

文章编号: 1000-0887(2004)09-0910-07

大挠度圆柱壳在温度场中的 热弹耦合振动分析*

树学锋¹, 兰姣霞¹, 武勇忠²

(1. 太原理工大学 应用力学研究所, 太原 030024;
2. 中国兵器系统总体部, 北京 8955 信箱, 北京 100089)

(我刊原编委杨桂通推荐)

摘要: 对温度场与应力场耦合时的圆柱壳的非线性热弹耦合的振动问题, 推导得到了基本的振动方程, 热传导方程和协调方程, 对短圆柱壳运用伽辽金(Galerkin)法求解, 得出振幅随时间变化的数值解, 得到一些有价值的结论。即随着温度幅值和耦合系数的增大, 振动衰减的速度变缓, 热弹耦合效应减弱。随着长径比、长厚比的增大, 振幅衰减的速度变快, 同时热振动频率也随之增大, 即热弹耦合效应增强。耦合系数越大, 轴向应力、轴向力以及轴向弯矩越小。

关键词: 圆柱壳; 热弹耦合振动; 伽辽金法
中图分类号: O322 **文献标识码:** A

引 言

热弹耦合振动是研究当温度场与应变场耦合时弹性体的振动问题。但是由于研究的难度较大, 一般研究只局限于小挠度线性范围, 采用将耦合项线性化的方法简化求解^[1~3]。这种方法虽然减小了求解难度, 但在较高工作温度下, 这种线性化的方法必然会导致较大的理论误差^[4~6]。随着温度冲击幅度的增加, 线性耦合理论与非线性耦合理论的差别将达到不可忽略的程度^[7,8]。因此, 非线性热弹耦合理论就成为一重要的研究课题。

本文利用温度场和应变场耦合时圆柱壳的非线性热弹耦合振动的热振动方程和能量方程^[9], 对圆柱壳在热弹耦合温度场中的自由振动进行了分析。

1 基本理论与方程

本文的研究基于以下基本假定:

- 1) 不计平面内转动惯量和横向剪切变形的影响。
- 2) 壳体非常薄, 因此由壳中面的横向位移代替壳体内的横向位移。
- 3) 温度沿壳体厚度方向呈线性分布, 而沿长度方向不变。

* 收稿日期: 2002_10_25; 修订日期: 2004_05_11

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10372067); 山西省自然科学基金资助项目(20021004)

作者简介: 树学锋(1964—), 男, 江苏建湖人, 教授, 工学博士, 研究方向为弹塑性力学和非线性动力学(联系人, Tel: + 86_351_6010560; Fax: + 86_351_6041237; E_mail: shuxf@tyut.edu.cn)。

4) 壳体为各向同性、线性弹性材料,且不随温度的变化而变化。

5) 温度场与应变场耦合。

如图 1 建立以 x, θ, z 为坐标的圆柱坐标系, 则 u, v, w 分别为壳体中面上的轴向、切向和法向位移。

轴对称大挠度几何方程:

$$\begin{cases} \epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, \\ \epsilon_\theta = \frac{w}{R}, \\ \epsilon_{\theta 0} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{z}{R} \frac{\partial v}{\partial x}. \end{cases}$$

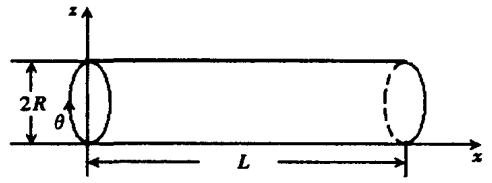


图 1 圆柱壳的几何形状及坐标系

物理方程(考虑温度效应):

$$\begin{cases} \alpha_x = \frac{E}{1-\nu^2} [(\epsilon_x + \mu \epsilon_\theta) - (1+\nu) \alpha T], \\ \alpha_\theta = \frac{E}{1-\nu^2} [(\epsilon_\theta + \mu \epsilon_x) - (1+\nu) \alpha T], \\ \tau_{x\theta} = G \epsilon_{\theta 0}. \end{cases}$$

薄膜力:

$$\begin{aligned} N_x &= \int_{-h/2}^{h/2} \alpha_x dz = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{\nu}{R} w \right] - \frac{E\alpha h}{1-\nu} N_T, \\ N_\theta &= \int_{-h/2}^{h/2} \alpha_\theta dz = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[\nu \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\nu}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{w}{R} \right] - \frac{E\alpha h}{1-\nu} N_T. \end{aligned}$$

弯曲力:

$$\begin{aligned} M_x &= \int_{-h/2}^{h/2} \alpha_{xz} dz = -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (1+\nu) \alpha M_T \right], \\ M_\theta &= \int_{-h/2}^{h/2} \alpha_{\theta z} dz = -D \left[\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (1+\nu) \alpha M_T \right], \end{aligned}$$

其中: $D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$, $N_T = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} T dz$ 为热中面力, $M_T = \frac{12}{h^3} \int_{-h/2}^{h/2} Tz dz$ 为热中面弯矩。

横向热振动方程

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} = \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} - \frac{N_\theta}{R} = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} - Q_x + \frac{\partial}{\partial x} (N_x w) = - \frac{\rho h^3}{12} \frac{\partial^3 w}{\partial t^3}. \tag{3}$$

将(1)、(3)式代入(2)式整理得:

$$\begin{aligned} D \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + D(1+\mu) \alpha \frac{\partial^2 M_T}{\partial x^2} + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{Eh}{R^2} w - \frac{\rho h^3}{12} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} - \frac{E\alpha h}{R} N_T - \\ \frac{Eh}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\nu}{R} \right) \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{\nu}{R} w - (1+\nu) \alpha N_T + \right. \\ \left. \int_0^x \left[(1+\nu) \alpha \frac{\partial N_T}{\partial x} - \frac{\nu}{R} \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] dx \right\} = 0 \end{aligned} \tag{4}$$

热传导方程:

当温度场与应变场耦合时, 温度-应变关系由下面热传导方程确定:

$$\kappa T_{,ii} = (3\lambda + 2\mu) \alpha T_a \frac{\partial \epsilon_{kk}}{\partial t} + \rho C \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (5)$$

其中: κ 为导热系数, T_a 为参考温度, α 为线热胀系数, C 为单位质量的常应变比热, E 为弹性模量, ρ 为壳体材料的密度, λ, μ 为拉梅系数.

将 $\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$, $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$ 代入上式并记 $\kappa_l = \frac{\kappa}{\rho C}$, $\mu_l = \frac{E\alpha T_a}{\kappa(1-2\nu)}$ 则可得热传导方程为:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial T}{\partial z} + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{1}{\kappa_l} \frac{\partial T}{\partial t} - \mu_l \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{w}{R} + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] = 0. \quad (6)$$

由于本文研究薄壳体的振动, 我们假设轴对称的温度场分布, 且沿壳体的厚度方向呈线性分布. 即:

$$T(x, z, t) = \frac{[(T)_{-h/2} + (T)_{h/2}]}{2} + \frac{[(T)_{h/2} - (T)_{-h/2}]}{h} z.$$

引入壳体的热边界条件:

$$- \kappa \frac{\partial T}{\partial n} = \xi (T - T_A) \quad (0 < T < \infty).$$

设 $(T)_{h/2}, (T)_{-h/2}$ 分别表示壳体外、内表面的温度, h_i, h_o 分别表示壳体内、外表面的换热系数, T_A 表示周围介质的温度, ξ 称为壳体的对流换热系数, 且假设壳体的周边为恒温, 即 $T_A = 0$ (T_A 表示绝对温度与参考温度的温差). 则有:

$$\kappa \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=h/2} = - h_o (T)_{h/2}, \quad \kappa \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=-h/2} = h_i (T)_{h/2}.$$

将(6)式两端关于 z 沿壳体的厚度方向积分并将边界条件代入可得:

$$\begin{aligned} \kappa h \frac{\partial^2 N_T}{\partial x^2} - (h_i + h_o) N_T + \frac{h}{2} \left[(h_i - h_o) + \frac{2\kappa}{R} \right] M_T - \\ \rho C h \frac{\partial N_T}{\partial t} - \mu_l \kappa h \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{w}{R} + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

将(6)式两端乘以 z 再对 z 沿壳体的厚度方向积分并将边界条件代入可得:

$$\begin{aligned} \kappa h \frac{\partial^2 M_T}{\partial x^2} + \frac{6}{h} (h_i - h_o) N_T - \left[3(h_i + h_o) + \frac{12\kappa}{h} \right] M_T - \\ \rho C h \frac{\partial^2 M_T}{\partial t^2} + \kappa \mu_l h \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

至此已经得到了关于壳体横向振动的基本方程组, 此方程组是关于 u, w, N_T 和 M_T 的偏微分方程组. 当壳体在轴向可以自由移动时或者所讨论的壳体为长壳时, 轴向位移可以忽略, 则控制微分方程变为 w, N_T, M_T 三个独立变量的微分方程组; 而另一方面, 当壳体在轴向方向的位移被阻止时, 则轴向位移 u 和侧向位移 w 认为是同一量级的, 因此在微分方程组中应当予以保留, 则此时的微分方程组是关于 u, w, N_T 和 M_T 的微分方程组. 为了不失一般性, 在本文中我们求解关于 w, N_T, M_T 的方程组.

为了求解方便, 引入无量纲参数, 将(4)、(7)、(8)三式进行无量纲化得:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 w}{\partial X^4} + \frac{\partial^2 M_T}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \Omega^2} + 12(1-\nu^2) d^2 b^2 w - \frac{1}{12d^2} \frac{\partial^4 w}{\partial X^2 \partial \Omega^2} 12(1-\nu^2) b d N_T - \\ 12 \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial X^2} - \nu d \right\} \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial X} \right)^2 + \nu b d w - (1+\nu) N_T + \right. \end{aligned}$$

$$\int_0^1 \left[(1 + \nu) \frac{\partial N_T}{\partial X} - \frac{\partial w}{\partial X} \frac{\partial^2 w}{\partial X^2} - \nu b d \frac{\partial w}{\partial X} \right] dX \Bigg\} = 0, \tag{9}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 N_T}{\partial X^2} - 2d^2(M_i + M_o)N_T + \left[(M_i - M_o) \frac{d^2}{1 + \nu} + \frac{bd}{1 + \nu} \right] M_T - \tau d^2 \frac{\partial N_T}{\partial \Omega} - \\ & \frac{\tau d^2}{1 + \nu} \frac{\partial}{\partial \Omega} \left\{ \left(\frac{\partial w}{\partial X} \right)^2 + \nu b d w + \int_0^1 \left[(1 + \nu) \frac{\partial N_T}{\partial X} - \frac{\partial w}{\partial X} \frac{\partial^2 w}{\partial X^2} - \nu b d \frac{\partial w}{\partial X} \right] dX \right\} = 0, \end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 M_T}{\partial X^2} + 12(1 + \nu) d^2 (M_i - M_o) N_T - [6(M_i + M_o) d^2 + 12d^2] - \\ & \tau d^2 \frac{\partial M_T}{\partial \Omega} + \tau d^2 \frac{\partial}{\partial \Omega} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial X^2} \right) = 0, \end{aligned} \tag{11}$$

其中无量纲参数如下:

$$\begin{aligned} X &= x/L, \quad w = w/h, \quad M_T = L^2(1 + \mu) \alpha M_T/h, \quad N_T = L^2 \alpha N_T/h^2, \\ M_i &= h_i h/2 \kappa, \quad M_o = h_o h/2 \kappa, \quad \tau = \tau_0 \omega_0, \quad \tau_0 = \rho C h^2/\kappa, \quad \Omega = \omega_0 t, \\ \omega_0 &= \sqrt{D/\rho h L^4}, \quad \kappa_l = \kappa/\rho C, \quad d = L/h, \quad b = L/R, \\ \beta &= E(1 + \mu) \alpha^2 T \alpha / (1 - 2\mu) \rho C, \quad \mu_T = \alpha E T \alpha / \kappa (1 - 2\mu), \\ \delta &= \beta / (1 - \nu), \quad \alpha_x = \alpha_x (1 - \nu^2) / E, \quad N_X = N_x (1 - \nu^2) / E h, \\ M_X &= 12 M_x (1 - \nu^2) / E h^2. \end{aligned}$$

2 两端简支圆柱壳在耦合振动分析

位移边界条件:

$$w|_{X=0} = 0, \quad w|_{X=1} = 0$$

力边界条件:

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial X^2} + M_T \right) \Big|_{X=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 w}{\partial X^2} + M_T \right) \Big|_{X=1} = 0$$

利用分离变量法设

$$\begin{cases} w(X, \Omega) = w_m A(\Omega) W(X), \\ M_T(X, \Omega) = w_m B(\Omega) W(X), \\ N_T(X, \Omega) = w_m C(\Omega) W(X), \end{cases} \tag{12}$$

其中 $w_m = w(x, 0)/h$, $w(x, 0)$ 为壳体的初始挠度。

位移模式

$$W(X) = \sin \pi X \tag{13}$$

设壳体有初始位移, 无初始速度。即:

$$A(0) = 1, \quad \dot{A}(0) = 0 \tag{14}$$

设初始温度沿壳体的厚度方向呈线性分布:

$$T|_{t=0} = \Theta w_m W(X) \left[1 + \frac{z}{h} \right],$$

其中 Θ 为壳体的初始温度分布的幅值, 可得:

$$B(0) = d^2 \alpha (1 + \mu) \Theta, \quad C(0) = d^2 \alpha \Theta \tag{15}$$

将(12)、(13)式代入(9)、(10)、(11)式并应用 Galerkin 原理, 再加以初始条件(14)、(15)即

可得到如非线性常微分方程组:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dA}{d\Omega} &= F(\Omega), A(0) = 1; \\ \frac{dF}{d\Omega} &= -\frac{12d^2}{12d^2 + \pi^2} [(12b^2d^2 + \pi^2)A - \pi^2B - 12bd(1 + \nu)C - \\ &\quad 32\pi w_m(1 + \nu)AC + 40bd\pi w_m M^2 + 1.5\pi^4 w_m^2 A^3], F(0) = 0; \\ \frac{dB}{d\Omega} &= -\frac{12d^2 + 6d^2(M_i + M_o) + \pi^2}{d^2\tau} B + \frac{12(1 + \nu)(M_i - M_o)}{\tau} C - \\ &\quad \pi^2\delta(1 - \nu)\frac{dA}{d\Omega}, B(0) = d^2\alpha\theta(1 + \nu); \\ \frac{dC}{d\Omega} &= \frac{bd + d^2(M_i - M_o)}{\tau d^2(1 + \nu)} B - \frac{\pi^2 + 2d^2(M_i + M_o)}{\tau d^2} C - \\ &\quad \frac{bd^2\delta(1 - \nu)}{1 + \nu}\frac{dA}{d\Omega} - \frac{8\pi w_m^2\delta(1 - \nu)}{3(1 + \nu)} A \frac{dA}{d\Omega} C(0) = d^2\alpha\theta \end{aligned} \right. \quad (16)$$

3 数值计算及结果讨论

对于(16)式给出的关于两端简支的非线性常微分方程组的初值问题,运用 Runge_Kutta 法编程进行数值求解得到了简支法向位移随时间的变化曲线如图 2 所示。

3.1 物理参数对法向位移的影响

由图 3 可以看出,随着温度幅值 Θ 的增大,振动衰减的速度变缓,振动频率略有增大,热弹耦合效应越弱。由图 4 可以看出,当时间较短时,耦合系数的影响非常小,但是随着时间的推移,它的作用逐渐增大;当耦合系数比较小时(小于 0.01),可以忽略其影响,此时的热弹耦合问题可以简化为非耦合的问题来处理,当耦合系数比较大时,其作用就更为显著。随着耦合系数 δ 的增大,振动衰减的速度变缓,热弹耦合效应变弱。

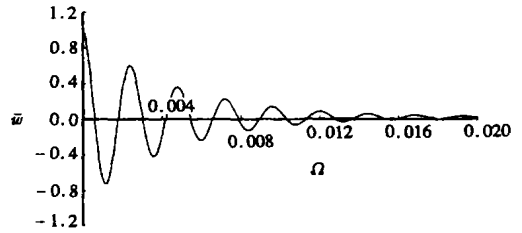


图 2 两端简支时法向位移随时间的变化曲线

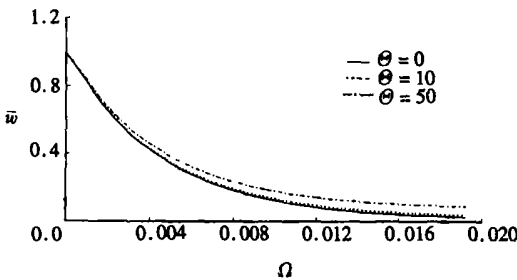


图 3 温度幅值变化位移随时间的变化曲线

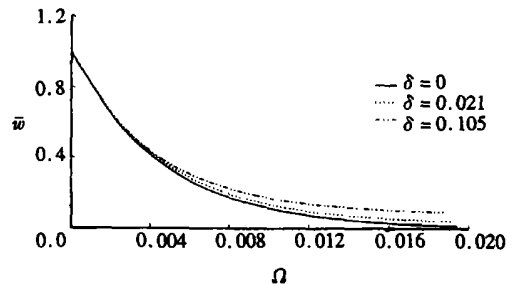


图 4 耦合系统变化位移随时间的变化曲线

3.2 几何参数对法向位移的影响

由图 5、图 6 可以看出,随着长径比、长厚比(即径厚比)的增大,振幅衰减的速度变快,同时热振动频率也随之增大,即热弹耦合效应越大。

3.3 耦合系数对轴向力、轴向应力及轴向弯矩的影响

由图 7、图 8 可以看到,耦合系数越大,轴向应力、轴向力越小,这意味着耦合项就类似于

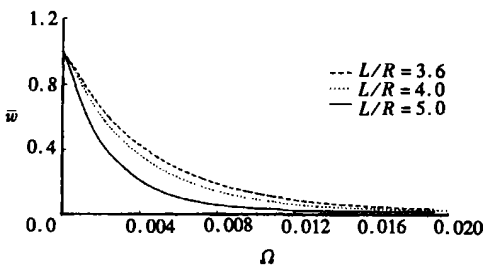


图5 长径比变化时位移随时间的变化曲线

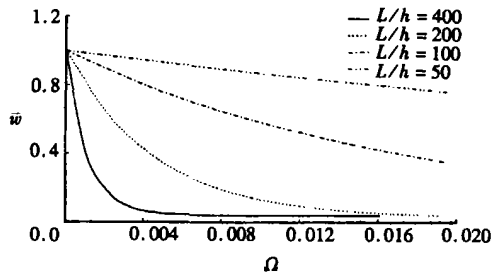


图6 径厚比变化时位移随时间的变化曲线

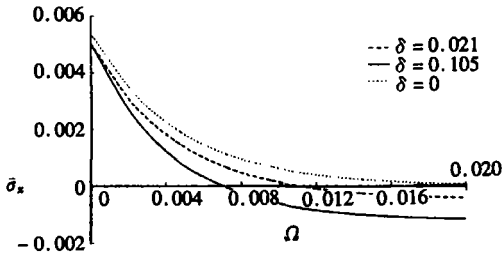


图7 耦合系数变化时轴向应力随时间的变化曲线

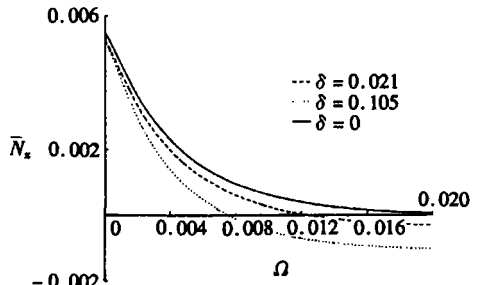


图8 耦合系数变化时轴向力随时间的变化曲线

衰减器,因此它被称为热弹衰减因子。

4 结 论

- 1) 随着温度幅值 Θ 、耦合系数 δ 的增大, 振动衰减的速度变缓, 热弹耦合效应减弱。
- 2) 随着长径比、长厚比(即径厚比)的增大, 振幅衰减的速度变快, 同时热振动频率也随之增大, 即热弹耦合效应变大。
- 3) 耦合系数越大, 轴向应力、轴向力以及轴向弯矩越小。

[参 考 文 献]

- [1] 王洪纲. 热弹性力学概论[M]. 北京: 清华大学出版社, 1998, 1—54.
- [2] 曹志远. 板壳振动理论[M]. 北京: 中国铁道出版社, 1989, 220—245.
- [3] 严宗达, 王洪礼. 热应力[M]. 北京: 高等教育出版社, 1993, 1—36.
- [4] Chang W P, Wan S M. Thermomechanically coupled nonlinear vibration of plates[J]. Internat J Non-Linear Mech, 1986, 21(5): 375—389.
- [5] Chang W P, Jen S C. Nonlinear free vibration of heated orthotropic rectangular plate[J]. Internat J Solids and Structures, 1986, 22(3): 267—281.
- [6] 戴德成, 任勇生. 矩形板的非线性热弹耦合振动[J]. 振动工程学报, 1990, 3(2): 65—72.
- [7] 树学锋, 张晓晴, 张晋香. 周边固支圆板非线性热弹耦合振动分析[J]. 应用数学和力学, 2000, 21(6): 647—654.
- [8] 树学锋, 张晓晴. 简支圆板非线性热弹耦合振动问题的研究[J]. 工程力学, 2000, 17(2): 97—101.
- [9] 兰姣霞, 张晓晴, 树学锋. 轴对称圆柱壳非线性热弹耦合振动的基本方程[J]. 华北工学院学报, 2000, 21(6): 513—516.

Analysis of Thermal_Elastic Coupling Vibration of Large Deflection Cylindrical Shell

SHU Xue_feng¹, LAN Jiao_xia¹, WU Yong_zhong²

(1. Institute of Applied Mechanics, Taiyuan University of Technology,
Taiyuan 030024, P. R. China;

2. China North Industry Group System Engineering Institute,
Beijing Mail Box 8995, Beijing 100089, P. R. China)

Abstract: The governing equation and energy equations for thermal_elastic coupling vibration of cylindrical shell were developed. The Galerkin method was used in numerical process. Some useful result can be concluded from numerical result. With the increase of the amplitude of temperature and coupling coefficient, the speed of vibration decaying becomes slower and the coupling effect becomes weaker. The larger the ration of length to radius and length to thickness, the faster the decaying of the vibration amplitude and the vibration frequency increase. It means the coupling effect gets stronger. The larger the coupling coefficient, the smaller the axial stress, the axial force and the bending moment are.

Key words: cylindrical shell; thermal_elastic coupled vibration; Galerkin method