^2) \quad (4.45)$$

$$\sigma_0 = -\frac{\lambda_0}{4} \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3) \quad (4.46)$$

问题(4.12), (4.13)现在成为

$$\frac{d^2 \bar{\theta}}{dz^2} + \lambda \left(1 - \frac{1}{2} \theta^2 \right) \bar{\theta} = (\lambda^* - \lambda) \cos \sqrt{\lambda^*} z \quad (4.47)$$

$$\bar{\theta}(0)=0, \quad \frac{d\bar{\theta}}{dz}(1)=0 \quad (4.48)$$

$$\therefore \quad \bar{\theta} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\int_0^1 \left\{ (\lambda^* - \lambda) \cos \sqrt{\lambda^*} z \cdot \sqrt{2} \sin \frac{\pi(2m+1)}{2} z \right\} dz}{\sigma_m} \cdot \sqrt{2} \sin \frac{\pi(2m+1)}{2} z \quad (4.49)$$

可看到(4.49)与(4.18)式在形式上是相同的, 但此时 σ_m 是由(4.45), (4.46)式给出的.

$$\begin{aligned} \therefore \quad \theta = & \sqrt{2} \sin \frac{\pi z}{2} \varepsilon + \frac{\sqrt{2}}{96} \sin \frac{3\pi z}{2} \varepsilon^3 + \dots + \left[\frac{16}{\pi \varepsilon^2} \sin \frac{\pi z}{2} \right. \\ & \left. + O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) + \cos n\pi z \right] \delta + O(\delta^2) \end{aligned} \quad (4.50)$$

在分岔点 $\lambda_0(\varepsilon=0)$ 上, 对于解分支 θ 的扰动解分支也是无界的. 由于这种奇异性, 我们必须寻求在 λ_0 附近有效的解答.

4.2 内场解

在 λ_0 的附近, 我们用下面的伸展变换来求得内场解.

$$\text{设} \quad \lambda = \lambda_0 + \xi\mu^2 + O(\mu^3) \quad (4.51)$$

$$X = x_0 + x_1\mu + x_2\mu^2 + \dots \quad (4.52)$$

$$\delta = \text{sgn}(\delta)\mu^3 \quad (4.53)$$

其中 $\lambda = \lambda_0, x_0 = \theta_0(\lambda_0) = 0$ 为奇异点, ξ 为伸展变量, μ 为内场解的摄动小参数. λ 的展开式(4.51)以及 δ 与 μ 的关系式(4.53)与常用的伸展变换有所不同. 它们可由较一般的展开式推导出, 其形式由算子的非线性性质决定. 这样的伸展变换可在运算中应用可解性条件, 并使解答反映出分岔参数 λ 和扰动参数 δ 的影响. 详细推导过程请参看文[2].

将扰动分岔问题(2.7), (2.8)用内场变量来描述

$$\frac{d^2 X}{dz^2} + \lambda \sin X = 0 \quad (4.54)$$

$$X(0) = \text{sgn}(\delta)\mu^3, \quad \frac{dX}{dz}(1) = 0 \quad (4.55)$$

将(4.51)~(4.53)代入(4.54), (4.55), 可得一系列关于 x_i 的线性问题

$$\mu: \quad \frac{d^2 x_1}{dz^2} + \lambda_0 x_1 = 0 \quad (4.56)$$

$$x_1(0) = 0, \quad \frac{dx_1}{dz}(1) = 0 \quad (4.57)$$

$$\mu^3: \quad \frac{d^2 x_3}{dz^2} + \lambda_0 x_3 = -\xi x_1 + \frac{\lambda_0}{6} x_1^3 \quad (4.58)$$

$$x_3(0) = \text{sgn}(\delta), \quad \frac{dx_3}{dz}(1) = 0 \quad (4.59)$$

可解得

$$x_1 = A \sin \sqrt{\lambda_0} z \quad (4.60)$$

$$\text{设} \quad x_3 = \bar{x} + x^* \quad (4.61)$$

$$x^* = \text{sgn}(\delta) \cos \sqrt{\lambda^*} z \quad (4.62)$$

$$\lambda^* = n^2 \pi^2 \quad (4.63)$$

问题(4.58), (4.59)化为具齐次边界条件的非齐次方程.

$$\frac{d^2 \bar{x}}{dz^2} + \lambda_0 \bar{x} = -\xi x_1 + \frac{\lambda_0}{6} x_1^3 + \text{sgn}(\delta)(\lambda^* - \lambda_0) \cos \sqrt{\lambda^*} z \quad (4.64)$$

$$\bar{x}(0) = 0, \quad \frac{d\bar{x}}{dz}(1) = 0 \quad (4.65)$$

由于算子的奇异性, 可解性条件为

$$\int_0^1 \left\{ -\xi A \sin \sqrt{\lambda_0} z + \frac{\lambda_0}{6} A^3 \sin^3 \sqrt{\lambda_0} z + \text{sgn}(\delta)(\lambda^* - \lambda_0) \cos \sqrt{\lambda^*} z \right\} \sqrt{2} \sin \frac{\pi z}{2} dz = 0 \quad (4.66)$$

可据此得出关于振幅 A 的方程

$$A^3 + pA + q = 0 \quad (4.67)$$

其中
$$p = -8\xi/\lambda_0 = -\frac{32}{\pi^2}\xi \tag{4.68}$$

$$q = -\text{sgn}(\delta)\frac{32}{\pi} \tag{4.69}$$

所以内场解为

$$\lambda = \lambda_0 + \xi|\delta|^{\frac{2}{3}} + O(\delta) \tag{4.70}$$

$$X = A(\xi)\sin\frac{\pi z}{2}|\delta|^{\frac{1}{3}} + O(\delta^{\frac{2}{3}}) \tag{4.71}$$

方程(4.67)的判别式

$$\Delta = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = \left(-\frac{16}{\pi}\right)^2 - \left(\frac{32}{3\pi^2}\xi\right)^3 \tag{4.72}$$

当 $\Delta > 0$, 也即 $\xi < \xi_0 = 2.738952$ 时, 方程只有一个实根

$$A^+(\xi) > 0 \tag{4.73}$$

当 $\Delta < 0$, 也即 $\xi > \xi_0$ 时, 方程有三个实根

$$A^+(\xi) > 0, \quad A_1^-(\xi) < 0, \quad A_2^-(\xi) < 0 \tag{4.74}$$

当 $\xi = \xi_0$, $A_1^-(\xi)$ 和 $A_2^-(\xi)$ 交于一点.

由匹配条件可决定内场解和外场解各分支的连接. 最后的分岔图见图2、图3、图4.

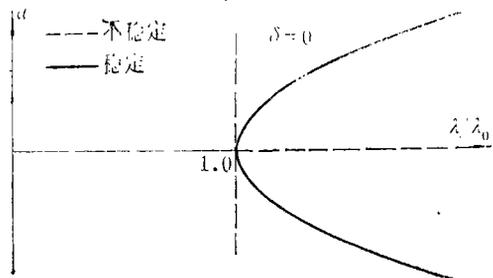


图2 $\delta=0$ 时解的分岔

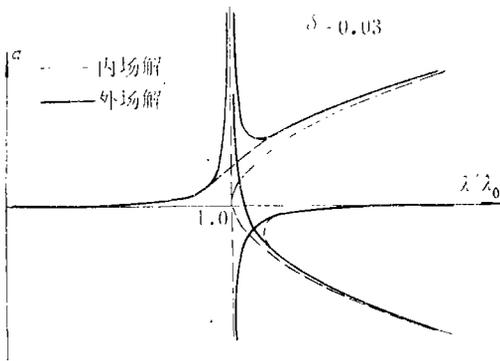


图3 $\delta=0.03$ 时的内场解和外场解

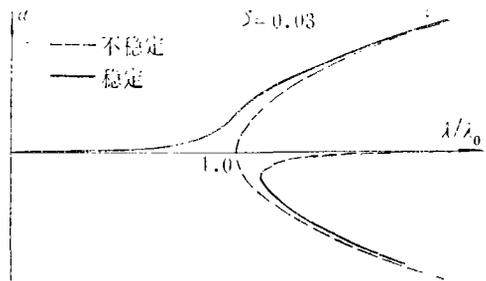


图4 $\delta=0.03$ 时的复合解

五、结 论

本文利用奇异摄动的不完全分岔理论, 讨论了压杆在固支端点条件存在某种缺陷情况下的失稳特性. 这种缺陷并未包括固支边界所可能出现的所有不完善情况, 但我们据此得到的分岔图形图4有其一般性, 对所谓具有三次非线性(cubic nonlinearity)的扰动分岔问题都可以得到类似图形. 对于本文所研究的屈曲杆问题, 可看到由于端点条件扰动的引入, 破坏了理想情况下的突然分岔. 也就是说, 当压杆在其固定端处, 由于支承条件的缺陷而使端部与杆轴线预先存在一微小夹角时, 直杆并不突然失稳, 而是随载荷增加而连续地产生大挠度, 挠度的显著增加也比线性理论所预测的发生要早. 因此, 我们可以认为实验中所观察到的此类现象是与端点条件的缺陷有关的.

分岔图形还指出了直杆向支座转角相反方向弯曲的可能性。在分岔理论中这叫做不完全分岔的孤立解^[3]，这种解合理地表述了此类与直觉相违背的反常现象。

分岔理论的另一任务是研究解分支的稳定性。本文未对此进行详细讨论。因为在本问题物理背景极清晰的情况下，我们可以判定，解分支曲线满足 $d\lambda/d|\alpha| > 0$ 时是稳定的，而满足 $d\lambda/d|\alpha| < 0$ 时是不稳定的，据此分别说明了图4中各解分支的稳定性。

作者对钱伟长教授和戴世强副教授的关心和指导表示衷心的感谢。

参 考 文 献

- [1] 铁木辛柯, 《弹性稳定理论》, 第二版, 科学出版社(1965).
- [2] Matkowsky, B. J. and E. L. Reiss, *Singular perturbations of bifurcations*, *SIAM J. Appl. Math.*, **33**, 2 (1977).
- [3] Iooss, Gérard and D. D. Joseph, *Elementary Stability and Bifurcation Theory*, Springer-Verlag (1980).

The Perturbation Solution of the Large Elastic Curve of Buckled Bars and the Singular Perturbation Method for Its Imperfect Bifurcation Problem

Zhou Zhe-wei

(Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Shanghai)

Abstract

This paper presents the large deflection elastic curve of buckled bars through perturbation method, and the bifurcation diagrams including the influence of the imperfection at the base by using singular perturbation method of imperfect bifurcation theory. The physical meaning of the bifurcation diagrams is discussed.