应用数学和力学，第8卷第3期（1987年3月）
Applied Mathematics and Mechanics
应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

不动泛系定理与浑沌的泛系逻辑守恒性*

覃国光

（武汉数字工程研究所，1985年7月24日收到）

摘要

利用泛系方法论研究非线性问题不必考虑微分流形与线性空间的相应条件，也没有连续性的要求[1,2]。文献[2]在泛系框架下，已把浑沌，引子，怪引子等的研究转化为相应的不动子集的研究，并给出了它们存在的一些条件。本文就是在这个基础上进一步研究它们的泛系逻辑守恒性，也就是它们的泛系形影之间的某些相对不变性。

我们已在泛系方法论的框架下，把非线性问题的研究转化为不动泛系的研究[2]。利用泛系方法论研究非线性问题，不需要特化的分析结构，拓扑结构与线性结构[1,2]。而不动泛系则是传统不动点理论的补充与发展，它不需要诸如拓扑、线性、连续性、凸性、紧致性、闭性等这些较苛刻的限制，当然所得结果也相应地弱了一些，不动点变成相对不动子集，但却有较强的适应性。本文在[2]的基础上研究浑沌，引子，怪引子及一些相对不变子集的泛系逻辑守恒性。

一、泛浑沌、泛引子与泛怪引子

首先我们介绍一些将要用到的符号及有关结果。设G为一给定的非空集合，G的子集的全体记为$P(G)$，$g\in P(G)$ 或 $g\subset G^2$ 为 G 上的二元关系，$I=\{(x,x)|x\in G\}$，$g^{-1}=\{(x,y)|(y,x)\in g\}$。若$x\in G$，$D\subset G$，定义

$$x\circ g=\{y|(x,y)\in g\},\ D\circ g=\bigcup_{x\in D}x\circ g,\ g*x=\{y|(y,x)\,\bar{\in}\,g\}$$

$$g*D=\bigcap_{y\in D}g*y=\{x|\forall y\in D,(x,y)\,\bar{\in}\,g\}$$

类似可定义$g\circ y$，$g\circ D$，$x*g$及$D*g$。

定义 设$g\subset G^2$，$D\subset G$，若$D^2\cap g=\phi$，则称D为关于g的泛浑沌；若对任意$x\in G-D$（即$x\in\bar{D}$），$x\circ g\cap D\neq\phi$，则称D为关于g的泛引子；若D同时为关于g的泛浑沌与泛引子则称D为关于g的泛怪引子。

下面几个定理在[2]中已证明，它们是以下讨论的基础，设$g\subset G^2$，$D\subset G$

定理 1 D为关于g的泛浑沌，当且仅当对任意$x,y\in D$，必有$(x,y)\,\bar{\in}\,g$，$(y,x)\,\bar{\in}\,g$。

定理 2 D为关于g的泛引子，当且仅当对$x\in\bar{D}$，存在$y\in D$，使$(x,y)\in g$。

* 吴学谋推荐。

定理 3　D为关于g的泛浑沌的充要条件是$D\subset g*D$。

定理 4　D为关于g的泛引子的充要条件是$D\supset g*D$。

定理 5　D为关于g的泛怪引子当且仅当$g*D=D$。

定理3～定理5指出，泛怪引子，泛浑沌，泛引子分别对应于以下三类不动子集：

$$FS_{\mathrm{I}}(g)=\{D\,|\,D\subset G,D\neq\phi,D=g*D\}$$
$$FS_{\mathrm{II}}(g)=\{D\,|\,D\subset G,D\neq\phi,D\subset g*D\}$$
$$FS_{\mathrm{III}}(g)=\{D\,|\,D\subset G,D\neq\phi,D\supset g*D\}$$

下面的定理[2]给出各类不动子集存在的一些条件。

定理 6　设$g*G\neq\phi$，且对$x\bar{\in}g*G$必存在$y\in g*G$使$(x,y)\in g$，则$g*G\in FS_{\mathrm{I}}(g)$。

定理 7　若定理6的条件成立且g为传递关系，则$FS_{\mathrm{I}}(g)$有且仅有一个元素，这个元素就是$g*G$。

定理 8　若存在$D\subset G$使$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}g^{\langle n\rangle}*D\neq\phi$，则$FS_{\mathrm{II}}(g)\neq\phi$。

这里$g^{(n)}*D$按下述方式定义

$$g^{\langle n\rangle}*D=g*(g^{\langle n-1\rangle}*D),\ g^{\langle 2\rangle}*D=g*(g*D),g^{\langle 0\rangle}*D=D.$$

定理 9　若存在$D\subset G$使$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}g^{\langle n\rangle}*D\neq\phi$，则$FS_{\mathrm{III}}(g)\neq\phi$。

定理10　设$D\subset G$，$D\neq\phi$，$c(x)$为D的特征函数，则下列命题成立

1)　若$c(x)\leqslant\min\{c(y)\,|\,y\in g*x\}$，则$D\in FS_{\mathrm{II}}(g)$

2)　若$c(x)\geqslant\min\{c(y)\,|\,y\in g*x\}$，则$D\in FS_{\mathrm{III}}(g)$

3)　若$c(x)=\min\{c(y)\,|\,y\in g*x\}$，则$D\in FS_{\mathrm{I}}(g)$[1]

定理11　若D为关于g的泛浑沌，则$g*D$为关于g的泛引子，相反，若D为关于g的泛引子，则$g*D$为关于g的泛浑沌。

定理12　设$f,g\subset G^2$，若$D_1\in FS_{\mathrm{I}}(g)$，$D_2\in FS_{\mathrm{I}}(g)$，则$D_1\cup D_2\in FS_{\mathrm{I}}(g\cap f)$，若$D_1\cap D_2\neq\phi$，则$D_1\cap D_2\in FS_{\mathrm{I}}(f\cup g)$。

对于作用$g\circ D=\{x\,|\,y\in D,(x,y)\in g\}$的不动子集有下述结论：

定理13　若对$\forall x\in G$，$g\circ x\neq\phi$，则必存在$D\subset G$，使$D=g\circ D$。

定理14　若存在$D_1\subset G$，使$D_1\subset g*D_1$，则必存在$D\subset G$，使$D=g\circ D$。

二、逻辑守恒性

下面我们来讨论泛浑沌，泛引子，泛怪引子及一些相对不变子集的泛系逻辑守恒性，即它们的形影之间的某些相对不变性。在下面所有讨论中若没有特殊的声明，我们总认为g，f为G上的二元关系，D为G的非空子集。

定理15　设$f,g\subset G^2$，$D\subset G$，下面的等式成立。$g*(f\circ D)=(g\circ f)*D$。

证　设$x\in g*(f\circ D)$，即$\forall y\in f\circ D$，$(x,y)\bar{\in}g$。另一方面若$y\bar{\in}f\circ D$则对$\forall z\in D,(y,z)\bar{\in}f$。这样对$\forall z\in D$，不存在$y\in G$使$(x,y)\in g$及$(y,z)\in f$同时成立，即$(x,z)\bar{\in}g\circ f(\forall z\in D)$也就是说，$x\in(g\circ f)*D$，这就证明了$g*(f\circ D)\subset(g\circ f)*D$。

现在来证明反向的包含关系。设$x\bar{\in}g*(f\circ D)$，即存在$y\in f\circ D$使$(x,y)\in g$。于是存在$z\in D$

使$(y,z)\in f$，$(x,y)\in g$同时成立，即存在$z\in D$使$(x,z)\in g\circ f$，也就是$x\overline{\in}(g\circ f)*D$。这就证明了$g*(f\circ D)\supset(g\circ f)*D$。

定理16 若对任何$D_1\subset G$，$f\circ D_1\cap f\circ\bar{D}_1=\phi$，则$f\circ(g*D)\subset(f\circ g)*D$，$\forall D\subset G$。

证 若$x\in f\circ(g*D)$则存在$y\in g*D$使$(x,y)\in f$，由算子$*$的定义知对$\forall z\in D$，$(y,z)\overline{\in}g$。这样当$y\in g*D$时，对$\forall z\in D$，$(y,z)\overline{\in}g$。另一方面，若存在$y_1\in\overline{g*D}$（即$y_1\overline{\in}g*D$），使$(x,y_1)\in f$，即$x\in f\circ(\overline{g*D})$于是$x\in f\circ(g*D)\cap f\circ(\overline{g*D})$，这与定理假设矛盾，故对$\forall y\in\overline{g*D}$，$(x,y)\overline{\in}f$。这样对$\forall z\in D$，不存在$y\in G$，使$(x,y)\in f$与$(y,z)\in g$同时成立，即$(x,z)\overline{\in}f\circ g$，$\forall z\in D$。所以$x\in(f\circ g)*D$。证毕。

定理17 若对任何$x\in G$，$x\circ f\neq\phi$，则对$\forall D\subset G$，$f\circ(g*D)\supset(f\circ g)*D$

证 设$x\in(f\circ g)*D$，即$\forall z\in D$，$(x,z)\overline{\in}f\circ g$，所以不存在$y\in G$，使对$\forall z\in D$，$(x,y)\in f$，$(y,z)\in g$同时成立。又由$x\circ f\neq\phi$，故存在$y_1\in G$，使$(x,y_1)\in f$，显然，$(y_1,z)\overline{\in}g$，$\forall z\in D$。所以$y_1\in g*D$。也就是说存在$y_1\in g*D$使$(x,y_1)\in f$。即$x\in f\circ(g*D)$。证毕。

由定理16及定理17得

定理18 设$\forall x\in G$，$x\circ f\neq\phi$，$\forall D_1\subset G$，$f\circ D_1\cap f\circ\bar{D}_1=\phi$，则对任意$D\subset G$，

$$f\circ(g*D)=(f\circ g)*D$$

由上述结果可推得下面的定理19～定理23。

定理19 设$f\circ g=g\circ f$，又对任意$D_1\subset G$，$f\circ D_1\cap f\circ\bar{D}_1=\phi$，若$D$为关于$g$的泛浑沌，则$f\circ D$亦为关于$g$的泛浑沌，即 $f\circ D\subset g*(f\circ D)$

定理20 设$f\circ g=g\circ f$，$\forall x\in G$，$x\circ f\neq\phi$，若D为关于g的泛引子，则$f\circ D$亦为关于g的泛引子，即 $f\circ D\supset g*(f\circ D)$

定理21 设$f\circ g=g\circ f$，对$\forall x\in G$，$x\circ f\neq\phi$，$\forall D_1\subset G$，$f\circ D_1\cap f\circ\bar{D}_1=\phi$，又若$D\subset G$为关于$g$的泛怪引子，则$f\circ D$亦为关于$g$的泛怪引子，即$f\circ D=g*(f\circ D)$

定理22 设$f\circ g=g\circ f$，$\forall x\in G$，$x\circ f\neq\phi$，$\forall D_1\subset G$，$f\circ D_1\cap f\circ\bar{D}_1=\phi$，又设$D=g\circ D$，则

$$f*D=g\circ(f*D)$$

定理23 设对任意$x\in G$，$x\circ f\neq\phi$，$\forall D_1\subset G$，$f\circ D_1\cap f\circ\bar{D}_1=\phi$，又设$f^{-1}\circ f=I$，$D=g\circ D$，则

$$f*D=(f\circ g\circ f^{-1})\circ(f*D)$$

设$\forall D_1\subset G$，$f\circ D_1\cap f\circ\bar{D}_1=\phi$，$f^{-1}\circ f=I$，又$D\subset g*D$，于是

$$(f\circ g\circ f^{-1})*(f\circ D)=(f\circ g\circ f^{-1}\circ f)*D=(f\circ g)*D\supset f\circ(g*D)\supset f\circ D$$

由此有

定理24 设$\forall D_1\subset G$，$f\circ D_1\cap f\circ\bar{D}_1=\phi$，$f^{-1}\circ f=I$，又设$D\subset g*D$，则

$$f\circ D\subset(f\circ g\circ f^{-1})*(f\circ D)$$

类似可得

定理25 设$\forall x\in G$，$x\circ f\neq\phi$，$f^{-1}\circ f=I$又设$D\supset g*D$，则$f\circ D\supset(f\circ g\circ f^{-1})*(f\circ D)$

定理26 设$\forall D_1\subset G$，$f\circ D_1\cap f\circ\bar{D}_1=\phi$，$\forall x\in G$，$x\circ f\neq\phi$，$f^{-1}\circ f=I$，又设$D=g*D$，则

$$f\circ D=(f\circ g\circ f^{-1})*(f\circ D)$$

定理24～定理26的条件可以减弱而结果不变。

定理24′ 设$D\subset G$为关于g的泛浑沌，且$f\circ D\cap f\circ\bar{D}=\phi$，则$f\circ D$为关于$f\circ g\circ f^{-1}$的泛浑沌，即

$$f\circ D\subset(f\circ g\circ f^{-1})*(f\circ D)$$

证 设$x\overline{\in}(f\circ g\circ f^{-1})*(f\circ D)$，于是存在$y\in f\circ D$使$(x,y)\in f\circ g\circ f^{-1}$，由此存在$(z,w)\in g$，使$(x,z)\in f$，$(y,w)\in f$。若$w\in\bar{D}$，则$y\in f\circ D\cap f\circ\bar{D}$，这与定理假设矛盾，于是$w\in D$，但$D\subset$

$g*D$，故z，w不能同时属于D，由此$z\in\bar{D}$，即$x\bar{\in}f\circ D$，于是$f\circ D\subset(f\circ g\circ f^{-1})*(f\circ D)$

定理25′ 设$\forall x\in G$，$f\circ x\neq\phi$，$x\circ f\neq\phi$，又设D为关于g的泛引子，则$f\circ D$为关于$f\circ g\circ f^{-1}$的泛引子，即 $f\circ D\supset(f\circ g\circ f^{-1})*(f\circ D)$

证 设$x\bar{\in}f\circ D$，则必$x\in f\circ\bar{D}$。于是存在$y\in\bar{D}$使$(x,y)\in f$。因$D\supset g*D$则若$y\in\bar{D}$，必存在$z\in D$使$(y,z)\in g$。由定理条件知存在$w\in G$，$(w,z)\in f$，于是$w\in f\circ D$，$(z,w)\in f^{-1}$。综合上述知存在$w\in f\circ D$使$(x,w)\in f\circ g\circ f^{-1}$，即$x\bar{\in}(f\circ g\circ f^{-1})*(f\circ D)$。证毕。

定理26′ 设D为关于g的泛怪引子，f满足以下条件，$f\circ D\cap f\circ\bar{D}\neq\phi$，$\forall x\in G,x\circ f\neq\phi$，$f\circ x\neq\phi$，则$f\circ D$为$f\circ g\circ f^{-1}$的泛怪引子，即$f\circ D=(f\circ g\circ f^{-1})\circ(f\circ D)$

为了进一步讨论引入以下定义

$f\circledast g\triangleq\{(x,z)\mid x\in G\wedge z\in G\wedge\forall y[(y,z)\bar{\in}g\wedge\forall z\in G]\wedge(x,y)\bar{\in}f\}$，$f*g\triangleq\overline{f\circledast g}$

由定义直接导出

定理27 下面关系成立 $f*(g*D)=(f*g)*D=f*g*D$

定理28 设$f*g=g*f$，又设D为关于g的泛怪引子（泛浑沌，泛引子），则$f*D$为g的泛怪引子（泛引子，泛浑沌）。

由定理15，18及27得

定理29 设D为关于g的泛怪引子，又$\forall D_1\subset G$，$f\circ D_1\cap f\circ\bar{D}_1=\phi$，$f^{-1}\circ f=I$，$\forall x\in G$，$x\circ f\neq\phi$，则$f*D$为关于$(f*g)\circ g\circ f^{-1}$的泛怪引子。

参 考 文 献

[1] Wu Xue-mou, Pansystems methodology and nonlinear analysis: new study of bifurcation, catastrophe, chaos and stability, *Proceedings of the* 1985 *International Conference on Nonlinear Mechanics*.

[2] 覃国光，不动泛系定理与浑沌的一些新研究，科学探索，泛系方法论专辑，(1986)。

Fixed Pansystems Theorems and Pansystems Logic Conservation of Chaos

Qin Guo-guang

(Wuhan Digital Engineering Institute, Wuhan)

Abstract

The study of nonlinear problems was developed in works[1,2] by means of the pansystems methodology (PM) which does not need the condition relating to differential manifolds and linear space. In work [2], within the framework of PM, we proved that study of panchaos, panattractor and strange panattractor can be transformed conditionally into some forms of fixed subsets. As a continuation of work [2], we now research the pansystems logic conservation of panchaos, panattractor, strange panattractor and some other fixed subsets.