应用数学和力学，第8卷第4期（1987年4月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

区域函数的广义导数及其应用*

何 冲

（中国科学技术情报研究所重庆分所，1986年2月20日收到）

摘 要

本文以[7]的基本概念为基础，并根据Clarke的广义导数[1]，以及Lasotra和Strauss的[6]多值函数$f(x)$的广义微分$D_f(x)$的定义。从而建立了区域函数$F(x)$的广义导数

$$D_F(x)=\bigcup\bigcap\{G(x)\subseteq B(R),\ \forall x\in B(R);\ G(x)=F'_x=F'(x)\}$$

讨论了区域函数$F(x)$的广义导数的存在性；建立了区域函数的广义Fréchet导数存在的必要充分条件。

一、引 言

在经典意义下，在一曲线上的某一点的切线，是定义在该曲线上的点函数在此点的导数。同样，在一曲面上的某一点切平面，是定义在该曲面上的点函数$f(x)$在此点的偏导数，等等。

从几何观点出发，我们还认为，点是有限长直线的“收缩”（或“退化”）；有限长直线是曲线的“收缩”（或“退化”）；有限可测平面是曲面的“收缩”（或“退化”），等等。

在作者[7]的区域理论意义下，我们将从上述思想出发，将有限长直线（同于曲线的“收缩”）与曲线上的某点的切线相联系；有限可测平面（同于曲面上某点的“局部收缩”）与曲面上的某一点的切平面相联系，从而定义区域函数的抽象广义导数。

本文的主要目的是，为了克服Clarke的广义导数存在的先决条件，必须是所求导数的函数至少是局部Lipschitz的缺点。同时还避免了，在求一般导数时，必定要取极限，而常常会遇到很多困难。我们将Clarke的广义导数推广到任意非空的区域，并与我们的区域理论相结合，在求广义抽象导数时就不会存上述问题。在求区域函数的广义导数过程中，我们还利用了Clarke的广义导数，和Lasotra与Strauss的多值函数$f(x)$的微分$D_f(x)$的某些优点，从而将区域函数$F(x)$在其定区域$B(R)$上的所有广义导数F'_x的集合定义成

$$D_F(x)=\bigcup\bigcap\{G(x)\subseteq B(R),\ \forall x\in B(R),\ G(x)=F'_x=F'(x)\}$$

为了本文下面给出区域函数的广义导数，和广义Fréchet导数的定义，并讨论它们的一系列性质的需要，我们首先给出一些有关区域理论的基本概念如下。

如果，$G(x)\subseteq B(R)$，$\forall x\in B(R)$始终是真实的，则我们说G是区域$B(R)$的收缩；如果$G(x)\subseteq B(R)$，$\forall x\in B(R)$，并且G是均匀的，则我们说G是区域$B(R)$的均匀收缩；如果有

* 钱伟长推荐。

一个确定的点x_0（变换，或映射的不动点），并且$x_0 \in G(x)$，$\forall x \in B(R)$，始终是真实的，则我们说G是区域$B(R)$的均匀保核收缩。如果G是有限均匀的，并且$x_0 \in G(x)$，$\forall x \in B(R)$，始终是真实的，则我们说$G(x)$是$B(R)$的有限均匀保核收缩。

同样，如果$B(R) \subseteq G(x)$，$\forall x \in B(R)$，始终是真实的，并且G是有限均匀的，则我们说G是区域$B(R)$的有限均匀扩张；如果有一点x_0，并且$x_0 \in G(x)$，$\forall x \in B(R)$始终是真实的；则我们说G是区域$B(R)$的有限均匀保核扩张，等等。

二、基 本 概 念

本节，我们将给出一些有关区域函数的广义导数，以及与其有关的一些基本概念。

定义1 设$B(R)$是任一非空的区域，G是$B(R)$的保核收缩（或保核扩张），即

$$G(x) \subseteq B(R),\ \text{并且} x_0 \in G(x),\ \forall x \in B(R) (\text{或} B(R) \subseteq G(x),\ \forall x \in B(R))$$

$G(x)$是均匀的，当且仅当$B(R) \backsim G(x)$，$\forall x \in B(R)$始终是真实的。其中$\backsim$表示$B(R)$相似于$G(x)$；x_0（映射，或变换的不动点）是区域函数$F(x)$的核。

定义2 设$B(R)$是任一有界非空的区域，如果$B(R)$既不能收缩，即$G(x) \subsetneqq B(R)$，$\forall x \in B(R)$，也不能扩张，即$B(R) \subsetneqq G(x)$，$\forall x \in B(R)$，或者也不能作别的任何一种运动（或改变），则我们说区域$B(R)$是常数。

定义3 设$B(R)$是任一非空的区域，$F(x)$是定义在$B(R)$上的区域函数，$G(x)$是域$B(R)$的保核收缩，F'_x是$F(x)$在$B(R)$上的广义 Clarke 导数，并且$G(x) = F'_x = F'(x)$，$D_F(x)$是$F(x)$在$B(R)$上的所有广义Clarke导数F'_x的集合，并由

$$D_F(x) = \bigcup \bigcap \{G(x) \subseteq B(R),\ \forall x \in B(R),\ G(x) = F'_x = F'(x)\}$$

给出映射$D_F: B(R) \longrightarrow T_s$。

这就是我们的区域函数的广义导数的定义。

定义4 设$B(R)$是任一非空的区域，$B(R_0)$是$B(R)$的稳定中心，$F(x)$是定义在$B(R)$上的区域函数，G是$B(R)$的保核收缩，F'_x是$F(x)$在$B(R)$上的广义导数，并且$G(x) = F'_x$，M是与区域$B(R)$相伴的$m \times n$-矩阵，并且有

$$M = (a_{ij}) \qquad (1 \leqslant i \leqslant m;\ 1 \leqslant j \leqslant n)$$

如果有

$$M = JG(x)$$

在$B(R)$上始终是真实的，则我们称M为与区域$B(R)$相伴的广义Jacobi 矩阵。

定义5 设$B(R)$是任一非空的区域，$F(x)$是定义在$B(R)$上的区域函数，$M = JG(x)$是与区域$B(R)$相伴的$m \times n$-广义Jacobi矩阵。如果$D'_F(x) = M(x) = JG(x)$在$B(R)$上始终是真实的，则定义在$B(R)$上的区域函数$F(x)$是广义 Fréchet 可微的，并且$D'_F(x)$称为$F(x)$在$B(R)$上的广义Fréchet导数。

定义6 设$B(R)$是任一非空的区域，$F(x)$是定义在$B(R)$上的区域函数，$\vec{F}'_x$是$F(x)$在$B(R)$上的广义方向导数，$\vec{G}$是区域$B(R)$的有向保核收缩，并且$\vec{F}'_x = \vec{G}(x)$，(x_i)是$B(R)$的所有有向点序列的集合。此外，我们有

$$O = \{x = (x_i) \in B(R),\ i \in J,\ x_i \geqslant 0, \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\}$$

是所有有向点列的集合。于是，$F(x)$在$B(R)$上的所有广义方向导数$\vec{F}'_x$的集合被定义成

$$\vec{D}_F(x)=\bigcup\bigcap\{\vec{G}(x_j)\subseteq B(R),\ \forall x_j\in O,\ \vec{F}'_x=\vec{G}(x_j),\ j\in N\}$$

三、区域函数的广义导数及其基本性质

本节，将以引论，第二节和[6,7]的一些基本概念和主要思想为基础，建立区域函数的广义导数的基本理论，为此，我们首先给出如下引理。

引理1 设$B(R)$是任一区域，$F(x)$是定义在$B(R)$上的区域函数；$D_F(x)$在$B(R)$上有定义，并且是非空的集合，当且仅当区域$B(R)$是非空的。

证明 关于充分条件，使用反证法，即假定$B(R)=\phi$。由于$F(x)$是定义在$B(R)$上的区域函数，由$B(R)=\phi$直接得到$F(x)=\phi$。由$F(x)$的广义导数的定义得到

$$\bigcup\bigcap\{G(x)\subseteq B(R),\ \forall x\in B(R),\ G(x)=F'_x=F'(x)\}=\phi$$

由此可见$D_F(x)=\phi$，这就得出矛盾。

至于必要条件是很平凡的。

引理2 设$B(R)$是任一有界非空的区域，$F(x)$是定义在$B(R)$上的区域函数，如果$B(R)$是常数（或不变的），则区域函数$F(x)$在$B(R)$上的所有广义导数F'_x的集合$D_F(x)$是空集合。

证明 此引理是定义3的直接结果。

定理1 设$B(R)$是任一有界非空的区域，$F(x)$是定义在$B(R)$上的区域函数，$D_F(x)$是$F(x)$在$B(R)$上的所有广义导数F'_x的集合。于是，当$D_F(x)$有定义的时候，$D_F(x)$是$B(R)$的非空的、凸的和列紧的子区域。

证明 首先证明第一部分，即$D_F(x)\neq\phi$。根据假定，$B(R)\neq\phi$，可见$F(x)\neq\phi$，$\forall x\in B(R)$。又根据定义3，显然$D_F(x)$在$B(R)$上是有定义的，并且是非空的。

关于第二部分的证明，可按通常证明一个集合是凸的和列紧的方法进行，具体证明过程从略。

现在证明定理的第三部分，即$D_F(x)$是$B(R)$的凸子区域，即

$$D_F(x)\subseteq B(R),\ \forall x\in B(R)$$

可分为两种情形来证明。

第一种情形。如果，$G(x)$已经是凸的，根据$D_F(x)$的定义，以及$D_F(x)$和$G(x)$之间的关系，$D_F(x)$也必定是凸的。

第二种情形。如果$G(x)$不是凸的。在这种情况下，总可以通过一个变换，变$G(x)$成一个凸集。这正好是情况一。因此，$D_F(x)$也是凸的。

此外，根据$D_F(x)$的定义，$D_F(x)$显然是$B(R)$的子集合。于是，定理完全得证。

定理2 设$B(R)$是任一有界非空的区域，$F(x)$是定义在$B(R)$上的区域函数，区域$B(R)$的保核收缩$G(x)$是均匀的，则如下各命题是真实的：

1）闭（开）区域$B(R)$的保核收缩G（或有限保核扩张）是闭（开）的；

2）通过$B(R)$的稳定中心$B(R_0)$，和通过$B(R)$的保核收缩（或有限保核扩张）$G(x)$的核x_0的任一直径（直线或平面）是成比例的；

3）$B(R)$的稳定中心$B(R_0)$的邻域，和$G(x)$的核x_0的邻域是相似的，即$N(B(R_0))\backsim N(x_0)$。

证明 首先证明命题1）。用矛盾法证。假定$B(R)$是开区域，并以$B(R)$的边界内部附近

的点x_i为中心，$\delta>0$为半径作邻域$N_\delta(x_i)$，使$N_\delta(x_i)$与$B(R)$的边界$B_D(R)$相交。由于$B_D(R)$不包含$B(R)$的点，因此$N_\delta(x_i)\cap B_D(R)=\phi$。同样，可在$B(R)$保核收缩$G(x)$的相应方向，和相应位置$x_j$，作相应的邻域$N_{\delta_1}(x_j)$，使$N_{\delta_1}(x_j)$与$G(x)$的边界$G_D(x)$相交。由于，$G(x)$是闭的，因此，$N_{\delta_1}(x_j)\cap G_D(x)\neq\phi$。现在作映射

$$f:N_\delta(x_i)\cap B_D(R)\longrightarrow N_{\delta_1}(x_j)\cap G_D(x)$$

根据假定，映射f是一一对应的和满的，因此，其逆映射

$$f^{-1}:N_{\delta_1}(x_j)\cap G_D(x)\longrightarrow N_\delta(x_i)\cap B_D(R)$$

根据假定，也是一一对应的和满的。已知$N_\delta(x_i)\cap B_D(R)=\phi$，但$N_{\delta_1}(x_j)\cap G_D(x)\neq\phi$。同时，我们还知道映射$f$和$f^{-1}$是相互一一对应的和满的，即它们的内点与内点，边界点与边界点相互对应。所以$f^{-1}(N_{\delta_1}(x_j)\cap G_D(x))\neq\phi$应始终是真实的。然而，$N_\delta(x_i)\cap B_D(R)=\phi$。这就得出矛盾。

现在，证明定理的第二部分。2)的证明比较复杂，这是因为在证明过程中，要用到微分几何中的Christöffel符号，和张量分析中的一些符号和基本概念。为了减少某些读者的困难，我们这里只考虑平面区域的情形。至于更一般的空间区域和抽象区域的情形，证明方法基本相似，只是证明过程比平面区域要复杂得多。我们假定$B(R)$是平面区域。用D_{B_0}表示通过区域$B(R)$的稳定中心$B(R_0)$的直径；用D_{x_0}表示通过$B(R)$的保核收缩（或保核扩张）$G(x)$的核x_0的直径，它们的方向是相同的，并在D_{B_0}与$B(R)$的边界B_D的交点x_i作半直线R_{x_i}，又在D_{x_0}与$G(x)$的边界G_D的相应位置的交点x_j作半直线r_{x_j}。由于R_{x_i}的方向与r_{x_j}的方向相同，又由于D_{B_0}的方向与D_{x_0}的方向相同，因此，D_{B_0}和R_{x_i}之间的夹角等于D_{x_0}和r_{x_j}之间的夹角，所以，我们有

$$\arccos(D_{B_0}/R_{x_i})=\arccos(D_{x_0}/r_{x_j})$$

由此可见

$$D_{B_0}/R_{x_i}=D_{x_0}/r_{x_j}$$

命题2)得证。

命题3)的证明可直接由定义1得到。定理完全得证。

定理3　设$B(R)$是任一非空的区域，$F(x)$是定义在$B(R)$上的区域函数，M是与$B(R)$相伴的$m\times n$-广义Jacobi矩阵。如果M在$B(R)$上始终有定义，则$F(x)$在$B(R)$上是广义Fréchet可微的，并且其广义Fréchet导数被定义成$D'_F(x)=M(x)$。

证明　此定理本质上是定义5的另一种叙述形式。它基本上与定义5一致。可以用定义4和定义5证明它。具体证明过程从略。

推论1　设$B(R)$是任一非空的区域，$F(x)$是定义在$B(R)$上的区域函数，$F(x)$是广义Fréchet可微的，当且仅当存在并在$B(R)$上始终有定义的、与$B(R)$相伴的$m\times n$-广义Jacobi矩阵$M(x)$。

证明　第一部分的证明是很平凡的，因为可通过定理3和定义5直接得到。至于第二部分的证明也很容易，因而证明过程从略。

定理4　设$B(R)$是任一非空的区域，$F(x)$和$H(x)$是定义在$B(R)$上的不相同的区域函数，$G(x)$是$B(R)$的保核收缩。如果它们及它们的和的广义导数存在，并分别为$D_F(x)$，$D_H(x)$，$D_{F+H}(x)$。则下面的包含是真实的

$$D_{F+H}(x)\subseteq D_F(x)+D_H(x) \tag{3.1}$$

证明　根据假定，$B(R)\neq\phi$，根据引理1，$F(x)$，$H(x)$和$F(x)+H(x)$的广义导数的存

在性是很显然的。

现在证明(3.1)是真实的。我们取

$$\|(F+H)(x)\|\leqslant\|F(x)\|+\|H(x)\| \tag{3.2}$$

其中$\|\cdot\|$表示$F(x)$, $H(x)$和$(F+H)(x)$的范数。由(3.2)容易得到

$$(F+H)(x)\subseteq F(x)+H(x) \tag{3.3}$$

对(3.3)的两端，按定义3分别取广义导数，得到

$$D_{F+H}(x)\subseteq D_F(x)+D_H(x),\quad \forall x\in B(R) \tag{3.4}$$

于是，定理完全得证。

注1 如果区域$B(R)$的保核收缩是不同的，即$B(R)$的保核收缩$G_1(x)$对应于区域函数$F(x)$; $B(R)$的保核收缩$G_2(x)$对应于区域函数$H(x)$。在这种情况下，(3.1)仍然是真实的，因为$(G_1+G_2)(x)\subseteq G_1(x)+G_2(x)$。其证明过程稍复杂，但证明方法基本相同。

定理5 设$B(R)$是任一有界可分的区域，$F(x)$是定义在$B(R)$上的区域函数，G是$B(R)$的保核收缩，$\lambda>0$是任意有界常数。如果$D_F(x)$和$D_F(\lambda x)$都存在，则有

$$D_F(\lambda x)=\lambda D_F(x)$$

证明 根据假定和定义3，$D_F(\lambda x)$和$D_F(x)$的存在性是很显然的。

现在证明$D_F(\lambda x)=\lambda D_F(x)$。

由于$G(x)\subseteq B(R)$, $\forall x\in B(R)$，又因$F(x)$是定义在$B(R)$上的区域函数，已知$B(R)$是可分的，因此$F(x)$也是可分的。于是，我们总可以取

$$F(\lambda x):=\{F(\lambda_i x_i)\} \tag{3.5}$$

由定义3得到，$D_F(\lambda x)$是$F(\lambda x)$在$B(R)$上的所有广义导数$F'(\lambda x)$的交和并的集合，并取$F'(\lambda x)=G(\lambda x)$。根据(3.5)，相应地可取$G(\lambda x):=\{G(\lambda_i x_i)\}$。所以，我们总可以取

$$\lambda D_F(x)\subseteq \bigcap_{k=1}^{\infty} G(\lambda_k x_k)=D_{F_1}(\lambda x),\quad \forall x\in B(R) \tag{3.6}$$

根据Lindelöf定理，我们始终有

$$\lambda D_F(x)\subseteq \bigcap_{k=1}^{\infty} G(\lambda_k x_k)=\bigcap_{k=1}^{n} G(\lambda_k x_k)=D_{F_1}(\lambda x) \tag{3.7}$$

即

$$\lambda D_F(x)\subseteq D_{F_1}(\lambda x),\qquad \forall x\in B(R) \tag{3.8}$$

我们总可以使用保核变换（或收缩，或扩张），使得$D_{F_1}(\lambda x)=D_F(\lambda x)$，因此，我们有

$$\lambda D_F(x)\subseteq D_F(\lambda x) \tag{3.9}$$

另一方面，由于$\lambda>0$是任意有界常数，可用类似方式得到

$$D_F(\lambda x)\subseteq\lambda D_F(x) \tag{3.10}$$

比较(3.9)式和(3.10)式。我们得到

$$D_F(\lambda x)=\lambda D_F(x)$$

因此，定理完全得证。

定理6 设$B(R)$是任一非空的区域，$F(x)$, $H(x)$是定义在$B(R)$上的两个不同的区域函数，G是区域$B(R)$的保核收缩。如果$F(x)$和$H(x)$在$B(R)$上都是广义可微的，则$F(x)\times H(x)$在$B(R)$也是广义可微的，并且有

$$D_{F\times H}(x)=D_F(x)\times H(x)+F(x)\times D_H(x)$$

证明 可以直接使用定义3和定理5得证。

推论2 在定理6的假定下，我们同样有

$$D_F(x)-D_H(x)\subseteq D_{F-H}(x),\qquad \forall x\in B(R)$$

或者

$$D_F(x)\subseteq D_{F-H}(x)+D_H(x),\qquad \forall x\in B(R)$$

证明 此结果的证明基本上同定理6。

推论3 设$B(R)$是任一非空的区域，$F(x)$，$K(x)$，…，$H(x)$都是定义在$B(R)$上的区域函数，并且$F(x)\neq K(x)\neq\cdots\neq H(x)\neq\phi$，$G$是区域$B(R)$的保核收缩。如果$F(x)$，$K(x)$，…，$H(x)$及其和$F(x)+K(x)+\cdots+H(x)$都是广义可微的，并且它们的广义导数分别为$D_F(x)$，$D_K(x)$，…，$D_H(x)$，$D_{F+K+\cdots+H}(x)$。则如下包含是真实的

$$D_{F+K+\cdots+H}(x)\subseteq D_F(x)+D_K(x)+\cdots+D_H(x)$$

证明 此结果可根据定理4，以及定理4的证明方法，和数学归纳法得证。

注2 关于定理6和推论2的结果都可推广到定义在区域$B(R)$上的任意有限多个非空的区域函数。并且，证明方法基本上也和那里的证明方法相类似。

定理7 （区域函数的广义中值定理） 设$B(R)$是任一非空的可分区域，G是$B(R)$的保核收缩，$F(x)$是定义在$B(R)$上的数值区域函数，F'_x是$F(x)$在$B(R)$上的广义导数，并且有$G(x)=F'_x=F'(x)$，$\forall x\in B(R)$；$F(B(R)):=\bigcup\{F(x):\forall x\in B(R)\}$是$F(x)$在$B(R)$上的所有值的集合；设$B(R_j)$和$B(R_k)$都是$B(R)$的任意两个不同的、非空的开子区域，并且$B(R_j)\cap B(R_k)\neq\phi$，$F(B(R_j))\neq F(B(R_k))\neq 0$，$\partial B(R_j)$和$\partial B(R_k)$分别是$B(R_j)$和$B(R_k)$的边界，并且$\partial B(R_j)\cap\partial B(R_k)=\phi$，$F(\partial B(R_j))=F(\partial B(R_k))=0$。则在$F(B(R_j))$和$F(B(R_k))$之间存在数$\mu$，使我们有

$$G(\eta)=\mu,\qquad \forall\eta\in B(R_j)\cap B(R_k)$$

证明 根据假定，由于$B(R_j)\neq B(R_k)\neq\phi$，并且它们的边界$\partial B(R_j)=\partial B(R_k)=\phi$；同时，$F(B(R_j))\neq F(B(R_k))\neq 0$，$F(\partial B(R_j))=F(\partial B(R_k))=0$；$B(R_j)\cap B(R_k)\neq\phi$，并且$\partial B(R_j)\cap\partial B(R_k)=\phi$。此外，由于$G(x)=F'_x$，所以在$]F(B(R_j))；F(B(R_k))[$中，必定有不为零的值，即有任意点$\eta\in B(R_j)\cap B(R_k)$，使得

$$G(\eta)=\mu,\qquad \forall\eta\in B(R_j)\cap B(R_k)$$

始终是真实的。于是定理得证。

其中符号]；[表示广义开区间。

四、应　用

本节将给出两个在实际中很有用的定理。

定理8 设$B(R)$是任一有界非空的区域，$F(x)$是定义在$B(R)$上的区域函数，M是与$B(R)$相伴的$m\times n$-广义Jacobi矩阵，如果$F(x)$在$B(R)$上的广义Fréchet导数$D'_F(x)=M(x)$存在，则我们有形如

$$F'(x)\subseteq D'_F(x),\qquad \forall x\in B(R)$$

的广义微分方程。

其中$F'(x)$是$D'_F(x)$的任意可积的选择。

证明 我们可根据区域函数$F(x)$，$D'_F(x)$与$F'(x)$的定义，它们之间的关系和性质，以及$B(R)$的可分性证明它。具体证明是平凡的。

定理9 设$B(R)$是任一非空的可分区域，$F(x)$是定义在$B(R)$上的区域函数，G是$B(R)$

的保核收缩，F'_x是$F(x)$在$B(R)$上的广义导数，并且$G(x)=F'_x$，$D_F(x)$是$F(x)$在$B(R)$上的所有广义导数F'_x的集合，$f(x)$是$D_F(x)$的任一可测选择。如果$D_F(x)$是广义可积的，则我们有

$$\int_{B(R)} \mathrm{se} D_F(x)dx = \mathrm{se}\int_{B(R_i)} f(x)dx$$

其中，符号“se”表示selection缩写，$B(R_i)$是$B(R)$的任一非空的子区域。

证明 由于此定理的证明比较长，而且也比较复杂，所以，这里不准备详细证明。但，为了清楚起见，只需注意事实

$$\int_{B(R)-B(R_i)} D_F(x)dx=0$$

$$\int_{B(R)} D_F(x)dx-\int_{B(R_i)} D_F(x)dx=0$$

由此得到

$$\int_{B(R)} D_F(x)dx=\int_{B(R_i)} D_F(x)dx=\int_{B(R_i)} f(x)dx$$

参 考 文 献

[1] Clarke, F. H., Generalized gradient and applications, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **205** (1975), 247—262.

[2] Lebourg, M. G., Valeur moyenne pour gradient généralisé, *C. R. Acad. Soc.*, Ser. A, **281** (1975), 795—797.

[3] Thibault, L., On generalized differentials and subdifferentials of Lipschitz vector-valued functions, *Nonlinear Anal. TMA*, **6**, 10 (1982), 1037—1053.

[4] Schröder, G., Differentiation of interval functions, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **36**, 2 (1972), 485—480.

[5] Clarke, F. H., On the inverse function theorem, *Pacific J. Math.*, **64**, 1 (1976), 92—102.

[6] Lasotra, A. and A. Strauss, Asymptotic behavior for differential equations which cannot be locally linearized, *J. Differ. Eqs.*, **10**, 10 (1971), 152—172.

[7] 何冲，区域函数，应用数学和力学，**7**，2 (1986)，173—179.

Generalized Derivatives of a Region Function and Its Applications

He Chong

(Chongqing Branch of ISTIC, Chongqing)

Abstract

This paper is based on some fundamental concepts in [7], Clarke's generalized derivatives[1], as well as Lasotra's and Strauss's definitions of the differential $D_f(x)$ of a multivalued function $f(x)$[6]. Thereby, the generalized derivatives of a region function $F(x)$ is defined as

$$D_F(x)=\bigcup\bigcap\{G(x)\subseteq B(R),\ \forall x\in B(R);\ G(x)=F'_x=F'(x)\}$$

The existence of the generalized derivatives of a region function $F(x)$ is discussed; the necessary and sufficient conditions of existence of the Fréchet generalized derivatives of such a function is established.