应用数学和力学，第8卷第3期（1987年3月）　　应用数学和力学编委会编
Applied Mathematics and Mechanics　　重庆出版社出版

Hausdorff局部凸空间内集值终归紧映象的不动点指数及其应用*

丁协平

（四川师范大学数学系，1986年6月10日收到）

摘　要

在本文内我们对Hausdorff局部凸拓扑矢量空间内的集值终归紧映象定义了不动点指数概念，利用此概念，我们证明了集值Φ-凝聚映象的几个非零不动点定理，这些定理推广了[1,2,7,8,9]中的某些已知结果.

一、引　　言

Fitzpatrick, Petryshyn[1]对Fréchet空间内凝聚集值映象定义了不动点指数，利用此概念在适当假设下，他们得到了凝聚集值锥映象非零不动点的存在性定理，Petryshyn, Fitzpatrick[2]在局部凸空间内闭凸集是收缩核的假设下建立了终归紧映象的拓扑度理论，Duc, Thanh, Ang[3]推广上述结果，在一般局部凸空间内建立了紧集值矢量场关于闭凸集的相对拓扑度概念和对终归紧矢量场建立了拓扑度概念.

本文目的是首先在一般Hausdorff局部凸空间的闭凸集上对集值终归紧映象建立不动点指数概念，然后利用我们定义的不动点指数，对一般Hausdorff局部凸空间内的集值Φ-凝聚映象证明了非零不动点的若干存在性定理，我们的定理及其特例改进和推广[1,2,7,8,9]中的许多已知结果.

二、集值终归紧映象的不动点指数

设X是一Hausdorff局部凸空间，X上的拓扑由半范数族$\{p_\alpha\colon \alpha\in A\}$决定，令$K(X)$表$X$的一切非空闭凸子集的族.

称映象$T\colon D\subseteq X\to K(X)$是上半连续的(u.s.c.)，如果对每一$x\in D$和开集$V\subset X$, $T(x)\subset V$，存在开集$W\subset X$, $x\in W$，使得$T(W\cap D)\subseteq V$.

现在令$F\subseteq X$是一闭凸子集，$\Omega\subseteq X$是一开集且$\Omega_F=\Omega\cap F\neq\phi$.分别用$\overline{\Omega}_F$和$\partial(\Omega_F)$表$\Omega_F$在$F$中的闭包和边界.

假设$T\colon\overline{\Omega}_F\to K(F)$是一u.s.c.映象，我们用归纳法定义一超限集序列$\{K_\alpha\}$. 令$K_0=$

* 中国科学院科学基金资助的课题.

$\mathrm{co}\,T(\overline{\Omega}_F)$.假设对序数$\alpha$，集$K_\beta$，$\beta<\alpha$，已有定义，如果$\alpha$是第一类序数，则定义$K_\alpha=\overline{\mathrm{co}}\,T(K_{\alpha-1}\cap\overline{\Omega}_F)$，如果$\alpha$是第二类序数，则定义$K_\alpha=\bigcap\limits_{\beta<\alpha}K_\beta$. 如在[2]中一样，我们能证明：每一$K_\alpha$是闭凸集且$K_\alpha\subseteq K_\beta$，$\forall\alpha\geqslant\beta$；对每一序数$\alpha$有$T(K_\alpha\cap\overline{\Omega}_F)\subseteq K_\alpha$.由于$\{K_\alpha\}$是一非增集序列，所以存在序数$\gamma$使得$K_\eta=K_\gamma$，$\forall\eta\geqslant\gamma$，且有$\{x\mid x\in\overline{\Omega}_F,\ x\in T(x)\}\subseteq K_\gamma$和$\overline{\mathrm{co}}T(K_\gamma\cap\overline{\Omega}_F)=K_\gamma$.记$K=K_\gamma=K(T,\overline{\Omega}_F)$.

定义 1 称 u.s.c. 映象 T：$\overline{\Omega}_F\to K(F)$ 是终归紧的，如果或 $K\cap\overline{\Omega}_F=\phi$，其中 $K=K(T,\ \overline{\Omega}_F)$，或$K\cap\overline{\Omega}_F\neq\phi$且$T(K\cap\overline{\Omega}_F)$是一相对紧集.

由[2]知紧映象，广义凝聚映象等都是终归紧映象，因此终归紧映象类是很广泛的一类非紧映象.

定义 2 设T：$\overline{\Omega}_F\to K(F)$是一终归紧映象使得$x\notin T(x)$，$\forall x\in\partial(\Omega_F)$于是$K=K(T,\overline{\Omega}_F)$具有[3]中定义2.1内$K$所具有的一切性质，由[3]的论证知相对拓扑度$\deg_K(I-T,\ \Omega,\theta)$有意义，其中$I$为恒等映象，定义

$$i_F(T,\Omega)=\deg_K(I-T,\Omega,\theta)$$

称$i_F(T,\Omega)$为T在Ω上关于F的不动点指数.

由[3]中结果易知$i_F(T,\Omega)$有如下性质

定理 1 设T：$\overline{\Omega}_F\to K(F)$是一终归紧映象且$x\notin T(x)$，$\forall x\in\partial(\Omega_F)$，则

(P_1) 若$i_F(T,\Omega)\neq 0$，则存在$x\in\Omega_F$使$x\in T(x)$，

(P_2) 若$x_0\in\Omega_F$，则$i_F(\hat{x}_0,\ \Omega)=1$，其中$\hat{x}_0$是取值$\{x_0\}$的常值映象，

(P_3) 若Ω_1，Ω_2是Ω的两个不相交开子集使得$x\notin T(x)$，$\forall x\in(\overline{\Omega}\backslash(\Omega_1\cup\Omega_2))_F=F\cap(\overline{\Omega}\backslash(\Omega_1\cup\Omega_2))$，则

$$i_F(T,\Omega)=i_F(T,\Omega_1)+i_F(T,\Omega_2),$$

(P_4) 设H:$[0,1]\times\overline{\Omega}_F\to K(F)$是终归紧映象使得$x\notin H(t,x)$，$\forall(t,x)\in[0,1]\times\partial(\Omega_F)$，则

$$i_F(H(1,\cdot),\ \Omega)=i_F(H(0,\cdot)\Omega)$$

证明 注意到$K\subseteq F$，$K\cap\Omega\subseteq F\cap\Omega=\Omega_F$和$K\cap\partial\Omega\subseteq F\cap\partial\Omega=\partial(\Omega_F)$，由[3]的定理6和7的论证易知结论($P_1$)，($P_3$)和($P_4$)成立.注意到$\hat{x}_0(x)=\{x_0\}$，$\forall x\in\overline{\Omega}_F$和$x_0\in\Omega_F$，由$K=K(\hat{x}_0,\ \overline{\Omega}_F)$的定义易知$x_0\in K\cap\Omega$，于是由常规论证知($P_2$)成立.

三、集值凝聚映象的非零不动点

本节目的是利用上节对集值终归紧映象定义的不动点指数来讨论集值凝聚映象的非零不动点问题.

设X是Hausdorff局部凸空间，半范数族$\{p_\alpha:\ \alpha\in A\}$决定$X$上的拓扑，给定$\alpha\in A$和$\Omega\subseteq X$，定义：

$\chi_\alpha(\Omega)=\inf\{\varepsilon>0\mid$存在$x_i\in X\ \ (i=1,\cdots,n)$使得$\Omega\subseteq\bigcup\limits_{i=1}^{n}B_\alpha(x_i,\varepsilon)\}$其中$B_\alpha(x_i,\varepsilon)=\{y\in X\mid p_\alpha(x_i-y)<\varepsilon\}$,

$\gamma_\alpha(\Omega)=\inf\{d>0\mid\Omega$能被$X$的有限个子集覆盖，其中每个子集的$p_\alpha$-直径小于$d\}$

令$C=\{\phi:\ A\to R^+=[0,\infty)\}$.对$\phi$，$\psi\in C$，$\lambda>0$，我们定义：

$$\phi\leqslant\psi\Leftrightarrow\phi(\alpha)\leqslant\psi(\alpha)\qquad(\forall\alpha\in A);$$
$$(\lambda\phi)(\alpha)=\lambda\phi(\alpha)\qquad(\forall\alpha\in A);$$
$$0(\alpha)=0\qquad(\forall\alpha\in A)$$
$$(\max\{\phi,\psi\})(\alpha)=\max\{\phi(\alpha),\ \psi(\alpha)\},\ (\forall\alpha\in).$$

现在定义映象χ：$2^X\to C$和γ：$2^X\to C$如下：

$$\chi(\Omega)(\alpha)=\chi_\alpha(\Omega)\qquad(\forall\alpha\in A)$$
$$\gamma(\Omega)(\alpha)=\gamma_\alpha(\Omega)\qquad(\forall\alpha\in A)$$

分别称χ和γ为X上的χ-非紧性测度和γ-非紧性测度。χ-非紧性测度首先由Sadovskii[4]引入，γ-非紧性测度由Petryshyn，Fitzpatrick[2]引入。关于这两类非紧性测度的性质参见[2]。

称Hausdorff局部凸空间X的一闭凸子集W为一楔，如果对$x\in W$，$t\in R^+$有$tx\in W$。如果楔W还满足$W\cap\{-W\}=\{\theta\}$，则称W为X内一锥，今后我们用P表X内的锥。

下面我们总假定$\Phi=\chi$或γ。

定义 3 称u.s.c.映象T：$D\subset X\to K(X)$是Φ-凝聚的，如果对每一非相对紧集$\Omega\subseteq D$，存在$\alpha\in A$使得

$$\Phi(T(\Omega))(\alpha)<\Phi(\Omega)(\alpha)$$

下面我们用$CK(X)$表X的一切紧凸子集的族。

引理 1 设T：$\overline{\Omega}_F\to CK(F)$是$\Phi$-凝聚映象，则$T$是终归紧的，因此$T$的不动点指数具有定理 1 中的性质。

证明 令$K=K(T,\ \overline{\Omega}_F)$，由构造知$\overline{\mathrm{co}}T(K\cap\overline{\Omega}_F)=K$。若$K\cap\overline{\Omega}_F=\phi$，则引理成立，现在设$K\cap\overline{\Omega}_F\neq\phi$。由非紧性测度的性质有

$$\begin{aligned}\Phi(T(K\cap\overline{\Omega}_F))(\alpha)&=\Phi(\overline{\mathrm{co}}\,T(K\cap\overline{\Omega}_F))(\alpha)=\Phi(K)(\alpha)\\&\geqslant\Phi(K\cap\overline{\Omega}_F)(\alpha)\qquad(\forall\alpha\in A)\end{aligned}$$

因T是Φ凝聚的。从上式推得$K\cap\overline{\Omega}_F$为紧集，再因T是取紧值的u.s.c.映象。故$T(K\cap\overline{\Omega}_F)$是紧集，即$T$是终归紧映象。

注 1 以后对Φ-凝聚映象的不动点指数的性质，我们直接引用定理 1 而不再申明。

定理 2 设Ω是Hausdorff 局部凸空间X内含零点θ的一开集，假设T：$\overline{\Omega}_W\to CK(W)$是$\Phi$-凝聚映象，如果满足

$$\lambda x\notin T(x),\ \ \forall x\in\partial(\Omega_W)\qquad(\lambda\geqslant1)\tag{3.1}$$

则 $i_W(T,\Omega)=1$和T在Ω_W内有一不动点。

证明 定义映象H：$[0,1]\times\overline{\Omega}_W\to CK(W)$如下：

$$H(t,x)=tT(x),\ \ \forall\ \ (t,x)\in[0,1]\times\overline{\Omega}_W$$

设$Q\subseteq\overline{\Omega}_W$为非相对紧集，则存在$\alpha\in A$使得

$$\Phi(T(Q))(\alpha)<\Phi(Q)(\alpha)$$

又因

$$H([0,1]\times Q)\subseteq\overline{\mathrm{co}}(T(Q)\cup\{\theta\})$$

从而有

$$\begin{aligned}\Phi(H([0,1]\times Q))(\alpha)&\leqslant\Phi(\overline{\mathrm{co}}(T(Q)\cup\{\theta\}))(\alpha)\\&\leqslant\Phi(T(Q))(\alpha)<\Phi(Q)(\alpha)\end{aligned}$$

因此H是Φ-凝聚映象，由引理1知H也是终归紧的。由条件(3.1)易知$x\notin H(t,x)$，$\forall(t,x)\in$

$[0,1]\times\partial(\Omega_W)$。从定理1的$(P_4)$和$(P_2)$得

$$i_W(T,\Omega)=i_W(\hat{\theta},\ \Omega)=1$$

再由(P_1)知T在Ω_W内有一不动点。

注 2　注意到X是一般的Hausdorff局部凸空间而没有[1,2]中的限制条件，当$\overline{W}=X$时定理2是[2]中定理3.2的改进，[1]中定理3.1是定理2的特例。

引理 2　设Ω是Hausdorff局部凸空间X内一有界开集，T：$\overline{\Omega}_W\to CK(W)$是$\Phi$-凝聚映象.$B$：$\overline{\Omega}_W\to CK(W)$是一集值紧映象（即$B$是u.s.c和$B(\overline{\Omega}_W)$是相对紧集），如果下列条件成立：

（i）　对每一$\alpha\in A$，集$(I\text{-}T)(\overline{\Omega}_W)$是$p_\alpha$-有界的和$\inf\limits_{x\in\overline{\Omega}_W}\ \inf\limits_{y\in Bx}p_\alpha(y)>0$；

(ii)　$x\notin T(x)+tB(x)$，$\forall(t,x)\in[0,\infty)\times\partial(\Omega_W)$

则有　$i_W(T,\Omega)=0$。

证明　设$i_W(T,\Omega)\neq0$.对任意$\lambda>0$定义映象H：$[0,1]\times\overline{\Omega}_W\to CK(W)$如下：

$$H(t,x)=T(x)+t\lambda B(x)$$

由假设(ii)知$x\notin H(t,x)$，$\forall(t,x)\in[0,1]\times\partial(\Omega_W)$

现在设$Q\subseteq\overline{\Omega}_W$是一非相对紧集，则存在$\alpha\in A$使

$$\Phi(T(Q))(\alpha)<\Phi(Q)(\alpha)$$

因 $H([0,1]\times Q)\subseteq T(Q)+\overline{\mathrm{co}}(\lambda B(x)\cup\{\theta\})$和$\Phi(\lambda B(Q)\cup\{\theta\})(\alpha)=\lambda\Phi(B(Q))(\alpha)=0$，所以有

$$\begin{aligned}\Phi(H([0,1]\times Q))(\alpha)&\leqslant\Phi(T(Q))(\alpha)+\Phi(\overline{\mathrm{co}}(\lambda B(Q)\cup\{\theta\}))(\alpha)\\&\leqslant\Phi(T(Q))(\alpha)<\Phi(Q)(\alpha)\end{aligned}$$

由引理1知H是终归紧映象，再由定理1(P_4)推得

$$i_W(T+\lambda B,\Omega)=i_W(T,\Omega)\neq0$$

由定理1(P_1)知对每一$\lambda>0$存在$x_\lambda\in\Omega_W$使得$x_\lambda\in T(x_\lambda)+\lambda B(x_\lambda)$.由条件(i)有$\inf\limits_{\lambda>0}\ \inf\limits_{y\in B(x_\lambda)}p_\alpha(y)>0$由此推得$(I-T)(\overline{\Omega}_W)$是一$p_\alpha$-无界集，这与条件(i)矛盾。故$i_W(T,\Omega)=0$。

引理 3　设P是可距离化Hausdorff局部凸空间X内一锥，Ω是X内的有界开集，假设T：$\overline{\Omega}_P\to CK(P)$是$\Phi$凝聚映象和$B$：$\partial(\Omega_P)\to CK(P)$是集值紧映使得

（i）　设$|\cdot|$是X上的一拟范数，由$|\cdot|$诱导的距离$d(x,y)=|x-y|$在X上生成X上的拓扑（见[5]1.6.1）使得

$$\inf_{x\in\partial(\Omega_P)}\ \inf_{y\in B(x)}|y|>0$$

(ii)　$x\notin T(x)+tB(x)$，$\forall\ x\in\partial(\Omega_P)$，$t\geqslant0$。

则　$i_P(T,\Omega)=0$

证明　因为$\partial(\Omega_P)=P\cap\partial\Omega$是空间$X$内的有界闭集，根据[6]的定理2.1可将$B$延拓成映$\overline{\Omega}_P$到$CK(P)$的集值紧映象（仍记为$B$）且有

$$B(\overline{\Omega}_P)\subseteq\overline{\mathrm{co}}B(\partial(\Omega_P))\tag{3.2}$$

注意到$B(\partial(\Omega_P))$是相对紧集，条件(i)蕴含$0\notin\overline{B(\partial(\Omega_P))}$.由此易证

$$\inf_{z\in\overline{\mathrm{co}}B(\partial(\Omega_P))}|z|>0\tag{3.3}$$

由(3.2)和(3.3)知

$$\inf_{x\in\overline{\Omega}_P}\ \inf_{y\in B(x)}|y|>0$$

又注意到$\overline{\Omega}_P$为有界闭集易证$T(\overline{\Omega}_P)$也为一有界集，因此$(I-T)(\overline{\Omega}_P)$是一有界集，于是由引理2知本引理成立。

注3 引理3是[7]中引理1的改进和推广.

引理 4 设P是可距离化Hausdorff局部凸空间X内一锥，Ω是X内的有界开集，假设T：$\overline{\Omega}_P\to CK(P)$是集值紧映象使得

(i)′ $\inf\limits_{x\in\partial(\Omega_P)}\ \inf\limits_{y\in T(x)}|y|>0$

其中$|\cdot|$是产生X上拓扑的拟范数。

(ii)′ $\mu x\in T(x)$，$x\in\partial(\Omega_P)\Rightarrow\mu\notin(0,1]$

则 $i_P(T,\Omega)=0$。

证明 将引理3中的B取作T，我们证明引理3的条件成立。因T是集值紧映象，当然是Φ-凝聚的，故仅需检证条件(ii)′⇒条件(ii)。若(ii)不成立，则存在$x_0\in\partial(\Omega_P)$及$t_0\geqslant 0$使得

$$x_0\in(1+t_0)T(x_0)$$

从而有$0<\frac{1}{1+t_0}\leqslant 1$和$\frac{1}{1+t_0}x_0\in T(x_0)$。这与条件(ii)′矛盾，于是由引理3知$i_P(T,\Omega)=0$。

注4 引理4是[7]中引理2的改进和推广.

定理 3 设Ω_1，Ω_2是Hausdorff局部凸空间X内二有界开集，$\theta\in\Omega_1\subset\overline{\Omega}_1\subset\Omega_2$，$T:\overline{\Omega}_{2,W}\to CK(W)$是$\Phi$-凝聚映象，如果满足下列条件之一。

$$(\mathrm{H}_1)\begin{cases}\text{对每一}\alpha\in A,\ \text{集}(I\text{-}T)(\overline{\Omega}_{2,W})p_\alpha\text{-有界和存在集值紧映象}B:\ \overline{\Omega}_{2,W}\to CK(W)\text{使得}\\ \inf\limits_{x\in\overline{\Omega}_{2,W}}\ \inf\limits_{y\in B(x)}p_\alpha(y)>0\ \text{和}\ x\notin T(x)+tB(x),\ \forall\, x\in\partial(\Omega_{2,W}),\ t>0;\\ \lambda x\notin T(x),\ \forall x\in\partial(\Omega_{1,W}),\ \lambda>1\end{cases}$$

$$(\mathrm{H}_2)\begin{cases}\text{对每一}\alpha\in A,\ \text{集}(I\text{-}T)(\overline{\Omega}_{1,W})p_\alpha\text{-有界和存在集值紧映象}B:\ \overline{\Omega}_{1,W}\to CK(W)\text{使得}\\ \inf\limits_{x\in\overline{\Omega}_{1,W}}\ \inf\limits_{y\in B(x)}p_\alpha(y)>0\ \text{和}\ x\notin T(x)+tB(x),\ \forall x\in\partial(\Omega_{1,W}),\ t>0;\\ \lambda x\notin T(x),\forall x\in\partial(\Omega_{2,W}),\ \lambda>1\end{cases}$$

则T在$\overline{\Omega}_{2,W}\backslash\Omega_{1,W}$内有一不动点。

证明 无妨设条件(H_1)成立（对条件(H_2)成立时，可类似得证），设T在$\partial(\Omega_{2,W})\cup\partial(\Omega_{1,W})$上没有不动点（否则定理成立）。由定理2和引理2有

$$i_W(T,\Omega_1)=1\quad\text{和}\quad i_W(T,\Omega_2)=0$$

又因$x\notin T(x)$，$\forall\, x\in W\cap[\overline{\Omega}_2\backslash((\Omega_2\backslash\overline{\Omega}_1)\cup\Omega_1]=\partial(\Omega_{2,W})\cup\partial(\Omega_{1,W})$，因此由定理1 (P_3)有

$$i_W(T,\Omega_2)=i_W(T,\Omega_2\backslash\overline{\Omega}_1)+i_W(T,\Omega_1)$$

由此推得$i_W(T,\Omega_2\backslash\overline{\Omega}_1)=-1$。再由定理1$(\mathrm{P}_1)$知$T$在$W\cap(\Omega_2\backslash\overline{\Omega}_1)$内有一不动点，定理证毕。

系 1 设Ω_1，Ω_2是Hausdorff局部凸空间X内二有界开集，$\theta\in\Omega_1\subset\overline{\Omega}_1\subset\Omega_2$，$T$：$\overline{\Omega}_{2,W}\to CK(W)$是$\Phi$-凝聚映象，如果满足下列条件之一：

$$(\mathrm{H}_1)'\begin{cases}\text{对每一}\alpha\in A,\ (I-T)(\overline{\Omega}_{2,W})p_\alpha\text{-有界和存在}h\in W,\ p_\alpha(h)\neq 0\text{使得}\\ x\notin T(x)+th,\ \forall x\in\partial(\Omega_{2,W}),\ t>0;\ \lambda x\notin T(x),\ \forall x\in\partial(\Omega_{1,W}),\ \lambda>1,\end{cases}$$

$$(\mathrm{H}_2)'\begin{cases}\text{对每一}\alpha\in A,\ (I-T)(\overline{\Omega}_{1,W})p_\alpha\text{-有界和存在}h\in W,\ p_\alpha(h)\neq 0\text{使得}\\ x\notin T(x)+th,\ \forall x\in\partial(\Omega_{1,W}),\ t>0;\ \lambda x\notin T(x),\ \forall x\in\partial(\Omega_{2,W}),\ \lambda>1.\end{cases}$$

则T在$\overline{\Omega}_{2,W}\backslash\Omega_{1,W}$内有一不动点.

证明 在定理 3 中令$B(x)\equiv\{h\}$, $\forall x\in\overline{\Omega}_{2,W}$, 由定理 3 知本系成立.

注 5 系 1 是[1]中定理 3 的改进和推广.

定理 4 设 P 是可距离化 Hausdorff 局部凸空间X内一锥, Ω_1, Ω_2是X内二有界开集, $\theta\in\Omega_1\subset\overline{\Omega}_1\subset\Omega_2$, T: $\overline{\Omega}_{2,P}\to CK(P)$是$\Phi$-凝聚映象.如果下列条件之一成立:

$$(\mathrm{H}_3)\begin{cases}\text{存在集值紧映象}B:\ \partial(\Omega_{1,P})\to CK(P)\text{使得}\\ \inf\limits_{x\in\partial(\Omega_{1,P})}\inf\limits_{y\in B(x)}|y|>0,\ x\notin T(x)+tB(x),\ \forall x\in\partial(\Omega_{1,P}),\ t>0;\\ \lambda x\notin T(x),\ \forall x\in\partial(\Omega_{2,P}),\ \lambda>1.\end{cases}$$

$$(\mathrm{H}_4)\begin{cases}\text{存在集值紧映象}B:\ \partial(\Omega_{2,P})\to CK(P)\text{使得}\\ \inf\limits_{x\in\partial(\Omega_{2,P})}\inf\limits_{y\in B(x)}|y|>0,\ x\notin T(x)+tB(x),\ \forall x\in\partial(\Omega_{2,P}),\ t>0;\\ \lambda x\notin T(x),\ \forall x\in\partial(\Omega_{1,P}),\ \lambda>1.\end{cases}$$

则T在$(\overline{\Omega}_2\backslash\Omega_1)_P$内有一不动点.

证明与定理3的证明类似, 只需注在引用引理2的地方换为引用引理3.

定理 5 设P,X,Ω_1,Ω_2同定理4,T: $P\cap(\overline{\Omega}_2\backslash\Omega_1)\to CK(P)$是集值紧映象, 如果下列条件之一成立:

$$(\mathrm{H}_5)\begin{cases}\inf\limits_{x\in\partial(\Omega_{1,P})}\inf\limits_{y\in T(x)}|y|>0,\ \mu x\in T(x),\ x\in\partial(\Omega_{1,P})\Rightarrow\mu\geqslant 1;\\ \mu x\in T(x),\ x\in\partial(\Omega_{2,P})\Rightarrow\mu\leqslant 1.\end{cases}$$

$$(\mathrm{H}_6)\begin{cases}\inf\limits_{x\in\partial(\Omega_{2,P})}\inf\limits_{y\in T(x)}|y|>0,\ \mu x\in T(x),\ x\in\partial(\Omega_{2,P})\Rightarrow\mu\geqslant 1;\\ \mu x\in T(x),\ x\in\partial(\Omega_{1,P})\Rightarrow\mu\leqslant 1.\end{cases}$$

则T在$(\overline{\Omega}_2\backslash\Omega_1)\cap P$内有一不动点.

证明 无妨设条件(H_5)成立 ((H_6)成立时证明类似),设T在$\partial(\Omega_{1,P})\cup\partial(\Omega_{2,P})$上没有不动点 (否则定理成立), 由[6]的定理2.1可将 B 延拓成集值紧映象 (仍记为B) B: $\overline{\Omega}_{2,P}\to CK(P)$.由$(\mathrm{H}_5)$中第一个条件和引理4 .有$i_P(T,\Omega_1)=0$.容易验证$(\mathrm{H}_5)$中的第二条件蕴含具有$W=P$的(3.1)式, 由具有$W=P$, $\Omega=\Omega_2$的定理2有$i_P(T,\Omega_2)=1$.余下证明与定理3的证明类似.

注 6 定理5是[7]中定理1推广到可距离化 Hausdorff 局部凸空间内的集值紧映象时的情形, 因此定理 5 更是[1]中系3.3和[8]中定理1.2和1.3的改进和推广.

现在设B: $P\to CK(P)$是集值紧映象、令$P_B=\{x\in P\mid\exists\lambda>0,\ y\in B(x)\text{使}x-\lambda y\in P\}$,特别

当$B(x)\equiv\{h\}$, $h\in P$, $|h|\neq 0$时，记$P_h=\{x\in P\mid \exists\lambda>0$使得$x-\lambda h\in P\}$.

定理 6 设Ω_1,Ω_2是Hausdorff局部凸空间X内二有界开集. $\theta\in\Omega_1\subset\overline{\Omega}_1\subset\Omega_2$. T: $\overline{\Omega}_{2,P}\to CK(P)$是$\Phi$-凝聚映象，如果下列条件之一成立：

$$(\mathrm{H}_7)\begin{cases}\text{对每一}\alpha\in A,\ (I-T)(\overline{\Omega}_{2,P})\text{是}p_\alpha\text{-有界集},\\ \inf\limits_{x\in\Omega_{2,P}}\inf\limits_{y\in B(x)}p_\alpha(x)>0\text{和}y\not\leqslant x,\ \forall x\in P_B\cap\partial\Omega_2,\ y\in T(x);\\ y\not\geqslant(1+\varepsilon)x,\ \forall x\in P\cap\partial\Omega_1,\ y\in T(x)\text{和}\varepsilon>0.\end{cases}$$

$$(\mathrm{H}_8)\begin{cases}\text{对每一}\alpha\in A,\ (I-T)(\overline{\Omega}_{1,P})\text{是}p_\alpha\text{-有界集},\\ \inf\limits_{x\in\overline{\Omega}_{1,P}}\inf\limits_{y\in B(x)}p_\alpha(y)>0\text{和}y\not\leqslant x,\ \forall x\in P_B\cap\partial\Omega_1,\ y\in T(x);\\ y\not\geqslant(1+\varepsilon)x,\ \forall x\in P\cap\partial\Omega_2,\ y\in T(x)\text{和}\varepsilon>0.\end{cases}$$

则T在$P\cap(\overline{\Omega}_2\backslash\Omega_1)$内有一不动点.

证明 无妨设条件(H_7)成立（(H_8)成立时证明类似）.我们证明条件(H_7)蕴含具有$W=P$的定理3的条件(H_1)，若条件$x\notin T(x)+tB(x)$, $\forall x\in\partial(\Omega_{2,P})$, $t>0$不真，则存在$x_0\in\partial(\Omega_{2,P})$, $t_0>0$, $y_0\in T(x_0)$和$z_0\in B(x_0)$使得$x_0=y_0+t_0z_0$于是有

$$x_0-t\,z_0=y_0\in T(x_0)\subseteq P$$

因此$x_0\in P_B\cap\partial\Omega_2$.又因$x_0-y_0=t_0z_0\in t_0B(x_0)\subseteq P$.故得$y_0\leqslant x_0$这与条件$(\mathrm{H}_7)$矛盾，现在若条件$\lambda x\notin T(x)$, $\forall x\in\partial(\Omega_{1,P})$, $\lambda>1$不真，则存在$x_0\in\partial(\Omega_{1,P})$, $\lambda_0>1$和$y_0\in T(x_0)$使得$\lambda_0x_0=y_0$.令$0<\varepsilon_0<\lambda_0-1$，则有$1+\varepsilon_0<\lambda_0$，由此推得$y_0\geqslant(1+\varepsilon_0)x_0$，这又与条件$(\mathrm{H}_7)$矛盾，因此由具有$W=P$的定理3.知本定理结论成立.

注 7 定理 6 可视为[1]中系3.1的改进和推广.

定理 7 设P,Ω_1,Ω_2, X如同在定理4内一样，$T:\overline{\Omega}_{2,P}\to CK(P)$是$\Phi$-凝聚映象，如果下列条件之一成立：

$$(\mathrm{H}_9)\begin{cases}\inf\limits_{x\in\partial(\Omega_{1,P})}\inf\limits_{y\in B(x)}|y|>0,\ y\not\leqslant x,\ \forall x\in P_B\cap\partial\Omega_1,\ y\in T(x);\\ y\not\geqslant(1+\varepsilon)x,\ \forall x\in P\cap\partial\Omega_2,\ y\in T(x)\text{和}\varepsilon>0,\end{cases}$$

$$(\mathrm{H}_{10})\begin{cases}\inf\limits_{x\in\partial(\Omega_{2,P})}\inf\limits_{y\in B(x)}|y|>0,\ y\not\leqslant x,\ \forall x\in P_B\cap\partial\Omega_2,\ y\in T(x);\\ y\not\geqslant(1+\varepsilon)x,\ \forall x\in P\cap\partial\Omega_1,\ y\in T(x)\text{和}\varepsilon>0.\end{cases}$$

则T在$P\cap(\overline{\Omega}_2\backslash\Omega_1)$内有一不动点.

证明 仿定理 6 的证明，易证$(\mathrm{H}_9)\Rightarrow(\mathrm{H}_3)$和$(\mathrm{H}_{10})\Rightarrow(\mathrm{H}_4)$.由定理4知本定理成立.

注 8 定理 7 是[7]中定理2的改进和推广.

系 2 设P,Ω_1, Ω_2, X如同在定理4内一样，$T:\overline{\Omega}_{2,P}\to CK(P)$是$\Phi$-凝聚映象，如果下列条件之一成立：

$$(\mathrm{H}_9)'\begin{cases}y\not\leqslant x,\ \forall x\in P_h\cap\partial\Omega_1,\ y\in T(x),\\ y\not\geqslant(1+\varepsilon)x,\ \forall x\in P\cap\partial\Omega_2,\ y\in T(x)\text{和}\varepsilon>0,\end{cases}$$

$$(\mathrm{H}_{10})'\begin{cases} y\not\leqslant x, & \forall x\in P_h\cap\partial\Omega_2,\ y\in T(x) \\ y\not\geqslant(1+\varepsilon)x, & \forall x\in P\cap\partial\Omega_1,\ y\in T(x)\text{和}\varepsilon>0 \end{cases}$$

则T在$P\cap(\overline{\Omega}_2\backslash\Omega_1)$内有一不动点。

证明 在定理7中取$B(x)=\{h\}$，$\forall x\in P$，其中$h\in P$，$|h|\neq 0$，由定理7知本系成立。

注 9 系 2 是[7]中定理2的系和[9]中定理2的改进和推广：

参 考 文 献

[1] Fizpatrick, P. M. and W. V. Petryshyn, Fixed point theorems and the fixed point index for multivalued mappings in Cones, *J. London Math. Soc.*, 12 (1975),75—85.

[2] Petryshyn, W. V. and P. M. Fizpatrick, A degree theory, fixed point theorems and mapping theorem for multivalued noncompact mappings, *Trans Amer. Math. Soc.*, 194 (1974), 1—25.

[3] Duc, D. M., D. D. Thanh and D. D. Ang, Relative topological degree of set-valued compact vector fields and its applications, *J. Math. Anal. Appl.*, 80 (1981), 406—432.

[4] Sadovskii, B. N., Measures of noncompactness and condensing operators, *Prob. Mat. Anal. Slož System*, 2 (1968), 89—119.

[5] Schaefer, H. H., *Topological Vector Spaces*, Springer-Verlag, New York, Fourth Corrected Printing (1980).

[6] Ma, T. W., Topological degrees for set-valued compact vector fields in locally convex spaces, *Dissertationes Math.*, 92 (1972),1—43.

[7] 郭大钧，关于锥映象的几个不动点定理，科学通报，28，20 (1983)，1217—1219.

[8] Gatica, J. A. and H. L. Smith, Fixed point techniques in cone with applications, *J. Math. Anal. Appl.*, 61 (1977), 58—71.

[9] Leggett, R. W. and L. A. Williams, A fixed point theorem with application to an infections disease model, *J. Math. Anal. Appl.*, 76 (1980),91—97.

Fixed Point Index of Ultimately Compact Set-Valued Mappinps in Hausdorff Locally Convex Spaces and Its Applications

Ding Xie-ping

(*Sichuan Normal University, Chengdu*)

Abstract

The author defines a concept of fixed point index of ultimately compact set-valued mappings in Hausdorff locally convex spaces. Using this concept, the author establishes several nonzero fixed point theorems of set-valued Φ-condensing mappings. These theorems extend some known results in [1,2,7,8,9].