

# 建筑用夹蕊板条的分析、数值 和实验研究\*

张建平 张佑啟 谭国焕

(美国怀渥明大学土木工程系) (香港大学土木工程系)

(1985年10月21日收到)

## 摘 要

由冷成型的薄壁钢面和刚性泡沫绝缘蕊子所组成的建筑用夹蕊板条, 用来作为多功能建筑隔墙, 日益普遍。本文总结了十多年来的研究工作, 阐明了包括弯曲应力、挠度、弯曲折皱、轴向稳定、热应力以及振动在内的各种结构性能。研究中, 采用了分析法(边界值法)、数值法(有限样条法、有限层法和有限棱柱体法等)以及实验法(全尺寸实物试验), 写出了关键方程, 并对各法所得结果进行了比较研究。

## 一、引 论

夹蕊结构<sup>[1]</sup>定义为由高强度的两层外壁和一层低强度低密度材料的厚的内蕊层所组成的一种组合型材料, 自第二次世界大战前以来, 夹蕊结构就已在飞机和结构工程中广为应用。早在四十年代, 特别在航空应用<sup>[1~3]</sup>中, 人们就研究了用薄壁面板所组成的夹蕊板条的结构分析。不过, 成型面板所组成的建筑用夹蕊板条的研究和发展, 则晚至七十年代初期, 才开始进行, 创始者是张建平及他的合作者。这种板条由于有较高的结构效率、能大批量生产、较好的绝缘性能、易于搬运、能快速安装、能预制、寿命长和能重复使用等优良性能而日益普及, 成型表板有两种目的: 建筑外观好和结构劲度高。1972年, 张建平 and Hartsock<sup>[4], [5]</sup>发表了预测这类板条局部折皱失稳的方法。此后, 张建平及其合作者曾研究了单跨度板条和连续板条的弯曲性能<sup>[6], [7], [8]</sup>和热应力<sup>[9], [10], [11]</sup>, 轴向稳定<sup>[8], [12], [13]</sup>, 以及振动<sup>[14]</sup>。所有这些结果将表述如下。

对于平表皮夹蕊板的经典文献, 曾由 Allen<sup>[1]</sup>和 Kuenzi<sup>[15]</sup>给出, 美国土木工程学会(ASCE)曾以复合结构为标题进行定期性的文献调查<sup>[16]</sup>其中包括夹蕊板条。

## 二、折 皱 失 稳

在受压外壁上的临界应力首先是从局部折皱波长和蕊层厚度尺寸相当这一点上看出来的。一般说来, 外壁表面的型式是为了改进外观, 为了抗阻屈曲, 也是为了封存油污。在轴向受载的夹蕊柱体中, 有很多处理折皱的理论; 但是, 在具有平直表面的板壁上, 板条产生

\* 本文原文为英文, 由钱伟长译成中文。

折皱的文献很少<sup>[1],[2],[3],[17]</sup>；商业上最重要的具有成型表壁的板条上产生折皱的文献也很少<sup>[4],[5]</sup>。

在本文中，我们用梁的中心集中载荷对五种板条进行了试验。其中采用了26号标准钢(0.50mm厚，见图1)的三种型式的外壁表面和四种刚性的泡沫尿脞(三种是叠层压成的，一种是泡沫安装就位的)。在最大压应力各点装着应变仪，载荷、梁的挠度和受压面上的应变是同时测定的。在梁的试验以后，对蕊子试样的厚度方向进行压缩试验。在测出了垂直变形和横向变形后，我们计算泊桑比、剪变模量和压缩模量。

在梁的试验中，我们从受压面的线性载荷/应变关系曲线上见到明显的偏离时，就观察到临界折皱应力的出现。这一点产生以后，梁的挠度会出现明显增加。从壁面和蕊子的性质，我们可以计算临界应力。用本文所发表的一族曲线，我们可以简化这种计算。从结果可以看到实验和理论的临界折皱应力是密合一致的。

### 2.1 理论

推导将分三步进行：(1)把压缩壁面看成是置于弹性基础上的；(2)导出弹簧常数；(3)求压缩应力的最小值。

第(1)步：把受压壁面(图2，面1)看作为由弹性蕊子支承的梁，蕊子有一有效厚度 $D$ (定义为两壁面形心轴之间的距离)，并设拉伸壁面(面2)象一个刚性的靠垫，在折皱失稳时，蕊子的变形到此为止。壁面1的变形微分方程为<sup>[18],[19]</sup>

$$E_{f1} I_{f1} \frac{d^4 v}{dx^4} + F \frac{d^2 v}{dx^2} + kv = 0 \tag{2.1}$$

其中 $E_{f1}$ =壁面1的杨氏模量； $I_{f1}$ =壁面1单位宽绕其形心平面转动时的惯性矩； $u, v$ =分别在 $x, y$ 方向的变形； $F$ =壁面1每单位宽度上的有效弯曲压缩力； $k$ =壁面1每单位宽度的弹簧常数；而 $l$ =皱纹的波长，设：

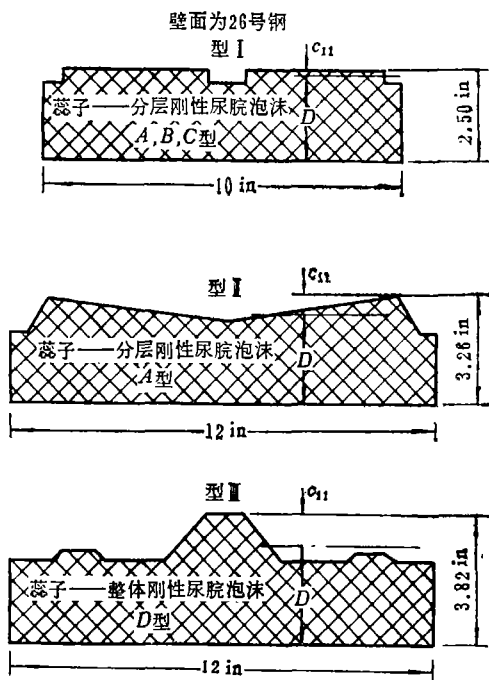
$$v = A \sin \alpha x \tag{2.2}$$

其中 $A$ =位移的幅度， $\alpha = \pi/l$ 。

把式(2.2)代入式(2.1)，得

$$F = E_{f1} I_{f1} \alpha^2 + k/\alpha^2 \tag{2.3}$$

第(2)步：弹簧常数 $k$ 是根据弹性蕊子计算求得的，象图2那样，是受边界条件所制约的。数学上讲，在平面应变的条件下，蕊子的运动是用Airy函数 $\phi$ 的偏微分方程<sup>[20]</sup>所决定的。



(注：1 in=25.4mm)

图1 板条形状<sup>[5]</sup>

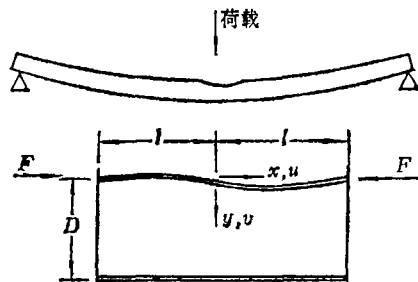


图2 弯曲折皱模型<sup>[5]</sup>

$$\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} = 0 \quad (2.4)$$

式(2.4)的解为 $\phi(x, y) = f(y) \sin ax$ , 其中

$$f(y) = C_1 \cosh ay + C_2 \sinh ay + C_3 y \cosh ay + C_4 y \sinh ay \quad (2.5)$$

为了决定四个系数, 我们需要四个边界条件:

$$\text{在 } y=0 \text{ 处, } \sigma_y = -q_m \sin ax; \quad \varepsilon_x = 0 \quad (2.6)$$

$$\text{在 } y=D \text{ 处, } \varepsilon_x = 0; \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (2.7)$$

其中 $q_m$  = 壁面1变形时, 交界面上应力幅度;  $\sigma$  和  $\varepsilon$  分别为应力和应变。在求得弹簧常数( $k$ )后<sup>[5]</sup>, 把 $k$ 代入方程(2.3)。

第(3)步: 在(2.3)式中, 用 $k$ 代入(为了得到临界压应力 $F_{cr}$ )把 $F$ 对 $\beta$ 的导数置于零。其结果为

$$2E_{f1}I_{f1}\frac{\beta}{D^2} + E_c D \frac{\partial}{\partial \beta} f(\beta, \nu) = 0 \quad (2.8)$$

其中 $\beta = \alpha D$ ;  $\nu$  = 泊桑比。

定义:

$$\bar{t} = (12 I_{f1})^{\frac{1}{3}} \quad (2.9)$$

或

$$I_{f1} = \frac{\bar{t}^3}{12} \quad (2.10)$$

物理上讲,  $\bar{t}$  是某一平直壁面的等效厚度, 这一平直壁面的惯性矩和成型壁面在其形心上的惯性矩相等。于是,  $\bar{t}$  和形心临界应力的乘积等于壁面1每单位宽度所受的临界有效力。如果成型壁面是平直壁面时,  $\bar{t}$  化为真正厚度。把(2.10)式代入(2.8)式, 重新排列, 得:

$$R = \frac{\bar{t}}{D} \left( \frac{E_{f1}}{E_c} \right)^{\frac{1}{3}} = - \left[ \frac{6}{\beta} \frac{\partial}{\partial \beta} f(\beta, \nu) \right]^{\frac{1}{3}} \quad (2.11)$$

对于任一夹蕊梁而言,  $\bar{t}$ ,  $D$ ,  $E_{f1}$ ,  $E_c$  及  $\nu$  都是已知的, 壁面1的有关形心临界应力 $\bar{\sigma}_{cr}$  为

$$\bar{\sigma}_{cr} = \frac{F_{cr}}{\bar{t}} = A_1 (E_{f1} E_c^2)^{\frac{1}{3}} \quad (2.12)$$

其中应力因子为

$$A_1 = R^2 \frac{\beta_{cr}^2}{12} + \frac{f(\beta_{cr}, \nu)}{R} \quad (2.13)$$

理论结果表示如图3, 其中应力因子 $A_1$ 是用 $R$ 表示的;  $R$  是壁面和蕊子的相对刚度的度量。泊桑比从0到0.4之间变动。

壁面1的最外侧纤维的临界应力为

$$\sigma_{cr} = \left( \frac{C_1 + c_{11}}{C_1} \right) \bar{\sigma}_{cr} \quad (2.14)$$

其中  $C_1 = D a_2 E_{f2} E_{f1} / [a_1 + a_2 E_{f2} / E_{f1}]$  = 壁面1的中性轴到梁的中性轴的距离;  $a_1, a_2$  = 壁面1和2的截面面积,

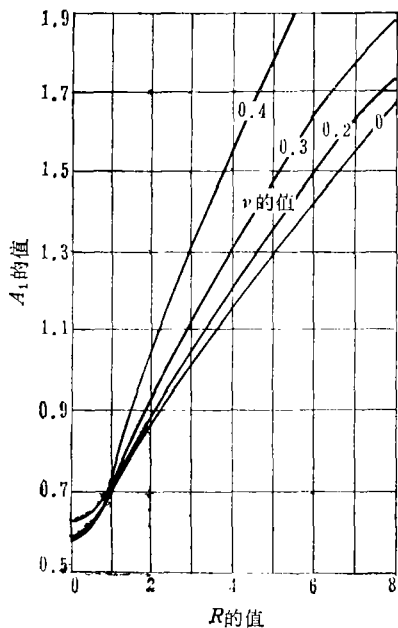


图3 应力因子( $A_1$ )与板条性能<sup>[5]</sup>( $R$ )

$E_{f1}, E_{f2}$  = 壁面1和2的杨氏模量; 及  $c_{11}$  = 壁面1的中性轴到其最外纤维的距离。

## 2.2 实验

实验的板条有五种型式, 每种测三次(型 I 有三种蕊子, 型 II 和 III 各有一种蕊子)。形状见图1。所有试样宽10吋(250毫米)或12吋(300毫米), 长48吋(1200毫米), 是从生产设备上由较大板条上锯下来的。一切都用26号钢[0.020吋(0.50毫米)厚]的壁面制成。板条型 I 是从三种刚性尿脞泡沫叠成压成的, 型 II 是用其中的一种刚性尿脞泡沫压成, 而型 III 是不分层的泡沫安装就位的。所有蕊子都近似地有密度2磅/立方呎(32千克/米<sup>3</sup>)。

康铜箔应变仪是装在梁的中点的成型壁面的各最高点上的。板条单跨装在距离45吋(1140毫米)的支承上。载荷是通过Tinius Olsen 试验机施加的, 这种试验机有自动载荷/挠度记录仪。支点有木质垫片, 在加载点, 有一3½吋(89毫米)宽的垫片, 在垫片上挖空一些, 以便安装应变片。

在加载试验后, 在靠近支点的部份, 从每一板条试样锯出4吋×4吋(100毫米×100毫米)一段试样。在试样的壁面原封不动的条件下进行压力试验, 压载和压缩变形自动记录下来。梁的纵向变形可以用两个度盘式指示器记录下来。从这些测量中, 我们计算蕊子的杨氏模量和剪切模量( $E_c$ 及 $G_c$ )。

## 2.3 理论和实验比较

表1是临界折皱应力的理论和实验的比较。理论值是从板条几何形状和蕊子性质, 根据图3, 和(2.9)、(2.12)、(2.14)计算求得。从表1中可以看到, 实验值和理论值很一致。实验临界折皱应力和理论值之比在83%到105%之间, 平均为99%。除了一点外, 其它各点都在5%之内, 这说明理论是完全满足工程分析和设计的需要的。

从这个研究中, 我们得出下列结论:

表 1 临界应力的实验值和理论值的比较<sup>[5]</sup>

壁面型号 (1)	板条号 (2)	密度 lb/ft <sup>3</sup> (3)	蕊子性质 <sup>(a)</sup>		泊桑比 $\nu$ (6)	临界应力(kips/in <sup>2</sup> )		偏离 实验值 理论值 (9)
			$E_c$ lb/in <sup>2</sup> (4)	$G_c$ lb/in <sup>2</sup> (5)		实验值 (7)	理论值 (8)	
I	1	1.9	625	246	0.267	24.8	25.4	0.98
I	2	1.9	650	259	0.255	24.2	25.6	0.95
I	1	2.0	579	226	0.281	24.5	24.1	1.02
I	2	2.0	616	224	0.371	28.0	27.9	1.00
I	1	2.1	441	188	0.171	21.2	20.1	1.05
I	2	2.1	455	191	0.191	20.6	20.4	1.01
II	1	1.9	635	275	0.152	33.7 <sup>(b)</sup>	40.8	0.83
II	2	1.9	679	288	0.177	42.5	41.1	1.01
III	1	2.2	595	271	0.097	49.1	49.0	1.00
III	2	2.2	631	276	0.142	50.4	50.0	1.01
							平均	0.99

(a) 蕊子性质是从蕊子压力试验求得的。

(b) 测值较低, 可能由于蕊子中有局部空缺。

注: 1lb/ft<sup>3</sup>=16.02kg/m<sup>3</sup>; 1lb/in<sup>2</sup>=6.90kN/m<sup>2</sup>; 1kips/in<sup>2</sup>=6.9MN/m<sup>2</sup>

- a. 用轻型金属为成形壁面和用泡沫填充的夹蕊板条的最终屈曲破坏, 是由压缩壁面上产生弹性折皱而发展的。折皱形成后, 梁的挠度加速增加。
- b. 临界折皱应力可以从壁面和蕊子的性能中求得。
- c. 临界折皱应力可以用来作为壁面容许压应力的设计基础。

### 三、弯曲性能

用分析法、实验法和数值法对夹蕊板条进行弯曲性能的研究。

#### 3.1 分析研究<sup>[7], [21]</sup>

基本假定为: (1) 壁面的杨氏模量大于蕊子的杨氏模量, 因此, 假定全部弯曲应力是由壁面负担的; 及(2) 在壁面和蕊子之间有很好的粘结。

下述分析从文献[7]导出, 总弯矩 $M$ 是等于复合作用产生的力矩 $M_o$ 和壁面相对于它们自己的形心轴的弯曲产生的力矩,  $M_o$ :

$$M = M_o + M_o \quad (3.1)$$

把弯曲变形和剪切变形合在一起, 得微分方程

$$\frac{d^4 y}{dx^4} - C_y \frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{C_y}{E_1 I} M + \frac{dV}{dx} \frac{1}{E_1 I_o} \quad (3.2)$$

其中  $C_y$  = 板条性质<sup>[7]</sup>;  $E_1$  = 壁面1的杨氏模量;  $I, I_o$  = 复合惯性矩, 和壁面的惯性矩, 它们都对 $E_1$ 规一化了;  $V$  = 剪力。

积分, 设 $C_1$ 为积分常数

$$\frac{d^3 y}{dx^3} - C_y \frac{dy}{dx} = -\frac{C_y}{E_1 I} \int M dx + \frac{V}{E_1 I_o} + C_1 \quad (3.3)$$

对于对称载荷的板条而言,  $dy/dx$ 和 $V$ 在中点都等于零, 所以

$$C_1 = \frac{C_y}{E_1 I} \int M dx \Big|_{x=L/2} \quad (3.4)$$

(3.3)式再积分一次

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - C_y y = -\frac{C_y}{E_1 I} \iint M dx^2 + \frac{M}{E_1 I_o} + C_1 x \quad (3.5)$$

因为在 $x=0$ 处,  $d^2 y/dx^2=0$ , 所以, 第二个积分常数 $C'_1=0$ , 这里假定在支承点外侧只有很少或根本没有悬梁部份。在实际上,  $M$ 是已知的, (3.5)式可以写成一种普遍的式子

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - C_y y = C_4 x^4 + C_3 x^3 + C_2 x^2 + C_1 x + C_0 \quad (3.6)$$

其解为

$$y = D_4 x^4 + D_3 x^3 + D_2 x^2 + D_1 x + D_0 + F_1 \exp[\sqrt{C_y} x] + F_2 \exp[-\sqrt{C_y} x] \quad (3.7)$$

为了找常数 $F_1$ 和 $F_2$ , 我们用下述边界条件

$$\text{在 } x = \frac{L}{2}, \quad \frac{dy}{dx} = 0 \quad (3.8)$$

$$\text{在 } x = 0, \quad y = 0 \quad (3.9)$$

这里的 $L$ 为跨距的长度。其结果是

$$F_2 = \frac{D_4 \frac{L^3}{2} + 3D_3 \frac{L^2}{4} + D_2 L + D_1 - D_0 C_y^{\frac{1}{2}} \exp[\sqrt{C_y} L/2]}{C_y^{\frac{1}{2}} [\exp[\sqrt{C_y} L/2] + \exp[-\sqrt{C_y} L/2]]} \quad (3.10)$$

$$F_1 = -D_0 - F_2 \quad (3.11)$$

$D_0, D_1, D_2, D_3$  及  $D_4$  可以用  $C_y, C_0, C_1, C_2, C_3$  及  $C_4$  表示。壁面1上的应力为

$$S_{11} = \frac{-\left(M - E_1 I_0 \frac{d^2 y}{dx^2}\right)}{a_1 D} - E_1 c_{11} \frac{d^2 y}{dx^2} \quad (3.12)$$

其中,  $a_1$  为壁面1的截面面积;  $c_{11}, D$  为图4所示尺寸, 而且

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = 12D_4 x^2 + 6D_3 x + 2D_2 + C_y [F_1 \exp[\sqrt{C_y} x] + F_2 \exp[-\sqrt{C_y} x]] \quad (3.13)$$

在壁面1上其它各点的应力可以用其它值代入  $c_{11}$ , 并用相同的方法求得。

蕊子负担的剪应力为

$$S_{s0} = \frac{V - E_1 I_0 \frac{d^3 y}{dx^3}}{bD} \quad (3.14)$$

其中

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = 24D_4 x + 6D_3 + C_y^{1.5} [F_1 \exp[\sqrt{C_y} x] - F_2 \exp[-\sqrt{C_y} x]] \quad (3.15)$$

$b$  为壁条的宽度。

### 3.2 实验<sup>[7]</sup>

两件试验板条的形状(型I及II)见图1。应变仪是装在板条的最高处的, 即1号板条的六分之一、三分之一和二分之二的跨度处。在跨度中点, 在叠层板条上, 其槽沟底部也装着应变仪。在泡沫填充的板条上, 在不同高程处也装着应变仪(2号和3号应变仪)。由于压纹的存在, 内侧壁面上不装应变仪。

板条是在吸气箱内测试的。试样长48吋(1220毫米), 装在1吋(25.4毫米)直径的管内, 支点跨度为45吋(1140毫米)。成型面向上方。这个吸气箱上盖着0.006吋(0.15毫米)厚的聚乙烯薄膜, 用胶带粘接在箱的两侧。

挠度是在一个支点, 在1/6的跨度处, 在1/3的跨度处和在跨度中点用度盘指示器同时测量的。吸气是用一真空泵通过箱的一侧的孔口进行, 并用一小型风档调节。压力可以用一水柱测压器测量。

### 3.3 理论和实验结果

表2是理论和实验结果的比较。表中一切数值都是以载荷100磅/呎<sup>2</sup>(4790N/m<sup>2</sup>)为基础的

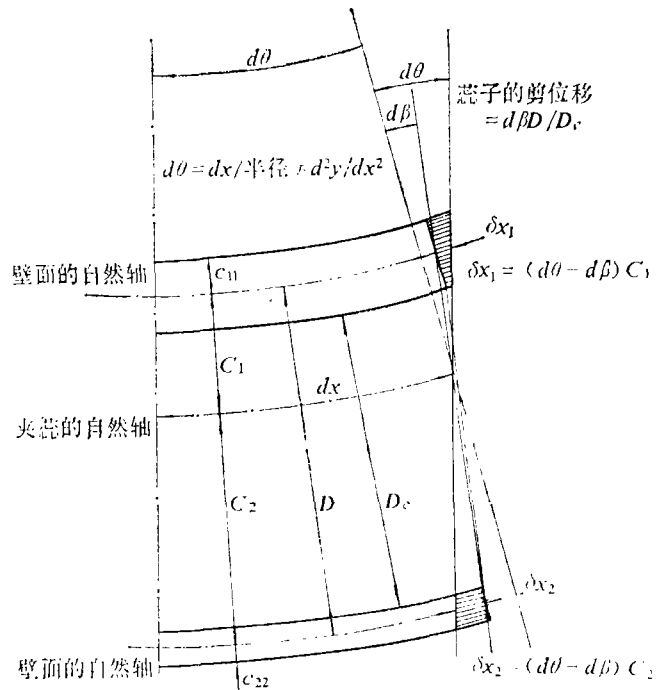


图4 成形壁面夹蕊板条的挠度<sup>[7]</sup>

表 2 实验和理论结果<sup>[7]</sup> (载荷=100磅/呎<sup>2</sup>)

板条	蕊子密度 磅/呎 <sup>3</sup>	剪力模量 磅/吋 <sup>2</sup>	挠度 (吋) <sup>(a)</sup>			千磅/吋 <sup>2</sup>				
						应变仪 <sup>(b)</sup> 1号			在L/2	
			L/6	L/3	L/2	L/6	L/3	L/2	2号	3号
型 I : A	1.9	232								
实验			0.165	0.270	0.300	-4.25	-5.80	-6.50	—	+6.53
理论			0.162	0.270	0.307	-4.49	-6.25	-6.72	—	+7.93
偏差(%) <sup>(c)</sup>			-1.9	0.0	+2.3	+5.3	+7.2	+3.3		+17.7
型 I : B	2.0	237								
实验			0.160	0.265	0.295	-5.10	-5.40	-6.90	—	+6.14
理论			0.159	0.265	0.301	-4.45	-6.19	-6.68	—	+7.72
偏差(%)			-0.6	0.0	+2.0	-14.6	+12.8	-3.3		+20.5
型 II : C	2.1	290								
实验			0.125	0.225	0.255	-4.75	-5.00	-5.90	—	+4.05
理论			0.135	0.225	0.255	-4.09	-5.67	-6.13	—	+5.98
偏差(%)			+7.4	0.0	0.0	-16.1	+11.8	+3.8		+32.3
型 III :	2.2	464								
实验			0.060	0.095	0.105	-6.85	-11.10	-13.60	-1.55	+2.75
理论			0.056	0.095	0.108	-9.49	-13.55	-14.69	-1.74	+2.57
偏差(%)			-7.1	0.0	+2.8	+27.8	+18.1	+7.4	+10.9	-7.0

(a)蕊子的剪切模量是L/3处的挠度测定的。

(b)应变仪1,2,3号的位置分置于型 I, II 的壁面1的不同高度 (见图1)。

(c)偏差=[(理论-实验)/理论]×100, 平均偏差: 挠度=0.4%, 应力=8.6%。

注: 1磅/呎<sup>3</sup>=16.02千克/米<sup>3</sup>, 1磅/吋<sup>2</sup>=67.9千牛顿/米<sup>2</sup>, 1吋=25.4毫米, 1千磅/吋<sup>2</sup>=6.9兆牛顿/米<sup>2</sup>

理论计算用了计算机。壁面性质是在假定壁面的全部面积都有效的条件按一般方法计算的。蕊子厚度 $D$ 。直接用于厚壁板条, 并非用于轻型金属薄板的成型壁面。因此采用了平均蕊厚。

计算所得的挠度和实验值很吻合。模量也是合理的, 计算所得的挠度/跨度曲线和表2所示的实验也很吻合。

结论是: 在屈曲载荷限度以内, 上述方法对夹蕊板条(有成型壁面)的挠度和应力计算提供了一个精确的计算方法。实验值和理论值很吻合。理论适用于成型的和平直的壁面, 适用于不同或相同材料的壁面, 在弯曲载荷下都一样适用。

### 3.4 数值方法

从数值计算看, 在分析象建筑用的夹蕊板条这样的棱柱形杆件时, 有限样条法和有限棱柱法将是最有效的, 而在采用有限元法时, 由于费时费钱的缘故, 几乎是不可取的<sup>[22]</sup>。张佑敏曾写过关于有限样条法求解板的弯曲问题的开创性的论文<sup>[23], [24]</sup>, 以后又用这个方法处理了平直壁面的夹蕊板问题<sup>[25]</sup>, 有限棱柱法也曾由张佑敏等<sup>[26]</sup>描述过。张佑敏<sup>[27]</sup>亦曾详细讨论过有限样条法、有限棱柱法, 以及有限层元法的应用。

在本文中, 我们将有限棱柱法结合有限样条法, 来处理具有成形壁面的夹蕊板条问题, 其结果将用来和Hartsock-张建平<sup>[7]</sup>关于弯曲问题的分析解进行比较。

一般平衡矩阵方程为

$$S\delta = F \quad (3.16)$$

其中  $S$  = 劲度矩阵;  $F$  = 载荷矢量, 而  $\delta$  = 位移矢量。

### 3.4.1 夹蕊构件的有限样条棱柱模型<sup>[8]</sup>

夹蕊构件的薄壁用有限壳样条近似, 而弱蕊子则用有限棱柱作为模式。有关上述这类构件矩阵的建立, 业已在教科书中详细叙述 (张佑啟)<sup>[25]</sup>, 下面只讲一些关键问题。

#### 3.4.1.1 薄壁面模型的有限样条

同时考虑样条的平面应力作用和弯曲作用, 简支样条的形状函数 (图5) 为

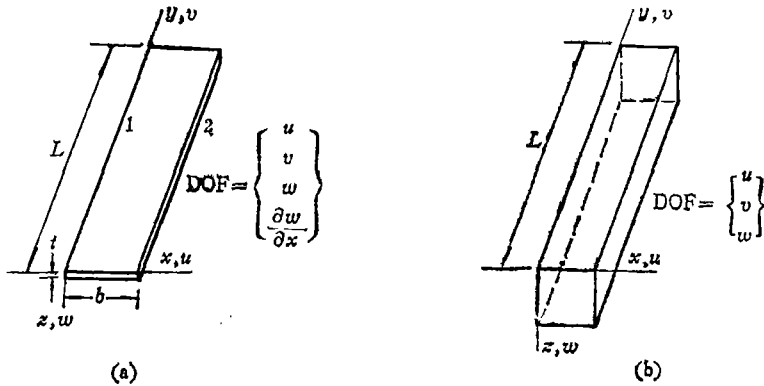
$$u = \sum_{m=1}^r [1 - \bar{x}, \bar{x}] \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}_m \sin \frac{m\pi y}{L} \quad (3.17)$$

$$v = \sum_{m=1}^r [1 - \bar{x}, \bar{x}] \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}_m \cos \frac{m\pi y}{L} \quad (3.18)$$

$$w = \sum_{m=1}^r \begin{bmatrix} (1 - 3\bar{x}^2 + 2\bar{x}^3), (x - 2\bar{x}x + \bar{x}^2x) \\ (3\bar{x}^2 - 2\bar{x}^3), (\bar{x}^2x - \bar{x}x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \sin \frac{m\pi y}{L} \quad (3.19)$$

其中  $\bar{x} = x/b$ , 而  $b, L$  则分别是样条的宽和长。

在线性分析中, 平面应力项和弯曲项并不耦合, 这两种作用的劲度矩阵是互不联系的。张佑啟给出了这两种作用的劲度矩阵<sup>[25]</sup>。



(a) 长方弯曲样条<sup>[8]</sup>

(b) 长方有限棱柱<sup>[8]</sup>

图 5

#### 3.4.1.2 弱蕊子的有限棱柱模型

从图5可以看到, 用于直棱柱体的适用位移函数为

$$u = \sum_{m=1}^r C_k U_{km} \sin \frac{m\pi y}{L} \quad (3.20)$$

$$v = \sum_{m=1}^r C_k V_{km} \cos \frac{m\pi y}{L} \quad (3.21)$$

$$w = \sum_{m=1}^r C_k W_{km} \sin \frac{m\pi y}{L} \quad (3.22)$$



其中 $C_k$ 是在 $x-z$ 方向插值所用的等参元的形状函数(图6)。具有4个角点为结点(ISW4型)的等参四边形的形状函数为<sup>[8]</sup>

$$C_i = \frac{1}{4}(1 + \eta_i \eta)(1 + \xi_i \xi) \quad (3.23)$$

具有6个结点的等参四边形(ISW6)的形状函数为<sup>[8]</sup>:

$$\text{角结点:} \quad C_i = \frac{1}{4} \eta_i \eta (1 + \eta_i \eta)(1 + \xi_i \xi) \quad (3.24)$$

$$\text{边线中点结点:} \quad C_i = \frac{1}{2} (1 + \xi_i \xi)(1 - \eta^2) \quad (3.25)$$

$\xi$ 和 $\eta$ 是 $x$ 和 $z$ 的局部坐标。其劲度矩阵为

$${}^p S_{ijmn} = \int {}^p B_{i,m}^T {}^p D {}^p B_{j,n} d(\text{vol}) \quad (3.26)$$

其中

$${}^p B_{im} = \begin{bmatrix} \frac{\partial C_i}{\partial x} \sin \frac{m\pi y}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -C_i \frac{m\pi}{L} \sin \frac{m\pi y}{L} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial C_i}{\partial z} \sin \frac{m\pi y}{L} \\ C_i \frac{m\pi}{L} \cos \frac{m\pi y}{L} & \frac{\partial C_i}{\partial x} \cos \frac{m\pi y}{L} & 0 \\ 0 & \frac{\partial C_i}{\partial z} \cos \frac{m\pi y}{L} & C_i \frac{m\pi}{L} \cos \frac{m\pi y}{L} \\ \frac{\partial C_i}{\partial x} \sin \frac{m\pi y}{L} & 0 & \frac{\partial C_i}{\partial z} \sin \frac{m\pi y}{L} \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

${}^p D$ 是各向同性材料的弹性矩阵。

从自然坐标( $x-z$ )变为局部坐标( $\xi-\eta$ )的几何变换,可以用一般的有限元法进行,从而求得了劲度矩阵。

### 3.4.1.3 薄壁面和弱蕊子的耦合

我们假定在加载过程中,薄壁面和弱蕊子是密切接触的,因此,劲度矩阵很易耦合,我们应该看到,在前述调和级数形式的矩阵中, $m$ 和 $n$ 不等的劲度矩阵恒等于零,所以,它们之间的耦合被解除。静力平衡方程为

$${}^s S_{mm}^p \delta_m^p + {}^s S_{mm}^b \delta_m^b + {}^p S_{mm} \delta_m = F_m \quad (3.28)$$

其中

${}^s S_{mm}^p$  是弯曲样条的平面位移劲度矩阵

${}^s S_{mm}^b$  是弯曲样条的弯曲劲度矩阵

${}^p S_{mm}$  是有限棱柱的劲度矩阵

${}^s \delta_m^p$ 和 ${}^s \delta_m^b$  分别为弯曲样条的平面位移和弯曲的插值参数

${}^p \delta_m$  是有限棱柱的插值参数

$\delta_m$  是全部插值参数

$F_m$  是加载矢量

上标 $s$ 表示样条变量,  $p$ 表示有限棱柱变量. 越出平面的加载的加载矢量 ( $F_m$ ) 可以用棱柱的位移参数表示, 即

$$F_m = \int q C_k W_{km} \sin \frac{m\pi y}{L} d(\text{vol}) \quad (3.29)$$

而 $q$ 则为载荷密度.

### 3.4.1.4 数值实例

(a) 在图7, 壁面1的皱纹深度 $Y$ 是变量. 这一板条的性质是: 薄壁的杨氏模量=1000.0单位; 薄壁的泊桑比=0.0, 薄壁厚=0.02单位; 蕊子的杨氏模量=1.0单位. 在分析时, 采用了ISW6型, 弯曲计算的结果见图8. 其结果和Hartsock和张建平的分析解很接近<sup>[7]</sup>.

(b) 研究了成形壁面夹蕊板条的商品型号 (见图1的型号 I). 其性质和尺寸为:

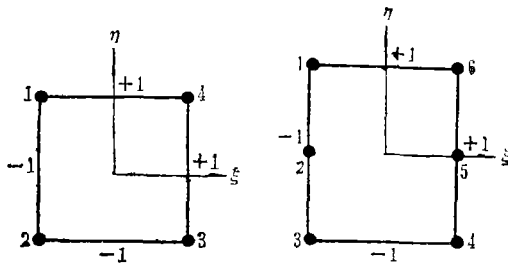


图6 ISW4及ISW6型<sup>[6]</sup>

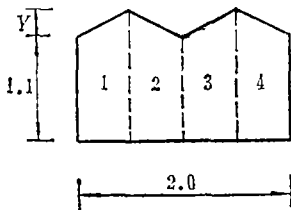


图7 网格细部<sup>[8]</sup>

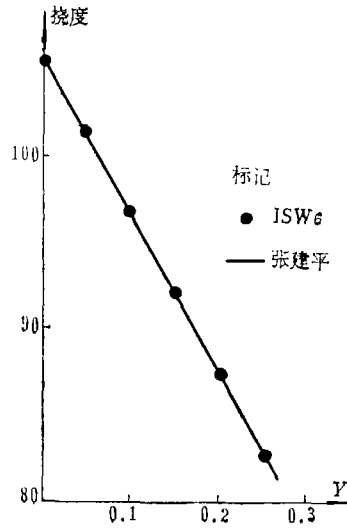


图8 挠度<sup>[8]</sup>对Y的图

蕊子的性质:

$$E_c = 679 \text{psi} (4685 \text{kN/m}^2); \nu_c = 0.177$$

顶壁面和底壁面的性质:

$E_f = 29.5 \times 10^6 \text{psi} (203,550 \text{MPa}); \nu_v = 0.267; t_f = 0.02'' (0.51 \text{mm})$  跨度=45'' (1143 mm); 加载=100psi (4.79kN/m<sup>2</sup>).

表3上可以看到计算所得的中点挠度和Hartsock-张建平<sup>[7]</sup>分析解的结果的比较.

表3 中点挠度

中点挠度	
ISW6型	0.176in(4.47mm)
Hartsock-张建平 <sup>[7]</sup>	0.179in(4.55mm)

### 3.4.1.5 数值分析的讨论<sup>[8]</sup>

成形壁面板条是按有限-棱柱-样条模型计算的. 这个方法可以节约大量计算或实验的费用和劳动, 而且易于用来处理成型壁面的板条, ISW6型比ISW4型更精确, 我们推荐在这类计算中采用前者.

## 四、轴 向 稳 定

### 4.1 数值分析

在轴向压力下, 夹芯板条的翘屈问题用 3.4 节所述的有限-样条-棱柱模型研究过。稳定加载系统的平衡矩阵方程和(3.16)式相似, 为

$$S\delta + G\delta = F \quad (4.1)$$

其中  $G$  = 几何劲度矩阵。

本系统的稳定性研究, 相当于下述齐次式中求得一族非无效解,

$$(S + \lambda G^*)\delta = 0 \quad (4.2)$$

其中  $G^*$  为相当于在固定不变的预加应力分布  $\sigma_{ij}$  下的几何劲度矩阵。这显然是一个广义的特征值问题。

有限-样条-棱柱模型业已在方程式(3.17)~(3.27)中说明过了。

在抗压杆件的稳定分析中, 很明显只有轴向应力  $\sigma_{yy}$  的作用能引起失稳。样条元的几何劲度可以证明<sup>[8]</sup>为

$$G_{mn}^* = \begin{bmatrix} G_{mn}^u & 0 \\ 0 & G_{mn}^v \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

其中

$$G_{mn}^u = t \sigma_{xx} \int g_{um}^T g_{un} d(\text{area}) + t \sigma_{yy} \int g_{vm}^T g_{vn} d(\text{area}) \quad (4.4)$$

$$G_{mn}^v = t \sigma_{yy} \int g_{wm}^T g_{wn} d(\text{area}) \quad (4.5)$$

这里的  $g_u$ ,  $g_v$ ,  $g_w$  分别为和位移变量  $u$ ,  $v$  和  $w$  有关的斜度矩阵, 而  $t$  则为样条的厚度。它们可以从下列式子求得

$$g_{um} = \left[ (1 - \bar{x}) \frac{m\pi}{L} \cos \frac{m\pi y}{L}, \bar{x} \frac{m\pi}{L} \cos \frac{m\pi y}{L} \right] \quad (4.6)$$

$$g_{vm} = \left[ -(1 - \bar{x}) \frac{m\pi}{L} \sin \frac{m\pi y}{L}, -\bar{x} \frac{m\pi}{L} \sin \frac{m\pi y}{L} \right] \quad (4.7)$$

$$g_{wm} = \left[ (1 - 3\bar{x} + 2\bar{x}^3), (x - 2\bar{x}x + x^2\bar{x}), (3\bar{x}^2 - 2\bar{x}^3), (\bar{x}^3x - \bar{x}x) \right] \frac{m\pi}{L} \cos \frac{m\pi y}{L} \quad (4.8)$$

把壁面和蕊子耦合, 用于稳定性分析的平衡方程是<sup>[9]</sup>

$${}^s S_{mm}^s \delta_m^s + {}^s S_{mm}^u \delta_m^u + {}^s S_{mm}^v \delta_m^v + \lambda G_{mm} \delta_m = 0 \quad (4.9)$$

其中  $G_{mm}$  = 总体的几何劲度矩阵, 矩阵中其余各量业已在(3.28)式中定义了。

### 4.2 数值实例

(a) 板条和 3.4.1.4 节的例(a)相同。采用 ISW6 型, 它和 Allen 书<sup>[1]</sup>中所发表的解相符。结果见图 9。

(b) 板条和 3.4.1.4 节的例(b)相同, 采用 ISW6 型后, 给出屈曲载荷 12.07kip (53.71kN)。这里再次证明, ISW6 型比 ISW4 型更加精确。对于平直壁面夹芯板条而言, ISW4 型给

出满意的结果, 尽管ISW6型更加优越。

### 4.3 劲度变化的蕊子<sup>[12]</sup>

由于养护不均或其它原因, 夹层蕊子的各层常常有不同劲度。在本文中, 平直壁面夹蕊板条在具有蕊子各层不同劲度时, 采用有限层法进行研究<sup>[12], [25], [28]</sup>。其算式和 4.1 节的 (4.1) ~ (4.9) 式相似。

把图10中的一典型夹蕊长方板分成若干层(图11), 它们算作是在边界上简支的。假定夹蕊板的壁面是等厚的, 而且是各向同性的。蕊子的劲度和分层的分布假设有关

$$E_o t_o = \sum E_i t_i \tag{4.10}$$

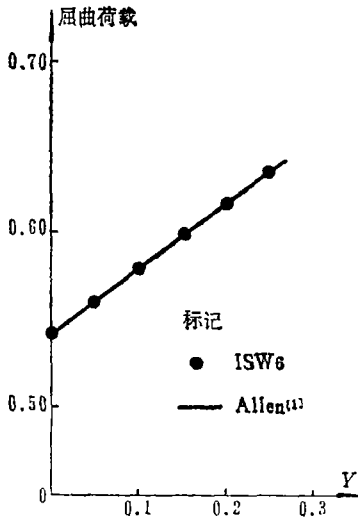


图9 屈曲<sup>[8]</sup>对Y的图

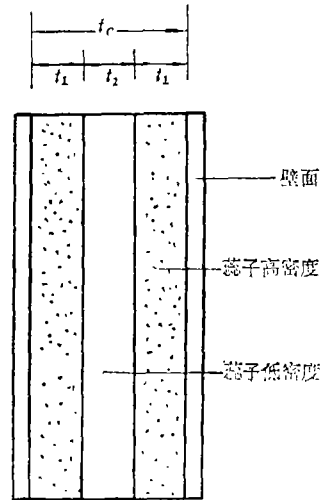


图10 蕊子变密度的夹蕊板条<sup>[12]</sup>

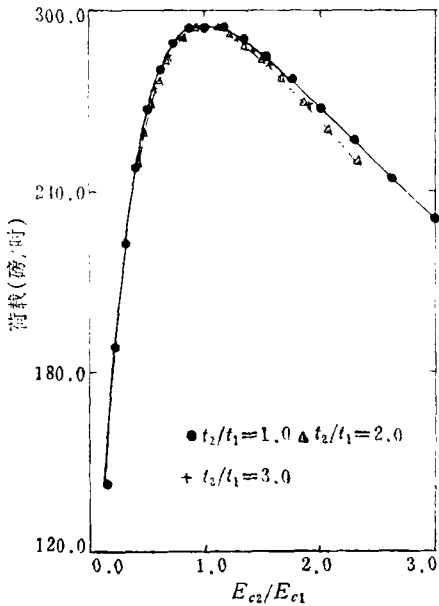


图11 蕊子变劲度的短夹蕊板条的屈曲荷载<sup>[12]</sup>

其中 $E_o$ 为蕊子的杨氏模量,  $t_o$ 为蕊子的厚度,  $E_i$ 为蕊子各层的杨氏模量, 而 $t_i$ 为蕊子各层的厚度。

具有均匀蕊子材料的四方夹蕊板的屈曲荷载见表4。蕊子材料为聚氨酯, 其泊桑比为0.25, 而其杨氏模量为 $5175 \text{ kNm}^{-2}$ 或 $750 \text{ psi}$  (密度约为  $40 \text{ kgm}^{-3}$  或  $2.5 \text{ lb ft}^{-3}$ )。壁面钢的泊桑比和杨氏模量分别为0.3和 $207 \text{ GPa}$ 。壁面和蕊子的厚度分别为 $0.508 \text{ mm}$ 和 $12.7 \text{ mm}$ 。所有夹蕊板都分成五层(图10)。对蕊子密度不均匀的正方夹蕊板而言, 计算结果见图11, 在这个计算中, 平均杨氏模量为 $5175 \text{ kNm}^{-2}$  ( $750 \text{ psi}$ )。

表4 夹蕊板的轴向屈曲荷载<sup>[12]</sup>

尺寸 (in)	屈曲荷载 (lbf) <sup>(a)</sup>	
$L_x=20$	Allen <sup>[1]</sup>	300.96 (97.74%)
$L_y=20$	本文 <sup>[12]</sup>	294.16

(a)  $1 \text{ lbf} = 4.45 \text{ N}$

图 12 给出了另一组较长板壳的计算结果。这些板条长 3m (120in)，宽 1m (40in)，厚 7.7cm (3.04in)。

对蕊子密度不均匀的正方夹蕊板而言，最佳结果是在当外层和内层的劲度比为 1 时的那一种夹蕊板上得到的。这就指出，当蕊子材料在整个蕊子各个厚度上密度均匀时，才是最佳的。所以，在制作过程中，最好使蕊子到处都均匀。如果养护不当，蕊子的外层劲度和内层不同，板的强度降低。本文发表了在不均匀劲度下，板的屈曲强度的定量数据。定性地讲，不论那一部份蕊子增强或是减弱了，对蕊子的整体劲度都有影响 (4.10 式)，于是，抗屈曲强度一定下降。直觉地讲，有效的夹蕊柱体应该有高劲度的壁面，和轻弱的蕊子，这样柱体的回转半径 (用转换面积的概念) 才最大。

## 五、自由振动

### 5.1 有限-棱柱-样条分析<sup>[14]</sup>

本节分析成形壁面夹蕊板条的自由振动。其导出的振型形状 (特征矢量) 可以用来在象随机激振时那样造成的强迫振动的模型分析。

如果在动力学问题中忽视阻尼和强迫外力项，则矩阵微分方程可以简化为

$$M\ddot{\delta} + K\delta = 0 \quad (5.1)$$

其中  $M$  为质量矩阵， $K$  为劲度矩阵， $\delta$  为位移矢量，这种方程的一般解可以写成

$$\delta = \bar{\delta} \exp[i\omega t] \quad (5.2)$$

把 (5.2) 式代入 (5.1) 式，得

$$-\omega^2 M \bar{\delta} + K \bar{\delta} = 0 \quad (5.3)$$

其中  $\omega$  为自然频率，这是一个特征值问题，从此，我们可以用常法决定  $\omega^2$ 。

根据 3.4.1 节，(3.17)~(3.19) 式可以简化为

$$\delta = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^r [N_m(x)] \{\delta_m\}$$

其中  $N_m(x)$  为样条的形状函数。

弯曲样条的协调质量矩阵可以用形状函数表示，基本的单位子矩阵为

$$^o[M_{ij}]_{mn} = \int \rho_j t_j [N_i]_m^T [N_j]_n d(\text{area}) \quad (5.4)$$

其中  $\rho_j$  为薄壁面的密度，而  $t_j$  为薄壁面的厚度。

用 (3.20)~(3.27) 式所描述的有限棱柱 (ISW6 型，图 6) 来制定蕊子的模型。

如在标准的有限元法中一样，我们可把自然坐标 ( $x-z$ ) 变换成局部坐标 ( $\xi-\eta$ )，由此即可求得劲度矩阵。

蕊子的质量矩阵可以用标准的有限元法求得：于是有

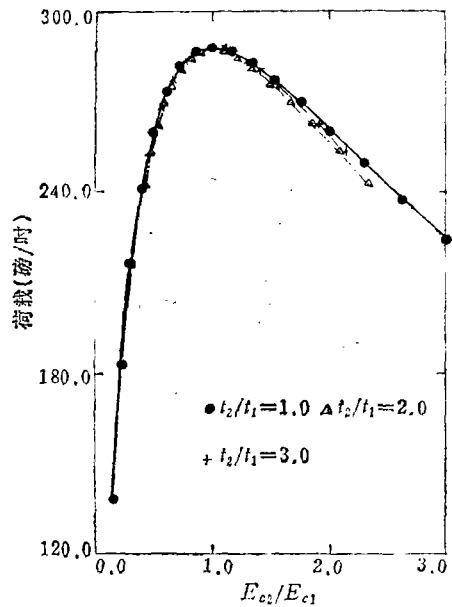


图 12 蕊子变劲度的长夹蕊板条的屈曲荷载<sup>[12]</sup>

$${}^p[M_{ij}]_{mn}^o = \int_{vol} \rho_p [C_i]_m^T [C_i]_n^T d(vol) \quad (5.5)$$

其中 $\rho_p$ 为蕊子材料的密度,  $[C_i]_m$ 见(3.24)及(3.25)式.

### 5.1.1 薄壁面和弱蕊子的耦合

在采用了调和级数后, 和3.4.1.3节一样, 对于不相等的 $m$ 和 $n$ 而言, 劲度矩阵都等于零, 亦即是说, 它们的耦合被解除了. 因此, 自由振动方程可以写成

$$-\omega^2 {}^sM_m^p \delta_m^p - \omega^2 {}^sM_m^B \delta_m^B - \omega^2 {}^pM_m^p \delta_m^p + {}^sK_m^p \delta_m^p + {}^pK_m^p \delta_m^p = 0 \quad (5.6)$$

其中 ${}^sM_m^p$ 为弯曲样条的平面变形的质量矩阵,  ${}^sM_m^B$ 为弯曲样条的弯曲变形的质量矩阵,  ${}^pM_m^p$ 为有限棱柱的质量矩阵,  ${}^sK_m^p$ 为弯曲样条的平面变形的劲度矩阵,  ${}^sK_m^B$ 为弯曲样条的弯曲变形劲度矩阵,  ${}^pK_m^p$ 为有限棱柱的劲度矩阵,  $\delta_m^p$ 和 $\delta_m^B$ 分别为弯曲样条的平面变形和弯曲变形的插值参数, 而 $\delta_m^p$ 为有限棱柱的插值参数. (5.6)式为 $\omega^2$ 的特征值方程<sup>[14]</sup>.

### 5.1.2 数值实例

(a) 我们用(5.6)式分析了平直壁面夹蕊板条, 并将其结果和Ahmed解<sup>[29]</sup>(有限元法)相比较. 这些样条的性质和尺寸:

$$\begin{aligned} t_f &= 0.018 \text{in} (0.457 \text{mm}), E_f = 10^7 \text{lb/in}^2 (6.9 \times 10^7 \text{kN/m}^2), \nu_f = 0.0, \\ \rho_f &= 167.5 \text{ lb/ft}^3 (2674.3 \text{ kg/m}^3), c = 0.5 \text{in} (1.27 \text{cm}), E_c = 24 \times 10^8 \\ &\text{lb/in}^2 (165.6 \times 10^8 \text{kN/m}^2), \nu_c = 0.0, \rho_c = 2.05 \text{ lb/ft}^3 (32.7 \text{ kg/m}^3), \\ &\text{跨度 } s = 36 \text{in} (91.44 \text{cm}) \end{aligned}$$

其结果见表5.

表5 Ahmed<sup>[29]</sup>例题的自然频率(Hz)

振型	Ahmed <sup>[29]</sup>	精 确 <sup>[30]</sup>	本 文 <sup>[14]</sup>
1	57.51(+2.6%)	56.028	55.27(-1.4%)
3	467.69(+2.3%)	457.12	449.02(-1.8%)
5	1111.00(+1.9%)	1090.26	1065.86(-2.2%)
7	1842.00(+1.8%)	1809.80	1762.75(-2.6%)
9	2594.00(+1.7%)	2549.50	2457.93(-3.6%)

从此可以看到, 本法和Ahmed法同样正确. 对5个基本振型而言, 绝对误差都在3%以内. 但是, 本法可以处理更多种类的夹蕊板条.

(b) 表6给出了蕊子刚度(以杨氏模量 $E_c$ 为表志)对平直壁面夹蕊心板条的自然频率的影响.

表6 自然频率(Hz)和 $E_c$ 的关系

振型	$E_c$ (lb/in <sup>2</sup> )				
	0.3	3.0	30.0	300.0	3000.0
本法 1	1.51(0.7%)	2.40(1.6%)	6.35(1.9%)	18.75(2.2%)	43.07(3.5%)
本法 9	111.69(1.0%)	112.94(1.0%)	124.80(1.2%)	209.08(1.8%)	566.89(2.1%)
参考文献 1	1.52	2.44	6.47	19.18	44.62
[30] 9	112.79	114.08	126.32	212.89	579.08

夹蕊板条的性质为:

$$t_f = 0.02 \text{in} (0.5 \text{mm}), E_f = 3 \times 10^7 \text{lb/in}^2 (2.07 \times 10^8 \text{kN/m}^2), \nu_f = 0.15,$$

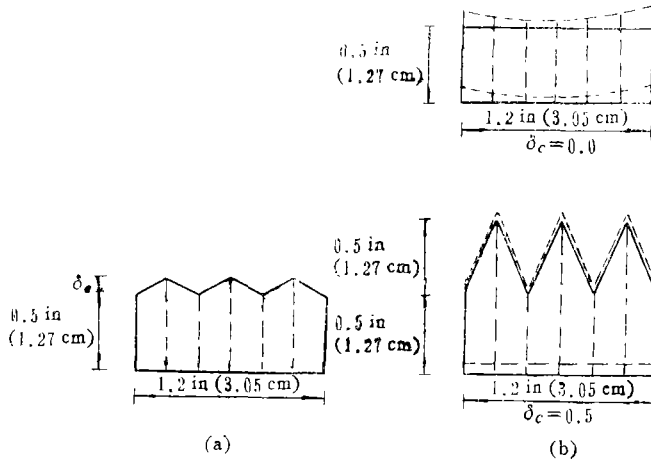
$\rho_f = 0.73845 \times 10^{-3} \text{lb/in}^3 (2.0411 \times 10^{-5} \text{kg/cm}^3)$ , 蕊子厚度  $c = 0.5 \text{in}$   
 (1.27cm),  $\nu_c = 0.20$ ,  $\rho_c = 0.30894 \times 10^{-5} \text{lb/in}^3 (0.8539 \times 10^{-7} \text{kg/cm}^3)$ ;

跨度  $s = 36 \text{in} (91.44 \text{cm})$ ,  $t =$  厚度;  $\nu =$  泊桑比; 脚标  $f =$  壁面, 脚标  $c =$  蕊子;  $\rho =$  密度, 蕊子杨氏模量的范围从  $0.3 \text{ lb/in}^2 (2.07 \text{ kN/m}^2)$  到  $3000 \text{ lb/in}^2 (20700 \text{ kN/m}^2)$ .

其结果和参考文献[30]的结果比较一致, 蕊子劲度越高, 频率越高。

(c) 我们研究了图13(a)的成形壁面板条的自由振动,  $\delta_c$ 的尺寸是变量。板条尺寸和性质同前题[即例(b)], 蕊子的杨氏模量保持不变,

$$E_c = 0.3 \times 10^3 \text{ lb/in}^2 (2070 \text{ kN/m}^2).$$



(a) 成形板条的网格细部<sup>[14]</sup>

(b) 板条横向模型形状(型 I)<sup>[14]</sup>

图 13

表 7 中的自然频率用赫兹 (Hertz) 表示, 这里没有已知的解可以比较。在中速的 ICL1904S 计算机上, 计算一个频率的机时为 18 秒钟。请注意, 在壁面成形后, 劲度和频率都有明显增加。图13(b)中给出了  $\delta_c = 0$  和  $\delta_c = 0.5$  的横向振形。

表7 成形壁面板条的自然频率(Hz)

振 型	$\delta_c(\text{in})$					
	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
1	18.75	20.13	22.56	26.27	31.04	36.53
3	60.03	76.73	114.29	162.90	216.66	272.73
5	104.08	164.75	282.53	416.05	547.54	664.59
7	153.23	288.14	509.18	701.08	819.80	879.11
9	209.08	443.35	726.97	861.25	909.98	931.72

(d) 研究第 II 型的成形壁面夹蕊板条(图 1), 它有下列数据:

蕊子的性质:  $E_c = 679 \text{ lb/in}^2 (4685 \text{ kN/m}^2)$ ,  $\nu_c = 0.177$ .

顶面和底面的性质:  $E_f = 29.5 \times 10^6 \text{ psi} (203.55 \times 10^6 \text{ kN/m}^2)$ ,  $\nu_f = 0.267$ ,  $t_f = 0.02 \text{ in}$  (0.508mm)。跨度 =  $45 \text{ in} (114.3 \text{ cm})$ , 载荷 =  $100 \text{ lb/ft}^2 (4.79 \text{ kN/m}^2)$ 。表 8 列出频率值。

结论是: 有限棱柱样条法是研究成形壁面板条的很好的模式。这个方法节省大量计算、试验的工作和费用, 可以用来研究各种成形壁面板条。

表8 II型板条的自然频率(Hz)

振 型	频 率
1	62.92
3	253.74

### 六、热应力及挠度

由于夹蕊板条有很好的绝热性能，它们常被用来对付极差的气候条件。墙壁外表面和内表面的温度差常有达100°F者。由于冷成形壁面的弯曲刚度好，即使在单跨条件下也有热应力<sup>[10]</sup>。

在这个研究中，进行了一系列的试验，研究夹蕊板条处于两壁面的温度梯度条件下的应力和挠度。我们测试单跨度的和双跨度条件下的夹蕊板条，两表面的温差高达100°F(55.6℃)。

建立了一个四阶常微分方程及其边界条件，导出了挠度、壁面的弯曲应力和蕊子中的剪应力。数值计算中，采用了有限-棱柱-样条法<sup>[11]</sup>。

实验数据，数值分析和理论预测都相互一致。

#### 6.1 理论分析<sup>[10]</sup>

我们假定温差在夹蕊板条内部蕊子内的温度分布是线性的，而在壁面的本身厚度内的温度则是均匀的。

热变形假定只在跨度方向发生。图14表示厚壁面的板条的热变形，壁面元素  $dx$  所产生的相对长度变化为  $\delta x$ ，它是

$$\delta x = (K_2 \Delta T_2 - K_1 \Delta T_1) dx \tag{6.1}$$

其中  $K_1$  和  $K_2$  为各壁面的热膨胀系数， $\Delta T_1$  和  $\Delta T_2$  为有关壁面的温度变化。设  $\bar{K} = K_2 \Delta T_2 - K_1 \Delta T_1$ 。

对简单跨度而言，微分方程为<sup>[10]</sup>

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{GbD^2}{D_o E_1 I_o} \frac{I}{I_o} y = - \frac{GbD^2}{D_o E_1 I_o} \frac{\bar{K}}{2D} x^2 + \frac{GbD^2}{D_o E_1 I_o} \frac{\bar{K}L}{2D} x \tag{6.2}$$

其中

$y$  = 挠度； $G$  = 蕊子的剪切模量； $D_o$  = 蕊子厚度； $b$  = 板条宽； $I_o$  = 壁面惯性矩之和； $I_o$  = 由于复合作用产生的惯性矩<sup>[10]</sup>； $I = I_o + I_o$ ； $L$  = 跨度； $D$  = 两壁面中性轴的距离。

(6.2)式是和(3.6)式相似的一个二阶微分方程，其解也和(3.7)相似。壁面上的应力等于平均应力(即在该壁面中性轴上的应力)加壁面弯曲所产生的应力。把壁面纤维内的应力称为  $S_{ij}$ ，把该纤维和壁面中性轴之间的距离称为  $c_{ij}$ ；

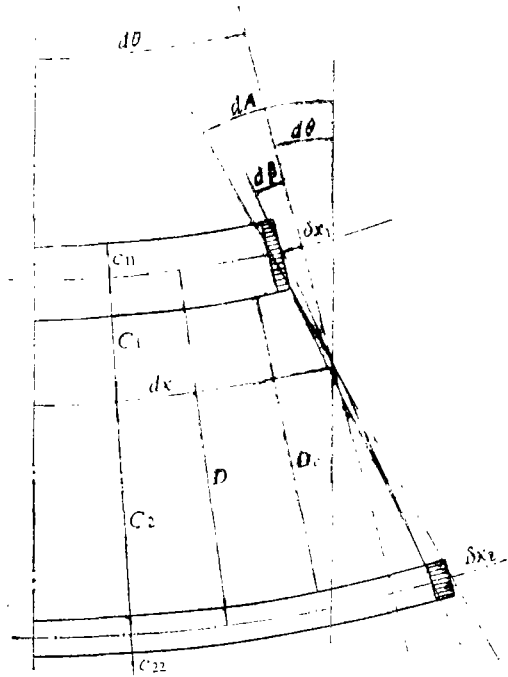


图14 成形壁面夹蕊板条的热变形<sup>[10]</sup>



$$S_{i,j} = \left( \frac{M - E_1 I_0}{a_i D} \right) \frac{d^2 y}{dx^2} + E_i c_{i,j} \frac{d^2 y}{dx^2} \quad (6.3)$$

其中

$M$  = 载荷产生的总弯矩,  $E_i$  = 壁“ $i$ ”上的杨氏模量。

对于多跨度而言, 我们可以用协调变形法<sup>[6]</sup>。

### 6.2 实验<sup>[10]</sup>

实验中使用三种(图 1 的 I, II, III)夹芯板条, 它们代表三种不同程度的冷成形过程。绝缘蕊子是由刚性聚脲泡沫制成的, 其额定密度为 2.0pcf(32kg/m<sup>3</sup>), 而连续使用的温度为 200°F。按照美国试验和材料规范学会的规定 D-1962 试验时, 这种泡沫应该属于“自行熄灭”的。板条的  $U$ -因子等于或小于 0.07 Btu/hr/sq ft/°F (I 型), 0.06 Btu/hr/sq ft/°F (II 型) 和 0.056 Btu/hr/sq ft/°F (III 型)。

为了求得夹芯板条的剪切模量, 把板条置于两个简支支承上, 在中点受集中载荷的作用, 测得挠度, 蕊子的剪切模量可以计算求得<sup>[9],[10]</sup>。

为了获得可控的热变形, 我们用 3/4-in(19mm) 厚的胶合板做成一只加热箱, 箱内尺寸为长 98in(2490mm), 宽 43.5in(1100mm), 高 15in(380mm)。在每一角上, 胶合板用一块角铁六个螺钉组合在一起。加热箱的形状见图 15。热源共有八个 80 瓦的灯泡, 每两个连成一组, 我们可以任择 2 个灯泡, 4 个灯泡, 6 个灯泡或 8 个灯泡进行加热来调节温度。详见图 16。

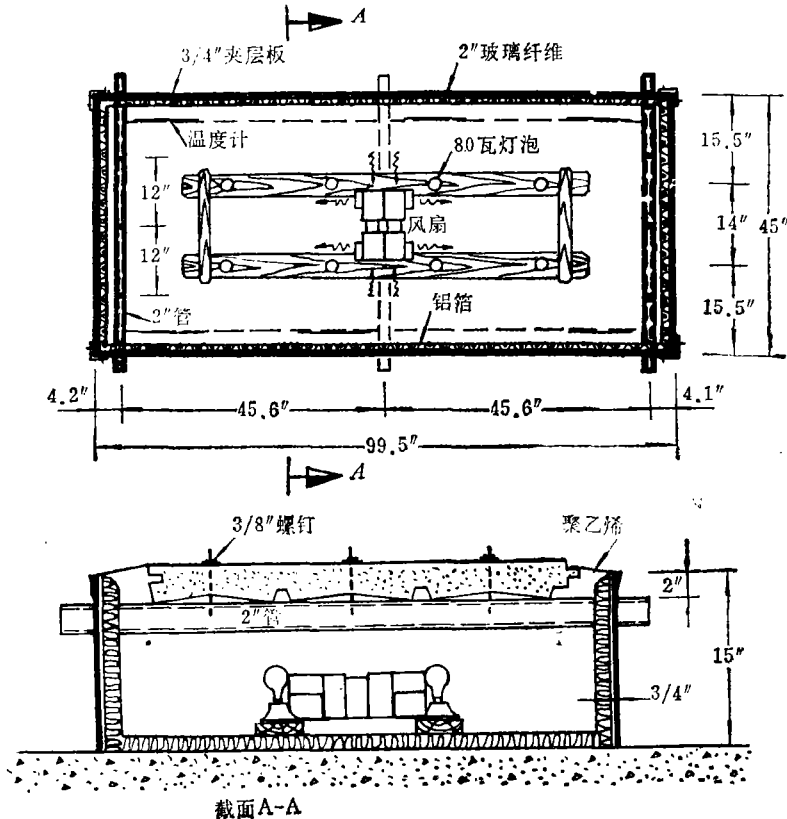


图15 加热箱<sup>[10]</sup>(1in=25.4mm)

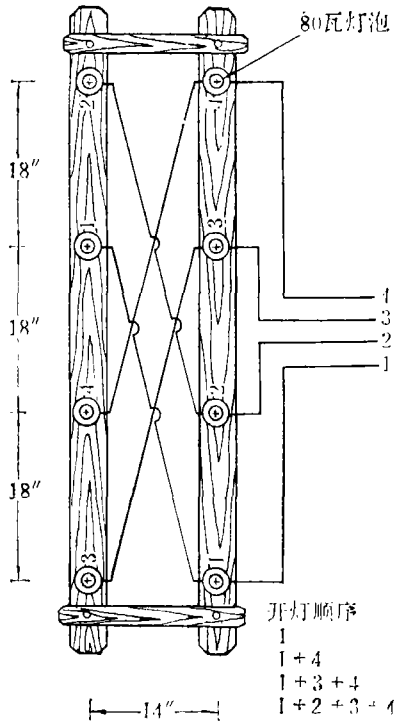


图16 加热方案<sup>[10]</sup>(1in=25.4mm)

除了有读空气温度的温度计外，我们还用了热敏电阻、数字温度计、刻度表、应变仪、开关及平衡装置，和应变指示器等。热敏电阻是用来测量夹蕊板条的表面温度的。它们是用胶带粘贴在表面的。图17表示板条上热敏电阻的安排，应变仪的取向和位置见图18。

在每一试验开始时，都要检查所有仪表并记录初始读数。然后开动电扇，同时开亮第一组灯泡，再读一次读数。一般要延迟35~55分钟，以期每次增温达到稳定状态。如图16所示，灯泡组合的次序为1, 1+4, 1+3+4和1+2+3+4。只要温度变化在五分钟内不变动1°F，我们就认为温度稳定了。在某一稳定温度下测得数据后，再接入下一组灯泡组。

6.3 理论和实验<sup>[10]</sup>

实验的典型结果见图19~20，它们是不同的位置的挠度和应力。图上还有计算所得的理论曲线，作为比较。理论曲线用实线表示，测得数据用点表示。

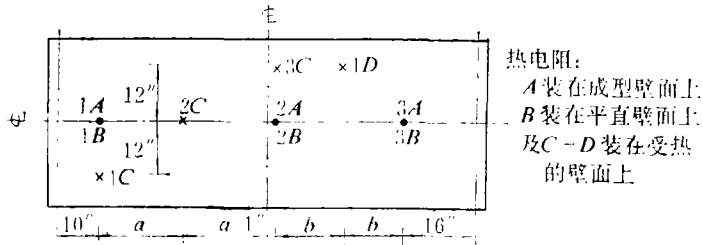


图17 热电阻的典型位置<sup>[10]</sup>(1in=25.4mm)

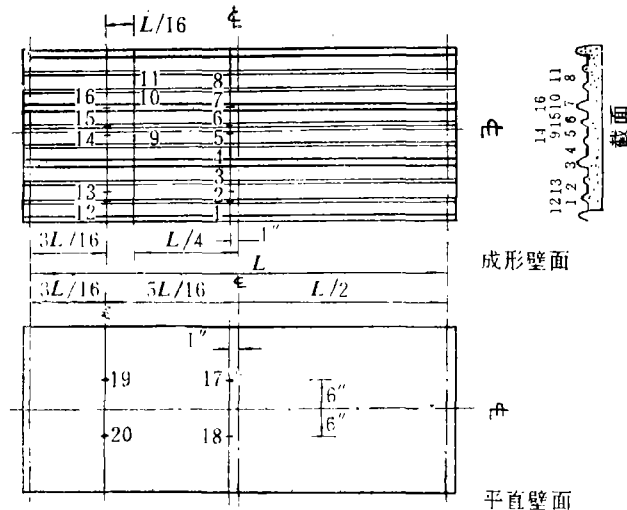


图18 应变仪的典型位置<sup>[10]</sup>(1in=25.4mm)

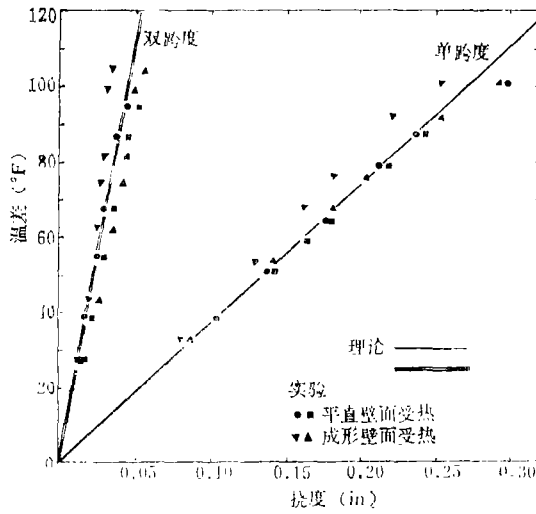
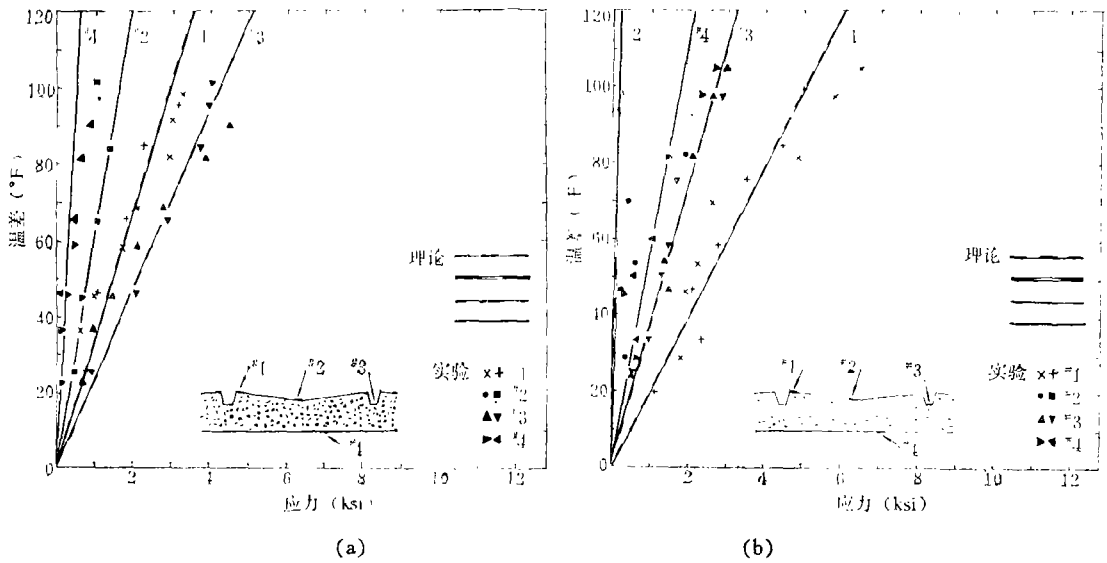


图19 典型最大挠度<sup>[10]</sup>(板条Ⅲ型,  $l_{1n}=25.4\text{mm}$ )



(a) 单跨度中点上测得 (b) 双跨度从中间支承点1时处测得(1ksi=6.9MN/m<sup>2</sup>)

图20 典型应力<sup>[10]</sup>

图19的挠度图显示实验值和计算值很吻合。对单跨度而言，实验值对理论值最大偏离为0.03in(0.76mm)；对双跨度而言，偏离为0.015in(0.38mm)。对一切情况而言，测得的单跨度挠度都略小于理论挠度。而测得的双跨度挠度都略大于理论挠度。测得的数据均匀分布在理论挠度的两侧。

测得的应力和计算所得的应力作图表示如图20(a)，20(b)。对每一应变仪而言，都提供了两组数据。一组是成型壁面加热的，一组是平直壁面加热的。测得的应力和理论应力大致相符。对每一板条而言，单跨度应力采自跨度中点，双跨度应力则采自中间支承点上。在冷表面上测得的数据略优于在热表面上测得的数据，亦即前者较后者更接近于理论值。在一切图上，测得应力都均匀地分布在理论应力的两侧。

在壁面上的应力分布和平衡亦曾被研究过。计算所得的应力是完全平衡的，而测得的应

力亦接近平衡。

一般说来, 由热梯度单独产生的最大挠度和应力都是很小的。不过, 如果强风载或其它强载荷占优势, 则在风载一侧的叠加效果可能达到临界状态(如果户外温度较低)。在这时, 为了缓冲这种情况, 在跨度中区最好加上包围连接圈, 以利加固夹蕊板条。另一方面, 在下风一侧, 因为热应力和风载应力正负相反, 所以情况并不严重。本理论对有成形壁面的夹蕊板条在单跨和连续跨度条件的挠度和应力能预测到相当精确。

#### 6.4 数值分析<sup>[11]</sup>

本文处理了建筑用夹蕊板条的热应力分析。蕊子用有限棱柱近似, 而壁面则用有限样条近似。

##### 6.4.1 公式建立

当成形壁面夹蕊板的两壁面暴露在不同温度下而且纵向两端限制变位, 则造成热应变, 平衡矩阵方程可以写成

$$K\delta + B^T D \epsilon_T = 0 \quad (6.4)$$

其中  $K$  为劲度矩阵,  $B$  为应变矩阵,  $D$  为性能矩阵,  $\delta$  为位移参量,

$$\epsilon_T = \begin{Bmatrix} 0 \\ \alpha\theta \\ 0 \end{Bmatrix}$$

是热矢量,  $\alpha$  是线膨胀系数, 而  $\theta$  为两壁面间的温度差。

和 3.4.1 节相同, 建筑用夹蕊板条采用有限-样条-棱柱模型<sup>[8]、[11]</sup>。由于两壁间的温差梯度引起的热应力可以用平面内的分量((6.4)式)表示如下:

$$S_{Tn} = B^T D \epsilon_T = \begin{Bmatrix} \left( \frac{-2\nu E}{1-\nu^2} \right) & (\alpha\theta) \frac{tL}{n} \\ \left( \frac{-E}{1-\nu^2} \right) & (\alpha\theta) bt \\ \left( \frac{2\nu E}{1-\nu^2} \right) & (\alpha\theta) \frac{tL}{n\pi} \\ \left( \frac{-E}{1-\nu^2} \right) & (\alpha\theta) bt \end{Bmatrix} \quad (6.5)$$

其中  $E$  为板的杨氏模量,  $\nu$  为其泊桑比。在分析中, 我们引用 6 结点元 (ISW6 型, 图 6)。这一元素的形状函数见 (3.24), (3.25) 式。把壁面和蕊子耦合起来, 得平衡方程为

$${}^s K_m^s \delta_m^s + {}^s K_m^b \delta_m^b + {}^s K_m^c \delta_m^c + {}^s T_m = 0 \quad (6.6)$$

其中  ${}^s T_m$  为热应力矢量, 其它矩阵和矢量与 (5.6) 式相同。

##### 6.4.2 数值分析<sup>[11]</sup>与理论<sup>[9]、[10]</sup>

为了比较数值分析和 6.1 节的理论, 我们研究了一个平直壁面的例子和两个成形壁面的例子。

(a) 第一个例子是用平直壁面夹蕊板条。薄壁面的杨氏模量为  $3 \times 10^7 \text{ lb/in}^2$  ( $2.07 \times 10^8 \text{ kN/m}^2$ ), 两壁面的温差为  $50^\circ \text{ F}$ , 壁面和蕊子的泊桑比分别为 0.15 和 0.20, 壁面和蕊子的厚度分别为  $0.002''$  ( $0.051 \text{ mm}$ ) 和  $0.5''$  ( $12.7 \text{ mm}$ ), 壁面的热膨胀系数为  $6.5 \times 10^{-6} / ^\circ \text{ F}$ , 跨度为  $36''$  ( $914 \text{ mm}$ )。在表 9 中, 列出了在不同蕊子刚度的中点挠度, 它们和张建平的解<sup>[9]、[10]</sup> 密合很好。

表9 平直壁面夹蕊板条的中点挠度

$E_c$ (lb/in <sup>2</sup> )	张 建 平 <sup>[10]</sup>	本 文 计 算 <sup>[11]</sup>
0.3	0.01824	0.01842( 1%)
3.0	0.07306	0.07231( 1%)
30.0	0.10325	0.10108(2.1%)
300.0	0.10722	0.10486(2.2%)
3000.0	0.10762	0.10519(2.3%)

注: 1lb/in<sup>2</sup>=6.9kN/m<sup>2</sup>

(b) 在本例中, 我们研究成形壁面板条(图13a)。薄壁面的材料和上例相同, 跨度和温差梯度也相同。蕊子的杨氏模量采用  $0.3 \times 10^3 \text{lb/in}^2 (2.07 \times 10^3 \text{kN/m}^2)$ 。结果表明这类板条的刚度比前例有很大改进(表10)。

表10 成形壁面夹蕊板条的中点挠度

$\delta_c$	张 建 平 <sup>[10]</sup>	本 文 计 算 <sup>[11]</sup>
0.0	0.10722	0.10486( 2.2%)
0.1	0.09055	0.09012( 0.5%)
0.2	0.07208	0.06924( 3.9%)
0.3	0.04971	0.04899( 1.4%)
0.4	0.03183	0.03392( 6.6%)
0.5	0.02023	0.02395(18.4%)

注: 1in=25.4mm

(c) 把成形壁面夹蕊板条的某一商品型(Ⅱ型, 图1)作为第三个例。板条的性质、跨度和载荷已见5.1.2节的例(d)。表11为中点挠度和张建平结果<sup>[10]</sup>的比较。

表11 Ⅱ型板条的挠度

张 建 平 <sup>[10]</sup>	本 文 计 算 <sup>[11]</sup>
挠度0.02352"	0.02314"(1.6%)

注: 1"=25.4mm

从这些例子中, 我们可以看到有限-棱柱-样条模型和6.1节的理论结果都很吻合, 这就表明, 这两种算法都是可靠的。

## 七、结 论

我们从分析、实验、和数值计算研究了建筑用的夹蕊板条的结构性能。在多种独立的方法中, 所得结果都很吻合, 这表明其结果是可靠的。由于实验一般颇为为费时, 我们建议采用理论(分析)或数值计算来设计这类板条。如有必要, 再用实验校核。

## 参 考 文 献

- [1] Allen, H. G., *Analysis and Design of Structural Sandwich Panels*, New York, Pergamon Press, Inc. (1969).
- [2] Gough, C. S., C. F. Elam and N. A. de Bruyne, The stabilization of a thin sheet by a continuous supporting medium, *Journal of the Royal Aeronautical Society*, **44**, 12—43.
- [3] Hoff, N. J. and S. E. Mautner, The buckling of sandwich-type panels, *Journal of the Aeronautical Sciences*, **12** (1956), 285—297.
- [4] Chong, K. P. and J. A. Hartsock, Flexural wrinkling mode of elastic buckling in sandwich panels, *Proceedings of ASCE Specialty Conference on Composite Materials*, Pittsburgh, PA (1972).
- [5] Chong, K. P. and J. A. Hartsock, Flexural wrinkling in foam-filled sandwich panels, *J. Engr. Mech. Div.*, ASCE (1974), 95—110.
- [6] Chong, K. P., K. A. Wang and G. R. Griffith, Analysis of continuous sandwich panels in building system, *Building and Environment*, **14** (1979), 125—130.
- [7] Hartsock, J. A. and K. P. Chong, Analysis of sandwich panels with formed faces, *Journal of the Structural Division*, ASCE, **102**, ST4, Proc. Paper 12058 (1976), 803—819.
- [8] Tham, L. G., K. P. Chong and Y. K. Cheung, Flexural bending and axial compression of architectural sandwich panels by combined finite-prism-strip method, *J. Reinforced Plastics and Composite Materials*, **1** (1982), 16—28.
- [9] Chong, K. P., K. O. Engen and J. A. Hartsock, Thermal stress in determinate and indeterminate sandwich panels with formed facings, *ASCE-EMD First Specialty Conference*, Waterloo, Canada (1976).
- [10] Chong, K. P., K. O. Engen and J. A. Hartsock, Thermal stress and deflection of sandwich panels, *J. Structural Division*, **103**, ST1 (1977), 35—49.
- [11] Chong, K. P., L. G. Tham and Y. K. Cheung, Thermal behavior of foamed sandwich plate by finite-prism-strip method, *Computers and Structures*, **15**, 3 (1982), 321—324.
- [12] Chong, K. P., B. Lee and P. A. Lavdas, Analysis of thin-walled structures by finite strip and finite layer methods, *Thin-Walled Structures*, **2** (1984), 75—95.
- [13] Cheung, Y. K., K. P. Chong and L. G. Tham, Buckling of sandwich plate by finite layer method, *Computers and Structures*, **15**, 2 (1982), 131—134.
- [14] Chong, K. P., Y. K. Cheung and L. G. Tham, Free vibration of foamed sandwich panel, *J. Sound and Vibration*, **81**, 4 (1982), 575—582.
- [15] Kuenzi, K. W., *Structural Sandwich Design Criteria*, National Academy of Sciences-National Research Council, Publication 798 (1960), 9—18.
- [16] ASCE Subcommittee on Literature Survey of Cold-Formed Structures (K. P. Chong, Chairman), *Literature Survey of Cold-Formed Structures*, Preprint 3762, ASCE Convention, Atlanta, Oct. (1979).
- [17] Harris, B. J. and G. M. Nordby, Local failure of plastic-foam core sandwich panels, *Journal of the Structural Division*, ASCE, **95**, ST4, Proc. Paper 6494 (1969), 585—610.

- [18] Timoshenko, S. and J. N. Goodier, *Theory of Elasticity*, Chaps. 2 and 3, 2nd ed., McGraw-Hill Book Co., Inc., New York, NY (1951).
- [19] von Kármán, T. and M. A. Biot, *Mathematical Methods in Engineering*, 1st ed., McGraw-Hill Book Co., Inc., New York, NY (1940), 304.
- [20] Sokolnikoff, I. S., *Mathematical Theory of Elasticity*, 2nd ed., McGraw-Hill Book Co., Inc., New York, NY (1956), 249—262.
- [21] Hartsock, J. A., *Design of Foam-Filled Structures*, Technomic Publishing Co., Stamford, CT (1969).
- [22] Zienkiewicz, O. C. and Y. K. Cheung, *The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics*, McGraw-Hill (1967).
- [23] Cheung, Y. K., Finite strip method in the analysis of elastic plates with two opposite simply supported ends, *Proc. Institution Civil Engineers*, **40** (1968), 1—7.
- [24] Cheung, Y. K., Finite strip method analysis of elastic slabs, *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, **94**, EM6 (1968), 1365—1378.
- [25] Cheung, Y. K., *Finite Strip Method in Structural Analysis*, Pergamon Press (1976).
- [26] Cheung, Y. K., M. F. Yeo and D. A. Cumming, Three-dimensional analysis of flexible pavements with special reference to edge loads, *Proc. 1st Conf. of the Road Engineering Assoc. of Asia and Australia*, Bangkok (1976).
- [27] Cheung, Y. K., Finite strip method in structural and continuum mechanics, *Int'l. Journal of Structures*, **1**, 1 (1981), 19—37.
- [28] Cheung, Y. K., L. G. Tham and K. P. Chong, Buckling of sandwich plate by finite layer method, *Computers and Structures*, **15**, 2 (1982), 131—134.
- [29] Ahmed, K. M., Free vibration of curved sandwich panels by the method of finite elements, *Journal of Sound and Vibration*, **18** (1971), 61—74.
- [30] 中国科学院固体力学组, 《夹芯板条的弯曲、稳定和振动》, 北京 (1977).

## Analytical, Numerical and Experimental Investigations of Architectural Sandwich Panels

K. P. Chong

*(Department of Civil Engineering, University of  
Wyoming, Laramie, WY, USA)*

Y. K. Cheung L. G. Tham

*(Department of Civil Engineering, University of  
Hong Kong, Hong Kong)*

### Abstract

Architectural sandwich panels with thin-walled cold-formed steel facings and rigid foamed insulating core are becoming more and more popular as enclosures for system buildings. In this paper, the structural behavior, including flexural stresses/deflections, flexural wrinkling, axial stability, thermal stresses and vibration, is presented, summarizing more than a decade of research. Methods used are analytical (boundary-valued approaches), numerical (finite-strip, finite-layer, finite prism approaches) and experimental (full-scale testings). Key equations are formulated, and results by different methods are compared.