

# 在集中力和集中力偶作用下不同弹性材料圆形界面的裂纹问题

刘又文 蒋持平

(中南工业大学) (湖南大学)

(樊大钧推荐, 1985年11月3日收到)

## 提 要

运用推广的 Schwarz 延拓原理结合对复应力函数的奇性主部分分析, 求解一类有集中荷载的平面弹性问题, 十分有效. 文 [1] 用此方法研究了同种材料的弹性问题. 本文把它推广于在集中力和集中力偶作用下不同弹性材料的圆形界面上有多条裂纹的情形, 求出了几种典型情况复应力函数的封闭解, 算出了应力强度因子, 并由此导出一系列特殊解答, 其中两个在文 [1]、[6] 中找到一致结果.

## 一、引 言

关于两相弹性材料的平面裂纹问题, 许多学者作了研究. Cook 等人<sup>[3], [4], [5]</sup>研究了在无穷远处加载下两相弹性材料内部有裂纹的平面问题; Loeber<sup>[6]</sup>采用叠加方法, 获得了在集中力作用下两相弹性材料的直线界面上有一条有限长裂纹的解答; Perlman<sup>[7]</sup>解答了在无穷远处均匀加载下沿不同弹性材料的圆弧裂纹问题. 这些成果均已编入 [7], [8].

本文讨论这样一个问题:

如图 1, 设弹性常数为  $\mu_1, \kappa_1$  的介质 I 占有半径为  $R$  的圆内区域  $S^+$ ; 弹性常数为  $\mu_2, \kappa_2$  的介质 II 占有圆外区域  $S^-$ . 设在两种材料的交界面  $t$  上:

(1) 沿  $L=L_1+L_2+\dots+L_n$  互相连接, 且应力和位移保持连续:

$$\sigma_{1r}^+(t) + i\tau_{1r\theta}^+(t) = \sigma_{2r}^-(t) + i\tau_{2r\theta}^-(t) \quad (t \in L) \quad (1.1)$$

$$u_1^+(t) + iv_1^+(t) = u_2^-(t) + iv_2^-(t) \quad (t \in L) \quad (1.2)$$

(2) 沿  $L'=L'_1+L'_2+\dots+L'_n$  互相裂开, 且无面力作用,  $a_j, b_j$  顺次为裂纹端点.

( $j=1, 2, \dots, n$ )

$$\sigma_{1r}^+(t) + i\tau_{1r\theta}^+ = 0 \quad \sigma_{2r}^-(t) + i\tau_{2r\theta}^- = 0 \quad (t \in L') \quad (1.3)$$

设在圆外 (或圆内) 任意点  $z_0$  作用有集中力  $x+iy$  和集中力偶  $m$ . 设无穷远处应力和迴转为

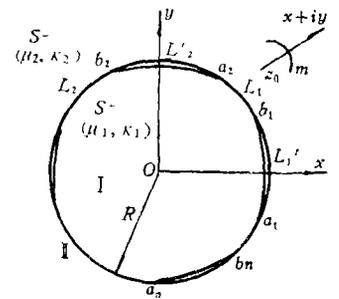


图 1

零。

下标  $k=1, 2$  分别表示对应于介质 I 和介质 II 的量,  $\mu_k$  为剪切模量,  $\nu_k$  为泊松比, 对于平面应变问题,  $\kappa_k=3-4\nu_k$ ; 对于平面应力问题  $\kappa_k=\frac{3-\nu_k}{1+\nu_k}$ .  $\sigma_{kr}, \sigma_{k\theta}, \tau_{kr\theta}$  表示极坐标应力分量,  $u_k, v_k$  是直角坐标位移分量, 它们能分别由两个复应力函数  $\Phi_k(z), \Psi_k(z)$  表达<sup>[2]</sup>:

$$\sigma_{kr} + \sigma_{k\theta} = 2[\Phi_k(z) + \overline{\Phi_k(z)}] \quad (1.4)$$

$$i\tau_{kr} + i\tau_{k\theta} = \Phi_k(z) + \overline{\Phi_k(z)} - \bar{z}\Phi_k'(z) - \frac{\bar{z}}{z}\overline{\Psi_k(z)} \quad (1.5)$$

$$2\mu_k(u_k' + iv_k') = iz\left[\kappa_k\Phi_k(z) - \overline{\Phi_k(z)} + \bar{z}\Phi_k'(z) + \frac{\bar{z}}{z}\overline{\Psi_k(z)}\right] \quad (1.6)$$

此处  $\Phi_k'(z) = \frac{d}{dz}[\Phi_k(z)] \quad u_k' = \frac{\partial u_k}{\partial \theta} \quad v_k' = \frac{\partial v_k}{\partial \theta}$

这样, 问题就化为在上述条件下求解应力函数  $\Phi_k(z), \Psi_k(z)$ .

## 二、一般问题的处理

如图 1 所示, 集中力和集中力偶作用点  $z_0$  在圆外, 圆外区域有<sup>[2]</sup>:

$$\Phi_2(z) = \frac{M_2}{z-z_0} + \Phi_0(z) \quad (2.1)$$

$$\Psi_2(z) = \frac{N_2}{z-z_0} + \frac{\bar{z}_0 M_2 + M_0}{(z-z_0)^2} + \Psi_0(z) \quad (2.2)$$

其中  $M_2 = -\frac{x+iy}{2\pi(1+\kappa_2)}$ ,  $N_2 = \frac{\kappa_2(x-iy)}{2\pi(1+\kappa_2)}$ ,  $M_0 = -\frac{im}{2\pi}$

$\Phi_0(z), \Psi_0(z)$  是  $S^-$  内全纯函数, 对充分大  $|z|$  有:

$$\Phi_0(z) = O\left(\frac{1}{z^2}\right) \quad \Psi_0(z) = O\left(\frac{1}{z^2}\right) \quad (2.3)$$

用推广的 Schwarz 镜像延拓方法<sup>[1]</sup>, 在  $S^-$  内定义一函数:

$$\Phi_2^*(z) = -\Phi_2(z) + z\Phi_2'(z) + \frac{z^2}{R^2}\Psi_2(z) \quad (2.4)$$

显然,  $\Phi_2^*(z)$  在  $S^-$  内除  $z_0$  和  $\infty$  远处有极点外全纯, 在  $L'$  (裂纹面) 上, 由式(1.3), (1.5), (2.4), 并考虑到在  $|z|=R$  上,  $R^2/z=\bar{z}$ , 则有:

$$\Phi_2(z) = \overline{\Phi_2^*(z)} \quad (z \in L')$$

于是,  $\Phi_2(z)$  经过圆弧  $L'$  解析延拓到  $S^+$  内:

$$\Phi_2(z) = -\bar{\Phi}_2\left(\frac{R^2}{z}\right) + \frac{R^2}{z}\bar{\Phi}_2'\left(\frac{R^2}{z}\right) + \frac{R^2}{z^2}\bar{\Psi}_2\left(\frac{R^2}{z}\right) \quad (2.5)$$

$\Phi_2(z)$  在圆内全纯, 但在  $z^*=R^2/\bar{z}_0$  和 0 点处有极点, 将(2.1), (2.2) 式代入, 得到:

$$\Phi_2(z) = G(z) + \Phi_{20}(z) \quad (2.6)$$

其中  $\Phi_{20}(z)$  在沿  $L$  割开的全平面全纯,  $G(z)$  是奇性主部:

$$G(z) = \frac{M_2}{z-z_0} + \frac{\bar{N}_2}{z} - \frac{\bar{N}_2}{z-z^*} + \frac{z^*[(z_0-z^*)\bar{M}_2+M_0]}{\bar{z}_0(z-z^*)^2}$$

在  $S^+$  内无集中荷载,  $\Phi_1(z), \Psi_1(z)$  全纯, 按相同方法将  $\Phi_1(z)$  开拓到  $S^-$ :

$$\Phi_1(z) = -\bar{\Phi}_1\left(\frac{R^2}{z}\right) + \frac{R^2}{z} \bar{\Phi}'_1\left(\frac{R^2}{z}\right) + \frac{R^2}{z^2} \bar{\Psi}'_1\left(\frac{R^2}{z}\right) \quad (2.7)$$

易知  $\Phi_1(z)$  在沿  $L$  割开的全平面全纯. 这样,  $\Psi_k(z)$  可以用开拓后的  $\Phi_k(z)$  表示, 由(2.5), (2.7)不难得到:

$$\Psi_k(z) = \frac{R^2}{z^2} \Phi_k(z) + \frac{R^2}{z^2} \Phi_k\left(\frac{R^2}{z}\right) - \frac{R^2}{z} \Phi'_k(z) \quad (2.8)$$

对  $k=1, z$  在  $S^+$ ; 对  $k=2, z$  在  $S^-$ . 于是(2.5), (2.6)两式成为:

$$\sigma_{kr} + i\tau_{kr\theta} = \Phi_k(z) - \Phi_k\left(\frac{R^2}{\bar{z}}\right) + \bar{z} \left(\frac{\bar{z}}{R^2} - \frac{1}{z}\right) \overline{\Psi_k(z)} \quad (2.9)$$

$$2\mu_k(u'_k + iv'_k) = iz \left[ \kappa_k \Phi_k(z) + \Phi_k\left(\frac{R^2}{\bar{z}}\right) - \bar{z} \left(\frac{\bar{z}}{R^2} - \frac{1}{z}\right) \overline{\Psi_k(z)} \right] \quad (2.10)$$

将(2.9)代入(1.1), 并注意到(1.3)式, 知整个圆周上有:

$$[\Phi_1(t) + \Phi_2(t)]^+ - [\Phi_1(t) + \Phi_2(t)]^- = 0 \quad (t \in L + L') \quad (2.11)$$

所以  $\Phi_1(z) + \Phi_2(z)$  除在  $z_0, z^*, O$  有极点外, 在全平面全纯, 根据推广的 Liouville 定理:

$$\Phi_1(z) + \Phi_2(z) = G(z) + D_0 \quad (2.12)$$

其中,  $D_0$  为常数.

将(1.2)式两边对  $\theta$  求导数后, 再将(2.10)式代入, 有:

$$\frac{\kappa_1}{\mu_1} \Phi_1^+(t) + \frac{1}{\mu_1} \Phi_1^-(t) = -\frac{\kappa_2}{\mu_2} \Phi_2^-(t) + \frac{1}{\mu_2} \Phi_2^+(t) \quad (2.13)$$

将(2.6)和(2.12)取界面值代入(2.13), 并整理:

$$\Phi_{20}^+(t) - g\Phi_{20}^-(t) = h \cdot G(t) + KD_0 \quad (t \in L) \quad (2.14)$$

其中,  $g = -\frac{\mu_2 + \kappa_2 \mu_1}{\mu_1 + \kappa_1 \mu_2}$ ,  $h = -\frac{\mu_1(1 + \kappa_2)}{\mu_1 + \kappa_1 \mu_2}$ ,  $K = \frac{\mu_2(1 + \kappa_1)}{\mu_1 + \kappa_1 \mu_2}$

由文[2], (2.14)的积分形式解为:

$$\Phi_{20}(z) = \frac{X_0(z)}{2\pi i} \int_L \frac{hG(t) + KD_0}{X_0^+(t)(t-z)} dt + X_0(z)P(z) \quad (2.15)$$

其中, 
$$X_0(z) = \prod_{j=1}^n (z-a_j)^{\gamma-1} (z-b_j)^{-\gamma} \quad (2.16)$$

$$\gamma = \frac{\ln g}{2\pi i} = \frac{1}{2} - i\beta \quad \beta = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{\mu_2 + \kappa_2 \mu_1}{\mu_1 + \kappa_1 \mu_2}$$

且  $X_0(z)$  是沿  $L$  割开平面上的一单值分支, 满足:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} [z^n \cdot X_0(z)] = 1$$

$P(z)$  为不超过  $n$  次幂的多项式:

$$P(z) = C_0 z^n + C_1 z^{n-1} + \dots + C_n \quad (2.17)$$

计算出(2.15)中柯西型积分后,代(2.15)入(2.6), (2.12)得 $\Phi_2(z)$ ,  $\Phi_1(z)$ 表达式。但还剩 $C_0$ 、 $C_1 \dots C_n$ 及 $D_0$ 共 $n+2$ 个常数需要确定。由 $\Phi_1(z)$ ,  $\Phi_2(z)$ 在0和 $\infty$ 远点的性状可获得三个求解方程:由假定无穷远处应力为0,得 $\Phi_2(\infty)=0$ ,代入(2.6),得 $\Phi_{20}(\infty)=0$ ,再由(2.15)得:

$$C^0=0 \tag{2.18}$$

由在 $\infty$ 远邻域内:

$$\Phi_2(z) = \frac{M_2}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right) \tag{2.19}$$

与(2.6)式在 $\infty$ 远邻域的罗朗展开式比较可得一方程,又设 $\Phi_1(0)=A_0$ ,由(2.7) $\Phi_1(\infty)=-\bar{A}_0$ ,再由(2.12) $\Phi_1(\infty)=D_0$ ,所以

$$\Phi_1(0) = -\bar{D}_0 \tag{2.20}$$

余下 $n-1$ 个方程要由位移连续条件导出。因为上面在 $n$ 条连接线 $L_j$ 上仅满足了两边( $S^+$ 与 $S^-$ )位移的导数相等,为了保证位移连续,还需补充在 $n$ 个端点( $b_j$ )位移相等的条件,考虑到相对刚体位移,可假设其中一个端点(如 $b_1$ )处事先重合,则还有 $n-1$ 个独立补充条件,由此可得:

$$\int_{a_j}^{b_j} (u_1'^+ + iv_1'^+) dt = \int_{a_j}^{b_j} (u_1'^- + iv_1'^-) dt \quad (j=2,3,\dots,n)$$

将(2.10)代入上式,再将(2.6)和(2.12)两式代入,不难导出:

$$\int_{a_j}^{b_j} [\Phi_{20}(t) + h_2 G(t)] dt = h_1 D_0 (b_j - a_j) \quad (j=2,3,\dots,n) \tag{2.21}$$

其中:

$$h_1 = \frac{\mu_1(1+\kappa_2)}{\mu_1 + \mu_2 + \mu_1\kappa_2 + \mu_2\kappa_1}, \quad h_2 = \frac{\mu_2(1+\kappa_1)}{\mu_1 + \mu_2 + \mu_1\kappa_2 + \mu_2\kappa_1}$$

由(2.18)~(2.21)可解出全部常数, $\Phi_1(z)$ ,  $\Phi_2(z)$ 求出后,再由(2.8)式得 $\Psi_1(z)$ 、 $\Psi_2(z)$ ,这样,整个弹性场完全确定。

若集中荷载作用于圆内,仿此可解。

### 三、几个典型精确解

例1 设界面上有一条裂纹 $\widehat{ab}$ ,圆外任意点 $z_0$ 作用集中力 $x+iy$ 和集中力偶 $m$ 。不失一般性,建立图2所示坐标系,使 $a=R \cdot e^{-i\theta}$ ,  $b=R e^{i\theta}$ 考虑到 $n=1$ ,则 $C_0=0$ , (2.15)成为:

$$\Phi_{20}(z) = \frac{X_0(z)}{2\pi i} \int_b^a \frac{hG(t) + K D_0}{X_0^+(t)} \frac{dt}{t-z} + C_1 X_0(z) \tag{3.1}$$

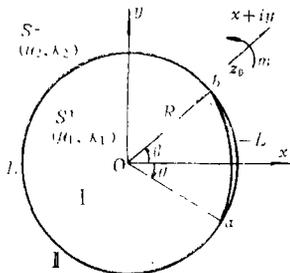


图 2

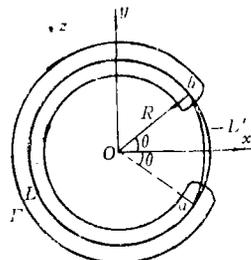


图 3

这里  $X_0(z) = (z-b)^{-\frac{1}{2}+i\beta} \cdot (z-a)^{-\frac{1}{2}-i\beta}$

(3.1)式中需计算柯西型积分:

$$I(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_b^a \frac{hG(t) + KD_0}{X_0^+(t)} \frac{dt}{t-z}$$

为此,我们先考虑另一积分:

$$I_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{hG(\xi) + KD_0}{X_0(\xi)} \frac{d\xi}{\xi-z}$$

图3所示,  $\Gamma$ 为按顺时针方向包围  $L$  的封闭围线,且假定  $z$  在  $\Gamma$  之外,由推广的柯西积分公式:

$$I_1(z) = \frac{hG(z) + KD_0}{X_0(z)} - G_0(z) - G_{z_0}(z) - G_{z^*}(z) - G_{\infty}(z) \quad (3.2)$$

其中,  $G_0$ 、 $G_{z_0}$ 、 $G_{z^*}$ 、 $G_{\infty}$  为被积函数  $(hG(z) + KD_0)/X_0(z)$  在  $0$ 、 $z_0$ 、 $z^*$ 、 $\infty$  远处的奇性主部。

再令围线  $\Gamma$  收缩于  $L$ , 注意到在  $L$  上,  $X_0^+(t) = gX_0^-(t)$ , 得:

$$I(z) = \frac{1}{1-g} I_1(z) \quad (3.3)$$

将(3.3)代入(3.1)得  $\Phi_{20}(z)$  后,再由(2.6), (2.12)得:

$$\begin{aligned} \Phi_2(z) = & \frac{-X_0(z)}{1-g} [G_0(z) + G_{z_0}(z) + G_{z^*}(z) + G_{\infty}(z) - (1-g)C_1] \\ & + \left(1 + \frac{h}{1-g}\right)G(z) + \frac{KD_0}{1-g} \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\Phi_1(z) = -\Phi_2(z) + G(z) + D_0 \quad (3.5)$$

其中:

$$G_0(z) = \frac{1}{X_0(0)} \cdot \frac{h \cdot \bar{N}_2}{z}, \quad G_{z_0}(z) = \frac{h}{X_0(z_0)} \cdot \frac{M_2}{z-z_0}$$

$$G_{z^*}(z) = \frac{h}{X_0(z^*)} \left\{ \frac{z^*[(z_0-z^*)\bar{M}_2 + M_0]}{\bar{z}_0(z-z^*)^2} \left[ 1 - (z-z^*) \frac{X_0'(z^*)}{X_0(z^*)} \right] - \frac{\bar{N}_2}{z-z^*} \right\} \quad (3.6)$$

$$G_{\infty}(z) = KD_0z - KD_0R(\cos\theta + 2\beta\sin\theta) + hM_2$$

注意到在  $\infty$  远邻域,

$$X_0(z) = \frac{1}{z} + R(\cos\theta + 2\beta\sin\theta) \frac{1}{z^2} + \dots$$

由(3.4)容易得到  $\Phi_2(z)$  在  $\infty$  远点罗朗展式中  $1/z$  项的系数,再与(2.19)比较得:

$$C_1 = 0 \quad (3.7)$$

将(3.7)代入(3.5),再将(3.5)代入(2.20),并注意到当  $z \rightarrow 0$  时,

$$\frac{X_0(z)}{1-g} \frac{1}{X_0(0)} \frac{h\bar{N}_2}{z} - \frac{h}{1-g} \frac{\bar{N}_2}{z} = \frac{h\bar{N}}{1-g} \frac{X_0'(0)}{X_0(0)}$$

我们得到:

$$Q \cdot D_0 + Q_1 = -\bar{D}_0 \quad (3.8)$$

由(3.8)得:

$$D_0 = \frac{Q \cdot Q_1 - \bar{Q}_1}{1 - Q^2} \quad (3.9)$$

其中  $Q = \frac{-K}{1-g} [RX_0(0)(\cos\theta + 2\beta\sin\theta) + 1] + 1$

$$Q_1 = \frac{hX_0(0)}{1-g} \left[ \frac{X'_0(0)}{X_0'(0)} \bar{N}_2 - \frac{M_2}{z_0 X_0(z_0)} + \frac{\bar{z}_0 \bar{N}_2}{R^2 X_0(z^*)} + \frac{(z_0 - z^*) \bar{M}_2 + \bar{M}_0}{X_0(z^*)} \right. \\ \left. \cdot \left( \frac{1}{R^2} + \frac{X'_0(z^*)}{z_0 X_0(z^*)} \right) + M_2 \right] - \frac{h}{1-g} \left[ \frac{-M_2}{z_0} + \frac{\bar{z}_0 \bar{N}_2}{R^2} + \frac{(z_0 - z^*) \bar{M}_2 + \bar{M}_0}{R^2} \right]$$

例2 设界面有一条裂纹  $ab$ ，集中荷载  $x+iy$  和  $m$  作用在圆内任意点  $z_0$ ，如图4所示，此时，在  $S^+$  内：

$$\Phi_1(z) = \frac{M_1}{z-z_0} + \Phi_{10}(z) \quad (3.10)$$

$$\Psi_1(z) = \frac{N_2}{z-z_0} + \frac{\bar{z}_0 M_1 + M_0}{(z-z_0)^2} + \Psi_{10}(z) \quad (3.11)$$

其中，

$$M_1 = -\frac{x+iy}{2\pi(1+\kappa_1)}, \quad N_1 = \frac{\kappa_1(x-iy)}{2\pi(1+\kappa_1)}, \quad M_0 = -\frac{im}{2\pi}$$

$\Phi_{10}(z)$ ， $\Psi_{10}(z)$  在  $S^+$  内全纯。

在  $S^-$  内， $\Phi_2(z)$ ， $\Psi_2(z)$  为全纯函数，且对充分大的  $|z|$ ，有：

$$\Phi_2(z) = \frac{M_2}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right), \quad \Psi_2(z) = \frac{N_2}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right) \quad (3.12)$$

用与例1相同的分析方法，并经类似的计算步骤，最后得到：

$$\Phi_2(z) = \frac{-X_0(z)}{1-g} [G_0^*(z) + G_{z_0}^*(z) + G_{z^*}^*(z) + G_\infty^*(z) - (1-g) \cdot C_1^*] \\ + \frac{K}{1-g} (G^*(z) + D_0^*) + \left(1 + \frac{h}{1-g}\right) \frac{\bar{N}_2}{z} \quad (3.13)$$

$$\Phi_1(z) = -\Phi_2(z) + G^*(z) + \frac{\bar{N}_2}{z} + D_0^* \quad (3.14)$$

其中

$$G_0^*(z) = \frac{h\bar{N}_2}{X_0(0) \cdot z}, \quad G_{z_0}^*(z) = \frac{KM_1}{X_0(z_0)} \frac{1}{z-z_0} \\ G_{z^*}^*(z) = \frac{K}{X_0(z^*)} \left\{ \frac{z^* [(z_0 + z^*) \bar{M}_1 + \bar{M}_0]}{\bar{z}_0 (z-z^*)^2} \left[ 1 - (z-z^*) \frac{X'_0(z^*)}{X_0(z^*)} \right] - \frac{\bar{N}_1}{z-z^*} \right\} \\ G_\infty^*(z) = KD_\infty^* z - KD_0^* R(\cos\theta + 2\beta\sin\theta) + K(M_1 - N_1) + h\bar{N}_2 \\ G^*(z) = \frac{M_1}{z-z_0} - \frac{\bar{N}_1}{z-z^*} + \frac{z^* [(z_0 + z^*) \bar{M}_1 + \bar{M}_0]}{\bar{z}_0 (z-z^*)^2} \quad (3.15)$$

$$\text{这里 } z^* = \frac{R^2}{\bar{z}_0}, \quad C_1^* = M_2 - \bar{N}_2, \quad D_0^* = \frac{Q^* \cdot Q_1^* - \bar{Q}_1^*}{1 - Q^{*2}} \quad (3.16)$$

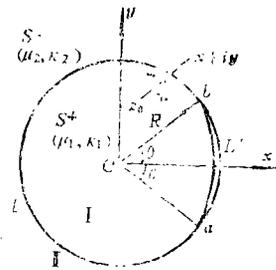


图 4

$$Q^* = \frac{-K}{1-g} [RX_0(0) \cdot (\cos\theta + 2\beta\sin\theta) + 1] + 1$$

$$Q_1^* = \frac{X_0(0)}{1-g} [G_{z_0}^*(0) + G_{z^*}^*(0) + K(M_1 - \bar{N}_1) + h\bar{N}_2 - (1-g)(M_2 - \bar{N}_2)]$$

$$+ \left(1 - \frac{K}{1-g}\right) G^*(0) + \frac{h\bar{N}_2}{1-g} \frac{X_0'(0)}{X_0(0)}$$

上述二例中  $\Psi_1(z)$ ,  $\Psi_2(z)$  均由(2.8)式立即得出。

值得指出, 这两个典型解答具有一定的普遍意义: 不仅可以作为格林函数积分, 获得任意分布载荷下的解答; 而且由它们通过改变弹性常数和几何形状的极限过程获得一系列特殊解答; 由它们通过简单叠加, 还可以获得一些具有工程实用意义的解。下面例举几种:

- (1) 同种材料的圆弧裂纹解。设  $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ ,  $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa$ , 此时算得  $g = -1$ ,  $h = -1$ ,  $k = 1$ ,  $\beta = 0$  将它们代入(3.4), (3.5), (3.13), (3.14), 便得解答。
- (2) 刚性核的圆弧裂纹解。当  $\mu_1 \gg \mu_2$  时, 可视  $\mu_1 \rightarrow \infty$ , 此时算得  $g = -\kappa_2$ ,  $h = -(1 + \kappa_2)$ ,  $\kappa = 0$ ,  $\beta = \ln\kappa_2/2\pi$ , 代入上述各式, 即得相应解。
- (3) 不同材料的直线裂纹解。在上述各式中, 令  $R \rightarrow \infty$ ,  $\theta \rightarrow 0$ , 且保持  $2R\sin\theta = 2l$  (裂纹长) 即可得此解。
- (4) 不同材料的焊接解。在上述各式中, 令  $\theta \rightarrow 0$ ,  $a = b = R$ , 并注意到

$$X_0(z) = \begin{cases} \frac{g}{z-R} & (z \in S^+) \\ \frac{1}{z-R} & (z \in S^-) \end{cases}$$

便得相应荷载下的圆形焊接解, 仿(3) 还可得不同材料的直线焊接解。

这些解答容易直接写出, 这里无需一一列出, 仅以(4)为例作个说明和对照。

如图5, 圆形材料 I 与带孔的不同材料的大板完全焊接, 当板内任意点  $z_0$  作用集中力  $x + iy$  和集中力偶  $m$  时, 将(4)中条件代入(3.4)式, 便得:

$$\Phi_2(z) = \frac{M_2}{z-z_0} + \alpha \frac{\bar{N}_2}{z} - \alpha \frac{\bar{N}_2}{z-z^*} + \alpha \frac{z^*[(z_0-z^*)\bar{M}_2 + \bar{M}_0]}{\bar{z}_0(z-z^*)^2} \quad (3.17)$$

其中,

$$\alpha = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + \kappa_2 \mu_1}$$

再由(3.5)式得:

$$\Phi_1(z) = \frac{\mu_1(1+\kappa_2)}{\mu_1 + \kappa_1 \mu_2} \frac{M_2}{z-z_0} + \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \kappa_1 \mu_2} D_0 \quad (3.18)$$

其中,  $D_0$  由(3.9)式, 即  $D_0 = (QQ_1 - \bar{Q}_1)/(1-Q^2)$  确定,

此处,  $Q = 1 - K$ ,  $Q_1 = hM_2/z_0$

当  $\mu_1 \rightarrow 0$ , 即自由孔情形, 此时  $h = 0$ , 再设  $z_0 = b$  (实数),  $M_0 = 0$  (无集中力偶), 由(3.17)就有:

$$\Phi_2(z) = \frac{M_2}{z-b} + \frac{\bar{N}_2}{z} - \frac{\bar{N}_2}{z-R^2b^{-1}} + R^2 \frac{(b^{-1} - R^2b^{-3})\bar{M}_2}{(z - R^2b^{-1})^2}$$

由(3.18),  $\Phi_1(z) = 0$

此结果与文[1]完全一致。

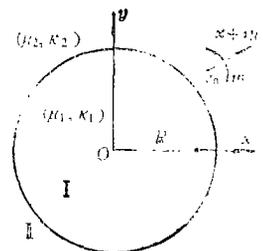


图 5

## 四、应力强度因子

我们采用文[9]方法, 计算双相材料界面圆弧裂纹的复应力强度因子。首先作如下坐标变换:

$$z = \omega(Z) = i \exp[i\theta](Z - iR - 2^{-1}R \sin 2\theta) \quad (4.1)$$

这样, 在 $Z$ 平面 $x$ 轴与裂纹相切于端点 $b_1$ ( $z$ 平面 $b$ 的对应点), 且 $b_1 = 2^{-1}R \sin 2\theta$ 。  $\Phi_2[\omega(Z)]$  在 $b_1$ 点邻域的奇性主项可写为:

$$\Phi_2[\omega(z)] = \frac{\exp(-\pi\beta)}{2\sqrt{2}} \cdot (K_1 - iK_2) \cdot (Z - b_1)^{-\frac{1}{2} + i\beta}$$

$$\text{所以} \quad K_1 - iK_2 = 2\sqrt{2} \cdot \exp[\pi\beta] \cdot \lim_{Z \rightarrow b_1} (Z - b_1)^{\frac{1}{2} - i\beta} \cdot \Phi_2[\omega(Z)] \quad (4.2)$$

下面以裂纹端点 $b$ 为例, 计算几种典型情况的复应力强度因子。对于同种材料圆弧裂纹; 刚性核圆弧裂纹, 直线裂纹等情形的应力强度因子, 不难由下述典型解结合上述(1)~(4)的特征条件得出, 这里也不一一列出。特别注意, 当 $|z| < R$ 时,  $X_0(z)$ 中 $z-a$ ,  $z-b$ 的幅角计算。

如图6所示:  $z-b = r_1 \exp[-i\theta_1]$ ,  $z-a = r_2 \exp[i\theta_2]$

1. 沿不同材料圆弧裂纹, 作用力在圆外, 如图2所示, 即为第三节中例1情形。将(3.4)式代入(4.2)中, 得:

$$K_1 - iK_2 = \frac{2\sqrt{2}i}{1-g} \frac{\exp\left[\frac{(\pi-\theta)\beta - \frac{i\theta}{2}}{2}\right]}{(2R \sin \theta)^{\frac{1}{2} + i\beta}} [G_0(b) + G_{z_0}(b) + G_{z^*}(b) + G_{\infty}(b)] \quad (4.3)$$

2. 沿不同材料圆弧裂纹, 作用力在圆内, 如图4所示, 即为第三节中例2情形。将(3.13)代入(4.2)得:

$$K_1 - iK_2 = \frac{2\sqrt{2}i}{1-g} \frac{\exp\left[\frac{(\pi-\theta)\beta - \frac{i\theta}{2}}{2}\right]}{(2R \sin \theta)^{\frac{1}{2} + i\beta}} [G_0^*(b) + G_{z_0}^*(b) + G_{z^*}^*(b) + G_{\infty}^*(b) - (1-g)(M_2 - \bar{N}_2)] \quad (4.4)$$

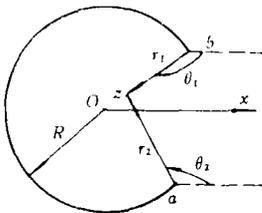


图 6

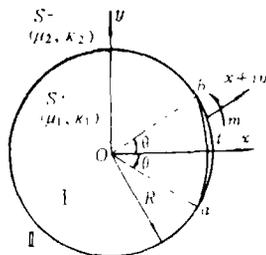


图 7

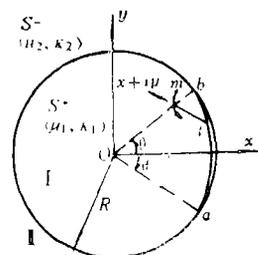


图 8

3. 沿不同材料圆弧裂纹, 作用力在圆外裂纹面上, 如图7所示,  $t$ 为圆外裂纹面上任意点。在(4.3)式中, 令 $z_0 \rightarrow t^-$ , 并注意到 $X_0(z_0) \rightarrow X_0^+(t)$ ,  $X_0(z^*) \rightarrow X_0^-(t)$ ; 且 $X_0^+(t) = X_0^-(t)$  (在 $L'$ 上), 我们得到:

$$K_1 - iK_2 = \frac{2\sqrt{2}i}{1-g} \frac{\exp\left[\frac{(\pi-\theta)\beta - \frac{i\theta}{2}}{2}\right]}{(2R \sin \theta)^{\frac{1}{2} + i\beta}} \left[ \frac{h\bar{N}_2}{bX_0(0)} + \frac{h(M_2 - \bar{N}_2)}{(b-t)X_0(t)} + \frac{ht^2 \bar{M}_0}{R^2(b-t)X_0(t)} \left[ \frac{1}{b-t} - \frac{X_0^-(t)}{X_0^+(t)} \right] + KD_0 b - KD_0 R(\cos \theta + 2\beta \sin \theta) + hM_2 \right] \quad (4.5)$$

其中  $D_0$  仍由(3.9)表达, 但,

$$Q_1 = \frac{h}{1-g} \left\{ \frac{X_0'(0)}{X_0(0)} \bar{N}_2 + X_0(0) \cdot M_2 - \frac{\bar{M}_0}{R^2} - \frac{\bar{N}_2 - \bar{M}_2}{t} \right. \\ \left. + \frac{X_0(0)}{X_0(t)} \left[ \frac{\bar{N}_2 - \bar{M}_2}{t} + \frac{\bar{M}_0}{R^2} + \frac{\bar{M}_0 \cdot t X_0'(t)}{R^2 X_0(t)} \right] \right\}$$

4. 沿不同材料圆弧裂纹, 作用力在圆内裂纹面上. 如图 8 所示,  $t$  为圆内裂纹面上任意点. 在(4.4)式中, 令  $z_0 \rightarrow t^+$ , 则  $z^* \rightarrow t^-$ , 得:

$$K_1 - iK_2 = \frac{2\sqrt{2}i}{1-g} \frac{\exp\left[\frac{(\pi-\theta)\beta - i\theta}{2}\right]}{(2R\sin\theta)^{\frac{1}{2} + i\beta}} \left\{ \frac{Kt^2(2t\bar{M}_1 + \bar{M}_0)}{R^2(b-t)X_0(t)} \left[ \frac{1}{b-t} \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{X_0'(t)}{X_0(t)} \right] + \frac{h\bar{N}_2}{b \cdot X_0(0)} + \frac{K(M_1 - \bar{N}_1)}{(b-t)X_0(t)} \right. \\ \left. + KD_0^* [b - R(\cos\theta + 2\beta\sin\theta)] + K(M_1 - \bar{N}_1) + h\bar{N}_2 \right\} \quad (4.6)$$

其中  $D_0^*$  仍由(3.16)计算, 但,

$$Q_1^* = \frac{X_0(0)}{1-g} \left\{ \frac{K(2t\bar{M}_1 + \bar{M}_0)}{R^2 X_0(t)} \left[ 1 + \frac{tX_0'(t)}{X_0(t)} \right] + \frac{K(\bar{N}_1 - M_1)}{tX_0(t)} \right. \\ \left. + K(M_1 - \bar{N}_1) + h\bar{N}_2 - (1-g)(M_2 - \bar{N}_2) \right\} + \frac{h\bar{N}_2}{1-g} \frac{X_0'(0)}{X_0(0)} \\ + \left( 1 - \frac{K}{1-g} \right) \left( \frac{\bar{N}_1 - M_1}{t} + \frac{2t\bar{M}_1 + \bar{M}_0}{R^2} \right)$$

上述结果的极限情形, 可与前人成果对照. 以圆外作用载荷的情形为例: 经(4.1)变换后, 在  $Z$  平面上, 图 2 变为图 9 所示, 再令  $R \rightarrow \infty$ ,  $\theta \rightarrow 0$ , 但保持  $R \cdot \sin\theta = l$  便得图 10 情

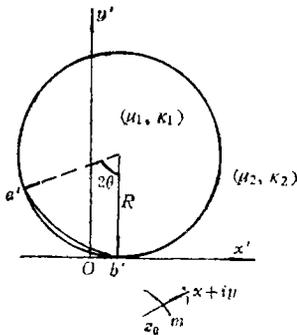


图 9

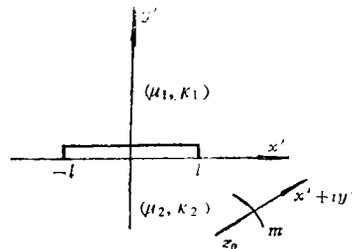


图 10

形. 这里  $Z_0, \bar{Z}_0, l, -l$  顺次为  $z$  平面上对应点  $z_0, z^*, b, a$  的像. 且  $M_2 = iM_2'$ ,  $\bar{N}_2 = i\bar{N}_2'$ , 而

$$M_2' = -\frac{x' + iy'}{2\pi(1 + \kappa_2)}, \quad \bar{N}_2' = \frac{\kappa_2(x' - iy')}{2\pi(1 + \kappa_2)}$$

经上述变换和极限过程, 并注意到  $D_0 \rightarrow 0$ , 由(4.3)式便得:

$$K_1 - iK_2 = -\frac{\exp[\pi\beta] \cdot 2h \cdot (2l)^{-i\beta}}{(1-g)\sqrt{l}} \cdot \left[ M_2' \left( 1 + \frac{1}{(l-Z_0)X_0(Z_0)} \right) - \right.$$

$$-\bar{N}'_2 \left( \frac{1}{g} + \frac{1}{(l-\bar{Z}_0)X_0(\bar{Z}_0)} \right) + (1+2i\beta)l \cdot \left. \frac{(Z_0-\bar{Z}_0)\bar{M}'_2 + \bar{M}_0}{(\bar{Z}_0^2-l^2)(l-\bar{Z}_0)X_0(\bar{Z}_0)} \right] \quad (4.7)$$

在(4.7)中, 令  $M_0=0$ , 注意到  $\frac{\exp(\pi\beta)}{1-g} = \frac{1}{2\text{ch}(\pi\beta)}$ , 并考虑到  $X_0(\bar{Z}_0)$  的幅角计算(见图6)和载荷作用位置的的区别, 可得与文[6]相一致的结果。

### 参 考 文 献

- [1] 樊大钧, 《数学弹性力学》, 新时代出版社(1983), 373.
- [2] Мухелишвили Н. И., 《数学弹性力学的几个基本问题》, 科学出版社(1965).
- [3] Cook, T. S. and F. Erdogan, Stresses in bonded materials with a crack perpendicular to the interface, *Int. J. Eng. Sci.*, 10 (1972), 677—697.
- [4] Erdogan, F. and O. Aksogan, Bonded half planes containing an arbitrary oriented crack, *Int. J. Solids Structures*, 10 (1974), 569—595.
- [5] 路见可, 有一条裂纹的圆形焊接问题, 应用数学和力学, 4, 5 (1983), 679.
- [6] Loeber, J. F. and G. C. Sih, Green's function for cracks in nonhomogeneous materials, *J. Appl. Mech.*, 34 (1967), 240—243.
- [7] Sih, G. C., *Handbook of Stress Intensity Factors for Reserchers and Engineers* (1974).
- [8] Sih, G. C. and E. P. Chen, *Cracks in Composite Materials*, Martius Nijoff, the Hague/Boston/London (1981), 172.
- [9] Sih, G. C., P. C. Raris and F. Erdogan, Crack-tip, stress-intensity factors for plane extension and plane bending problems, *J. Appl. Mech.*, 29 (1962), 306.

## Problem on Circular-Arc Cracks between Bonded Dissimilar Materials under Concentrated Force and Moment

Liu You-wen

(Mathematics and Physics Department, Central-South

University of Technology, Changsha)

Jiang Chi-ping

(Hunan University, Changsha)

### Abstract

The method is very efficient by applying extended Schwarz principle integrated with the analysis of the singularity of complex stress functions to solve some plane-elastic problems under concentrated loads. In Ref.[1], this method is used to deal with the elastic problems of homogeneous plane. In this paper, it is extended to the case of dissimilar materials with co-circular cracks under concentrated force and moment. For several typical cases the solutions of complex stress function in closed form are built up and the stress intensity factors are given. From these solutions, we provide a series of particular results, in which two of them coincide with those in Refs. [1] and [6].