线性系统稳定性与最优性的关系(Ⅱ)*

陈小林　黄　琳

（北京大学力学系，1985年11月9日收到）

摘　要

我们在[1]中提出并讨论了与R.E.Kalman的最优控制反问题不同的另一类线性最优控制的反问题：任给一渐近稳定的定常线性系统和一个非负二次型性能指标，问是否可以从该稳定系统中分解出一个状态反馈，使得这个状态反馈就是给定指标下的最优控制。本文将上述问题加以推广，对线性离散系统和线性时变系统得出了相应的结论，进而得出[1]中提出的渐近稳定系统和最优系统之间的对应关系是一切线性系统的内在特征。

一、引　言

[1]中对线性定常系统提出并讨论了与R.E.Kalman的最优控制反问题不同的另一类线性最优控制的反问题。该问题表述如下：

(P_1) 给定一渐近稳定定常系统：

$$\dot{x}=\tilde{A}x \tag{1.1}$$

与一个性能指标

$$J=\int_0^\infty(x^TQx+u^Tu)dt,\qquad Q=CC^T \tag{1.2}$$

问能否寻求$\tilde{A}$的一个分解形式$\tilde{A}=A+BK^T$使对应反馈系统：

$$\dot{x}=Ax+Bu,\qquad u=K^Tx \tag{1.3}$$

恰为(1.2)确定的$J=\min$的最优控制系统，且(A,B,C^T)为最小阶系统。这里1° $\tilde{A}$为Hurwitz矩阵，($\lambda(\tilde{A})\subset C_-^\circ$)；2° $\tilde{A}$的循环指数为r；3° $C\in\mathbf{R}_r^{n\times r}$。

我们得出：几乎对任意$Q=CC^T$，$C\in\mathbf{R}_r^{n\times r}$，($P_1$)均有解并给出了分解$\tilde{A}$的算法。

我们在本文中对线性离散系统和线性时变系统讨论了这类最优控制的反问题。

(P_2) 给一渐近稳定离散系统和一个性能指标：

$$x_{k+1}=\tilde{F}x_k \tag{1.4}$$

$$J=\sum_{k=0}^{\infty}(x_k^TQx_k+u_k^Tu_k) \tag{1.5}$$

其中1° $\lambda(\tilde{F})$在复平面上单位圆内；2° $\tilde{F}$的循环指数为r且$\tilde{F}\neq0$；3° $Q=HH^T$，$H\in\mathbf{R}_r^{n\times r}$。

* 朱照宣推荐。

问是否能将 $\tilde{F}$ 分解成 $\tilde{F}=F+GK^T$，使系统 $\tilde{x}_{k+1}=Fx_k+Gu_k$ 在指标 (1.5) 下的最优控制律恰为$u_k=K^Tx_k$，并且分解后的系统(F,G,H^T)是最小阶系统。

(P_3)给定一指数阶线性渐近稳定时变系统和一个性能指标：

$$\dot{x}(t)=\tilde{A}(t)x \tag{1.6}$$

$$J=\int_{t_0}^{\infty}(x^T(t)Q(t)x(t)+u^T(t)R(t)u(t))dt \tag{1.7}$$

其中$\tilde{A}$，Q，R及 R^{-1} 在 $[t_0,\infty)$ 上连续且一致有界，$R(t)>0$，$Q(t)=C(t)C^T(t)\geqslant 0$，$\forall t\in[t_0,\infty)$；(1.6)出发的状态转移矩阵$\phi(t,t_0)$满足$\|\phi(t,t_0)\|\leqslant Me^{-a(t-t_0)}$，$M,a>0$。问是否存在分解式$\tilde{A}(t)=A(t)+B(t)K^T(t)$($A$，$B$，$K$在 (t_0,∞) 上一致有界)，使系统$\dot{x}=A(t)x+\dot{B}(t)u$ 在指标(1.7)下的最优控制为$u(t)=K^T(t)x(t)$。更进一步的要求是$(A(t)，B(t))$完全可控，$(A(t)，C^T(t))$完全可观测。

我们在本文中得出：在一定条件下，上述两个问题有解。因此对一切线性系统，渐近稳定性和最优性之间都有[1]中指出的对应关系。这种关系是线性的内在特征，这对于深入认识线性系统的本质有一定帮助。

二、线性离散系统

我们先考察定常离散系统与定常连续系统之间的差别。对渐近稳定系统来说，$\tilde{A}$ 的特征值均具负实部，因此$\tilde{A}$可逆。而对渐近稳定离散系统而言，$\tilde{F}$ 可以有零特征值，故$\tilde{F}$未必可逆，这相当于连续系统中$\tilde{A}$有$-\infty$特征值。产生这一差别的原因是离散系统并不都是由连续系统采样得到。离散系统的这一特点决定了可控性与可达性的区别。(F,G)的可控子空间为$\mathbf{R}(FG,\cdots,F^{n-1}G)+\mathbf{N}(F^l)$，其中 l 为 F 属于零特征值的根子空间维数，而可达子空间为$\mathbf{R}(F,FG,\cdots,F^{n-1}G)$。

由于离散系统的上述特点，任给反馈矩阵K^T必能象[1]中那样对$\tilde{F}$ 做最优分解。下面的定理说明了保证(P_2)有解K应满足的条件。

定理 1 设给定一渐近稳定系统$x_{k+1}=\tilde{F}x_k$和任意满足$(\tilde{F},H^T)$可观测之$Q=HH^T$。存在$K=(k_1,\cdots,k_r)\in\mathbf{R}^{n\times r}$，$G\in\mathbf{R}^{n\times r}$，使$\tilde{F}=F+GK^T$并且系统$x_{k+1}=Fx_k+Gu_k$在指标(1.5)下的最优控制为$u_k=K^Tx_k$的充要条件为：$k_i\in\mathbf{R}(\tilde{F}^T)(i=1,\cdots,r)$，这里$\mathbf{R}(\tilde{F}^T)=\{y\mid y=\tilde{F}^Tb,b\in\mathbf{R}^n\}$。

证明 “充分性”

由$\tilde{F}$渐近稳定且$(\tilde{F},H^T)$可观测可得，离散Lyapunov方程：

$$P_K=\tilde{F}^TP_K\tilde{F}+KK^T+Q \tag{2.1}$$

有唯一正定解P_K，若$K=(k_1,\cdots,k_r)\in\mathbf{R}^{n\times r}$，$k_i\in\mathbf{R}(\tilde{F}^T)$ $(i=1,\cdots,r)$，则线性方程

$$\tilde{F}^TP_KG=-K \tag{2.2}$$

有解G。因此下面等式成立：

$$(I+G^TP_KG)K^T=-G^TP_K(\tilde{F}-GK^T) \tag{2.3}$$

$$KK^T=-KG^TP_K\tilde{F}=-\tilde{F}^TP_KGK^T \tag{2.4}$$

将(2.4)代入(2.1)得

$$P_K=(\tilde{F}^T-KG^T)P_K(\tilde{F}-GK^T)-K(I+GP_KG)K^T+Q \tag{2.5}$$

令$F=\tilde{F}-GK^T$，根据(2.3)(2.5)两式，离散Riccati方程：

$$P=F^TPF-K(I+G^TPG)K^T+Q \tag{2.6}$$

有正定解$P_K>0$，并且

$$K^T=-(I+G^TP_KG)^{-1}GP_KF$$

因此系统$x_{k+1}=Fx_k+Gu_k$在指标(1.5)下的最优控制律为$u_k=K^Tx_k$[3]。

"必要性"

若$K\in\mathbf{R}^{n\times r}$，$G\in\mathbf{R}^{n\times r}$使$\tilde{F}$分解为$\tilde{F}=F+GK^T$，并且系统$x_{k+1}=Fx_k+Gu_k$在指标(1.5)下的最优控制律为$u_k=K^Tx_k$，则离散Riccati方程(2.6)有正定解$P$，且有

$$(I+G^TPG)K^T=-G^TPF$$

将$\tilde{F}=F+GK^T$代入上式得

$$K^T=-G^TP\tilde{F}$$

因此$K=(k_1,\cdots,k_r)$满足$k_i\in\mathbf{R}(\tilde{F}^T)$。

从定理1的证明可看出若$\tilde{F}$无零特征值，$\tilde{F}$可逆，则(2.2)有唯一解$G=-P_k^{-1}(\tilde{F}^T)^{-1}K$，类似于[1]中方法可得(P$_2$)的解，并且分解后的系统$(F,G,H^T)$是完全可达完全可观测的。

若$\tilde{F}$不可逆，则(F,G)之间可达性需要另做讨论。下面的定理2对一般的$\tilde{F}$给出了(P$_2$)的解。

定理 2 给定一渐近稳定系统$x_{k+1}=\tilde{F}x_k$，$\lambda(\tilde{F})$在复平面上单位圆内，$\tilde{F}\neq 0$，$\tilde{F}$之循环指数为r。则几乎对所有$Q=HH^T$，$H\in\mathbf{R}_r^{n\times r}$，存在$K$，$G\in\mathbf{R}^{n\times r}$，使$\tilde{F}=F+GK^T$，$u_k=K^Tx_k$是系统$x_{k+1}=Fx_k+Gu_k$在指标(1.5)下的最优控制律 并且分解后的系统$(F,G,H^T)$满足$(F,G)$完全可达，$(F,H^T)$完全可观测。

证明 $\forall H\in\mathbf{R}^{n\times r}$，$(F,H^T)$可观测的概率1成立。取$K=(k_1,\cdots,k_r)\in\mathbf{R}^{n\times r}$满足$k_i\in\mathbf{R}(\tilde{F}^T)$ $(i=1,\cdots,r)$，由定理1知(2.2)有解G，令$F=\tilde{F}-GK^T$可得最优分解。我们只需证明可达性与可观测性。

令$PG=G_1$，则(2.2)变为$\tilde{F}^TG_1=-K$，$\forall$给定K，上述方程的解集合$\{G_1\}$为$\mathbf{R}^{n\times r}$中一子流形。反之，$\forall G_1\in\mathbf{R}^{n\times r}$，$K=(k_1,\cdots,k_r)$满足$k_i\in\mathbf{R}(\tilde{F}^T)$，因此当$K$中向量跑遍$\mathbf{R}(\tilde{F}^T)$时，解集合$\{G_1\}$跑遍$\mathbf{R}^{n\times r}$。

考虑映射$\phi(G_1)=P_k^{-1}G_1=G$，类似[1]中引理1可得ϕ在$\mathbf{R}^{n\times r}$原点周围的某个开区域ψ上是C^1同胚。因此K中向量跑遍$\mathbf{R}(\tilde{F}^T)$时，对应(4.3)之解集合$\{G_1\}$跑遍$\mathbf{R}^{n\times r}$原点周围的一个开区域$\mathbf{W}$。

根据[4]中结论可知：对几乎所有$K\in\mathbf{R}(\tilde{F}^T)$，存在(2.2)之解$G$满足$\mathbf{R}(G,\tilde{F}G,\cdots,\tilde{F}^{n-1}G)=\mathbf{R}^n$。再由[1]中引理2，有$K=(k_1,\cdots,k_r)$，$k_i\in\mathbf{R}(\tilde{F}^T)$ $i=(1,\cdots,r)$，使最优分解后的系统(F,G,H^T)是完全可达和完全可观测的。

三、线性变系数系统

众所周知，对变系数连续系统：$\dot{x}=A(t)x+B(t)u$在性能指标(1.7)下的最优控制问题，在$(A(t),B(t))$完全可控($\forall t\geqslant t_0$)条件下可通过Riccati微分方程求解。若再假设：1，$A(t)$，$B(t)$，$Q(t)$，$R(t)$，$R^{-1}(t)$在$t\in[t_0,\infty)$一致有界；2，$(A(t),B(t))$一致完全可控且$(A(t),C^T(t))$一致完全可观测，则闭环系统是指数阶渐近稳定的，并且反馈阵$K^T(t)$在$[t_0,\infty)$上一致有界[5]。这就是我们考虑指数阶渐近稳定时变系统的原因。

下面的定理部分地解决了问题(P$_3$)。

定理 3 假设同(P_3)，再设$t\geqslant t_0$时$(\tilde{A}(t),C^T(t))$一致完全可测。则对任意$[t_0,\infty)$一致有界的连续函数$K(t)$，存在$[t_0,\infty)$上一致有界且连续之$B(t)$，$A(t)$，使$\tilde{A}(t)=A(t)+B(t)K^T(t)$且系统$\dot{x}=A(t)x+B(t)u$，在指标(1.7)下的最优控制律为$u(t)=K^T(t)x(t)$。

证明 考虑下面矩阵微分方程（Lyapunov方程）

$$-\dot{P}=P\tilde{A}(t)+\tilde{A}^T(t)P+Q(t)+K(t)R(t)K^T(t),\quad P(T)=0 \tag{3.1}$$

不难证明(3.1)$\forall t\in\mathbf{R}$有唯一解存在且可表为

$$P(t,\ T)=\int_t^T\phi^T(\tau,t)(Q+KRK^T)\phi(\tau,t)d\tau \tag{3.2}$$

这里$\phi(\tau,t)$为系统(1.6)的状态转移矩阵。

由$\phi(\tau,t)$的指数阶渐近稳定性及K、Q、R的一致有界性，不难看出$P(t,T)$对边界T单调有界（即$P(t,T_1)\geqslant P(t,T_2)$，若$T_1\geqslant T_2$）。因此$\lim\limits_{T\to\infty}P(t,T)$存在，记为$\bar{P}(t)$。在(3.1)式中令$T\to\infty$取极限，由于$\phi(\tau,t)$的指数阶渐近稳定，极限与求导可交换，故$\bar{P}(t)$满足(3.1)且$\lim\limits_{t\to\infty}\bar{P}(t)=0$。

由$(\tilde{A}(t),\ C^T(t))$一致完全可观测可得$\forall t\in\mathbf{R}$，有

$$0<\alpha_1(\sigma)I\leqslant W_c(t,t+\sigma)\leqslant\alpha_2(\sigma)I$$

其中$W_c(t,t+\sigma)=\int_t^{t+\sigma}\phi^T(\tau,t)Q(\tau)\phi(\tau,t)d\tau$，$\alpha_1$，$\alpha_2$只与$\sigma$有关，因此$\bar{P}(t)$，$\bar{P}^{-1}(t)$均为一致有界对称正定的。

令 $B=-\bar{P}^{-1}(t)K(t)R^{-1}(t)$，$A(t)=\tilde{A}(t)-B(t)K^T(t)$

则A，B在$t\in[t_0,\infty)$内一致有界，代入(3.1)得Riccati微分方程：

$$-\dot{P}=PA(t)+A^T(t)P-PB(t)R^{-1}(t)B^T(t)P+Q \tag{3.3}$$

有一致有界对称正定解$\bar{P}(t)$，且$\bar{P}(t)=\lim\limits_{T\to\infty}P(t,\ T)$，$P(t,T)$是(3.3)满足边界条件$P(T)=0$的解，并且$K^T(t)=-R^{-1}(t)B^T(t)\bar{P}(t)$，所以$u(t)=K^T(t)x(t)$是系统$\dot{x}=A(t)x+B(t)u$在指标(1.7)下的最优控制律。

为保证(3.1)的解$\bar{P}(t)$及其逆$\bar{P}^{-1}(t)$为一致有界正定，我们加了$(\tilde{A}(t),\ C^T(t))$一致完全可观测的条件。这样对指标的选择有了极大限制。

参 考 文 献

[1] 陈小林、黄琳，线性系统稳定性与最优性的关系——线性最优控制反问题的另一种提法，应用数学与力学，**6**，2 (1985)。

[2] Kalman, R. E., When is linear control system optimal, *Trans, ASME*, *Ser.D*: *Basic Eng.*, **86** (1964).

[3] Kailath, T., *Linear System*, Prentice-Hall (1980).

[4] 黄琳，《系统与控制理论中的线性代数》，科学出版社，北京 (1984)。

[5] Anderson, B. D. O. and J. B. Moore, *Linear Optimal Control*, Prentice-Hall Press (1970).

The Relationship between the Stability and the Optimality of Linear Systems（Ⅱ）

Chen Xiao-lin Hwang Ling

(Department of Mechanics, Peking University, Beijing)

Abstract

Different from the inverse problem put forward by R. E. Kalman, another kind of inverse problem of linear optimal control is proposed and discussed in [1] as follows: Given an asymptotically stable linear constant system and a nonnegative quadratic performance index, when can a state-feedback be separated from the stable system so that this state-feedback control law is optimal for the given index? In this paper this problem is extended. Similar conclusions are obtained for linear discrete systems and linear time-variable systems. According to these conclusions we can say that the correspondence between the asymptotically stable system and the optimal feedback system is the inherent character of all kinds of linear systems.