应用数学和力学，第8卷第2期（1987年2月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

# 含有δ函数的弱非线性偏微分方程的摄动解

徐振源　　刘曾荣

（安徽淮南师专）　（安徽大学）

（许政范推荐，1985年9月24日收到）

**摘　要**

本文将刘曾荣提出的方法推广到含有δ函数的弱非线性偏微分方程.

## 一、引　言

文[1]研究了含有δ函数的弱非线性方程的摄动解.考虑如下算子方程：

$$M(u)=\varepsilon f(u)+\lambda\delta(t-\alpha) \tag{1.1}$$

其中$M$是一个$n$阶线性微分算子，$\varepsilon f(u)$为弱非线性，$0<\varepsilon\ll 1$，$f(u)$为$u$的次数高于1的多项式.令(1.1)解为

$$u=x_1+x_2 \tag{1.2}$$

要求$x_1$满足如下方程

$$M(x_1)=\varepsilon f(x_1) \tag{1.3}$$

以及$u$的定解条件.根据物理意义可认为

$x_2=w(t)H(t-\alpha)$，$x_2$满足

$$M(x_2)=\varepsilon[f(x_1+x_2)-f(x_1)]+\lambda\delta(t-\alpha) \tag{1.4}$$

然后根据各种奇异摄动方法求得一致有效渐近解.

本文将以上方法推广到含有δ函数弱非线性偏微分方程.在第二节和第四节中作出以上方法的不同推广，在第三节和第五节中介绍了这两种方法的具体应用.

## 二、一 般 方 法

类似于[1]，我们先给出两条简单引理：

**引理 1**

1° $[H(x)H(t)]=[H(x),H(t)]^2=\cdots=[H(x)H(t)]^n$

其中$n$为任意正整数，$H(x)$，$H(t)$为Heaviside函数.

2° 若$f(x)$为充分光滑函数，则在广义函数空间中有

$$f(x)\delta^{(n)}(x)=\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}C_n^i f^{(n-i)}(0)\delta^{(i)}(x)$$

其中 $n$ 为任意正整数，$\delta(x)$ 为 Dirac 函数。

**引理 2** 在广义函数空间中有：

$$H(x)H(t),\ H(x)\delta(t),\ \cdots,\ H(x)\delta^{(n)}(t),\ \delta(x)\delta(t),\cdots,\ \delta(x)\delta^{(n)}(t)$$
$$H(t)\delta(x),\ H(t)\delta'(x),\cdots,\ H(t)\delta^{(n)}(x),\ \delta(t)\delta'(x),\cdots,\ \delta(t)\delta^{(n)}(x)$$

互为线性独立。

现在，考虑如下算子方程

$$M(u)=\varepsilon f(u)+\varepsilon g(t)\delta(x)H(t-t_0)+\varepsilon h(x)\delta(t-t_0)H(x) \tag{2.1}$$

其中

$$M=a_{20}(x,t)\frac{\partial^2}{\partial x^2}+a_{02}(x,t)\frac{\partial^2}{\partial t^2}+a_{10}(x,t)\frac{\partial}{\partial x}+a_{01}(x,t)\frac{\partial}{\partial t}+a_{00}(x,t)$$

$\varepsilon f(u)$弱为非线性，或者定解条件具有小参数$\varepsilon$，$0<\varepsilon\ll 1$，$f(u)$ 为 $u$，$\partial u/\partial x$，$\partial u/\partial t$次数高于 1 的多项式。

令(2.1)解为

$$u=u_1+u_2 \tag{2.2}$$

要求 $u_1$ 满足如下方程

$$M(u_1)=\varepsilon f(u_1) \tag{2.3}$$

以及 $u$ 的定解条件。假设按照奇异摄动理论，对充分小$\varepsilon$，可用各种奇异摄动方法求得它的一致有效渐近解

$$u_1=\bar{u}_1 \tag{2.4}$$

那么，此时 $u_2$ 应满足方程

$$M(u_2)=\varepsilon[f(u_1+u_2)-f(u_1)]+\varepsilon g(t)\delta(x)H(t-t_0)+\varepsilon h(x)\delta(t-t_0)H(x) \tag{2.5}$$

根据实际问题可认为

$$u_2=w(x,t)H(x)H(t-t_0) \tag{2.6}$$

把(2.6)代入(2.5)，利用引理 1 结果，可证明：

**引理 3** 设$M$为(2.1)中偏微分算子，只要$a_{20}(x,t)\neq 0$，$a_{02}(x,t)\neq 0$，则成立

$$\left.\begin{aligned} &w|_{x=0(t\geqslant t_0)}=0, \quad a_{20}w_x|_{x=0(t\geqslant t_0)}=\varepsilon g(t)\\ &w|_{t=t_0(x\geqslant 0)}=0, \quad a_{02}w_t|_{t=t_0(x\geqslant 0)}=\varepsilon h(x)\end{aligned}\right\} \tag{2.7}$$

**证明** 将(2.6)代入(2.5)得到

$$\begin{aligned} M(u_2)&=M[w(x,t)H(t-t_0)H(x)]\\ &=M(w)H(x)H(t-t_0)+\delta(x)H(t-t_0)[2a_{20}w_x+a_{10}w]\\ &\quad+H(t-t_0)\cdot[(-1)(wa_{20})'_x\delta(x)+wa_{20}\delta'(x)]+H(x)[(-1)(a_{02}w)'_t\delta(t)\\ &\quad+a_{02}w\delta'(t)]+\delta(t-t_0)H(x)[2a_{02}w_t+a_{01}w]\end{aligned}$$

于是得到

$$a_{20}(0,t)w(0,t)=0, \quad a_{20}w_x+a_{10}w-a'_{20x}w=\varepsilon g(t)$$
$$a_{02}(x,t_0)w(x,t_0)=0, \quad a_{02}w_t+a_{01}w-a'_{02t}w=\varepsilon h(x)$$

从而得到(2.7)。 ▽▽

这样，由引理 2 和引理 3 可得

$$\left.\begin{array}{l} M(w)+\varepsilon G(u,w)=0 \\ w|_{x=0(t\geqslant t_0)}=0, \qquad a_{20}w_x|_{x=0(t\geqslant t_0)}=\varepsilon g(t) \\ w|_{t=t_0(x\geqslant 0)}=0, \qquad a_{02}w_t|_{t=t_0(x\geqslant 0)}=\varepsilon h(x) \end{array}\right\} \tag{2.8}$$

(2.8)也是一个类似于(2.3)的方程，因而也完全有理由用各种奇异摄动方法求出它的一致有效渐近解$w=\overline{w}(x,t)$.最后得到(2.1)的一致有效渐近解为

$$u=\bar{u}_1+\overline{w}(x,t)H(t-t_0)H(x) \tag{2.9}$$

## 三、两 个 例 子

**例 1** 弱半线性不稳定模型（见[2]）

$$\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}-u=u^3+\varepsilon\delta(t)\sin kx & (3.1) \\ u(t,0)=\varepsilon\cos kx,\ \ u_t(t,0)=0 & (3.2) \end{cases}$$

利用上节方法，令$u=v+w(x,t)H(t)$ 代入(3.1)得以下两方程：

$$v_{tt}-v_{xx}-v=v^3;\ \ v(x,0)=\varepsilon\cos kx,\ \ v_t(x,0)=0 \tag{3.3}$$

$$w_{tt}-w_{xx}-w=3v^2w+3wv^2+w^3;\ \ w(x,0)=0,\qquad w_t(x,0)=\varepsilon\sin kx \tag{3.4}$$

利用伸长坐标法可求得：

$$v=\varepsilon\cos\sigma t\cos kx+O(\varepsilon^3),\ w=\frac{\varepsilon\sin\sigma_2 t}{\sigma_1}\sin kx+O(\varepsilon^3)$$

其中

$$\sigma=\sqrt{k^2-1}\left[1-\frac{9\varepsilon^2}{32(k^2-1)}\right]+O(\varepsilon^3)$$

$$\sigma_1=\sqrt{k^2-1}$$

$$\sigma_2=\sigma_1\left[1-\varepsilon^2\frac{3}{32\sigma_1^2}\left(1+\frac{1}{\sigma_1}+\frac{1}{\sigma_1^2}\right)\right]$$

最后得到

$$u=\varepsilon\cos\sigma t\cos kx+H(t)\frac{\varepsilon\sin\sigma_2 t}{\sigma_1}\sin kx+O(\varepsilon^3) \tag{3.5}$$

从(3.5)可知：

当$k>1$时，$\sigma$，$\sigma_1$，$\sigma_2$为实数，解当$t=O(\varepsilon^{-2})$有效，它表明振幅依于频率的振动驻波。

当$k<1$时，$\sigma$，$\sigma_1$，$\sigma_2$为虚数，它表明增长波。现在小冲击引起的波动类似于原来的波动，它们性质相似，只是频率上发生了漂移。

**例 2** 半无限弹性杆中非线性波（见[3]）

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=-2E_1\dfrac{\partial u}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\varepsilon f(x)\delta(t) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0)=\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,0)=0,\quad \dfrac{\partial u}{\partial t}(0,t)=\varepsilon\phi(t) \end{array}\right\} \tag{3.6}$$

令$u=v(x,t)+w(x,t)H(t)$ 代入(3.6)得到

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2}=-2E_1\dfrac{\partial v}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} \\ \dfrac{\partial v}{\partial t}(x,0)=\dfrac{\partial v}{\partial x}(x,0)=0,\qquad \dfrac{\partial v}{\partial t}(0,t)=\varepsilon\phi(t) \end{array}\right\} \tag{3.7}$$

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2}=-2E_1\left[\dfrac{\partial w}{\partial x}\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\dfrac{\partial v}{\partial x}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\dfrac{\partial w}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right]\\ \dfrac{\partial w}{\partial t}(x,0)=\varepsilon f(x),\quad \dfrac{\partial w}{\partial x}(x,0)=0,\quad \dfrac{\partial w}{\partial t}(0,t)=0\end{array}\right\}\tag{3.8}$$

利用多重尺度法求得

$$v=\varepsilon\left[F(\xi)+\frac{1}{2}\varepsilon E_1xF'(\xi)\right]+\cdots$$

$$t-x=\xi+\varepsilon E_1xF'(\xi)$$

$$w=g(s_1,\ x_1)$$

其中 $g$ 满足

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial g}{\partial s_1}+E_1\frac{\partial^2\bar{v}}{\partial s_1^2}\cdot\frac{\partial g}{\partial s_1}+E_1\frac{\partial\bar{v}}{\partial s_1}\frac{\partial^2 g}{\partial s_1^2}+E_1\frac{\partial g}{\partial s_1}\frac{\partial^2 g}{\partial s_1^2}=0\tag{3.9}$$

这里 $s_1=t-x,\ x_1=\varepsilon x,\ \bar{v}=\left[F(\xi)+\frac{1}{2}\varepsilon E_1xF'(\xi)\right]$

由此可以看到此时非线性波为两列波迭加，小冲击产生的右伸波与原非线性波密切相关。

## 四、含有δ(t)δ(x)的方程

我们研究带$\delta(t)\delta(x)$的弱非线性偏微分方程的奇摄动解。

现在，我们考虑以下的方程

$$Mu=\varepsilon f(u)+\lambda\delta(x-x_0)\delta(t-t_0),\quad Bu=0\tag{4.1}$$

其中$M$为$n$阶线性偏微分算子，$B$为线性边界算子，$f(u)$为$u$次数高于1的多项式。

今假设对应的线性问题

$$Mu=0,\quad Bu=0\tag{4.2}$$

有规范正交的本征函数族$\{\phi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$，则(4.1)解可取为

$$u=\sum_{n=0}^{\infty}v_n(t)\,\phi_n(x)\tag{4.3}$$

将(4.3)代入(4.1)得

$$M\left(\sum_{n=0}^{\infty}v_n(t)\phi_n(x)\right)=\varepsilon f\left(\sum_{n=1}^{\infty}v_n(t)\phi_n(x)\right)+\lambda\delta(x-x_0)\delta(t-t_0)\tag{4.4}$$

(4.4)两边同乘以$\phi_m(x)$，然后积分，利用正交性可得：

$$A_m v_m(t)=\varepsilon g_m(v_m(t))+\lambda\phi_m(x_0)\delta(t-t_0)\tag{4.5}$$

其中 $A_m$为一列$n$阶常微分算子，$v_m(t)$满足已知初始条件。

利用文[1]方法，即令

$$v_m(t)=v_m^{(1)}(t)+v_m^{(2)}H(t-t_0)\tag{4.6}$$

代入(4.5)可得：

$$\left.\begin{array}{l}A_m v_m^{(1)}(t)=\varepsilon g_m(v_m^{(1)}(t))\\ v_m^{(1)}(t)\text{满足}\ v_m(t)\text{的初始条件}\end{array}\right\}\tag{4.7}$$

$$\left.\begin{aligned}&A_m v_m^{(2)}(t)=\varepsilon\bar{g}_m(v_m^{(1)},v_m^{(2)})\\&v_m^{(2)}(t_0)=0\\&\quad\cdots\cdots\\&v_m^{(2)(n-1)}(t_0)=\lambda\,\phi_m(x_0)\end{aligned}\right\}\tag{4.8}$$

其中$\bar{g}_m$是与$g_m$有关的次数高于1的多项式。

如果(4.7), (4.8)能用奇摄动方法求得一致有效渐近解的话，则得(4.1)的解为

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}[v_n^{(1)}(t)+v_n^{(2)}(t)H(t-t_0)]\phi_n(x)$$

## 五、均匀梁的非线性振动

文[2]研究了均匀梁的非线性振动。现在我们用第四节中提出的方法研究瞬时集中力作用在这种梁上时产生的响应。

现在如[2]第七章，运动方程为

$$\left.\begin{aligned}&r^2u_{tt}-u_{xx}=(1-r^2N)w_xw_{xx}-2\nu\,u_t+G(x,t)\\&r^2(w_{tt}-Nw_{xx}+w_{xxxx})=(1-r^2N)\left(\frac{\partial}{\partial x}ew_x\right)-2r^2\mu w_t+F(x,t)\end{aligned}\right\}\tag{5.1}$$

现在

$$G(x,t)=c_1\,\delta(x-x_0)\delta(t-t_0),\quad F(x,t)=c_2\delta(x-x_0)\delta(t-t_0)\tag{5.2}$$

其中$r$是横截面回转半径，$N$是无量纲轴向负载，其他常数物理意义见[2]。

我们只考虑铰支铰支梁的情况，此时$r$为小量，但不是极小量，此时$u=O(w)$，边界条件为

$$\left.\begin{aligned}&u=0,\qquad\text{在 }x=0,\ x=l\text{ 处}\\&w=w_{xx}=0,\qquad\text{在 }x=0,\ x=l\text{ 处}\end{aligned}\right\}\tag{5.3}$$

假定

$$u=\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n(t)\sin\frac{n\pi x}{l},\quad w=\sum_{n=1}^{\infty}\eta_n(t)\sin\frac{n\pi x}{l}\tag{5.4}$$

将(5.4)代入(5.1), (5.2), 并两边乘以$\sin(m\pi x/l)$, 然后在$[0,l]$中积分，再作一些假设可得（见[2]）

$$\begin{cases}\ddot{\xi}_n+\lambda_n^2\xi_n=\varepsilon\left[-2\nu_n\dot{\xi}_n-n\varkappa\sum\limits_{m=1}^{\infty}m\,\eta_n(p\,\eta_p+q\eta_q)\right]+c_1\sin\dfrac{n\pi x_0}{l}\delta(t-t_0) & (5.5)\\[2ex]\ddot{\eta}_n+\omega_n^2\,\eta_n=\varepsilon\left[-2\mu_n\,\dot{\eta}_n-n\varkappa\sum\limits_{m=1}^{\infty}m\xi_m(p\eta_p+q\eta_q)\right]+c_2\sin\dfrac{n\pi x_0}{l}\delta(t-t_0) & (5.6)\end{cases}$$

再令

$$\xi_n=\xi_n^{(1)}+\xi_n^{(2)}H(t-t_0),\quad \eta_n=\eta_n^{(1)}+\eta_n^{(2)}H(t-t_0)$$

代入(5.5), (5.6)得到

$$
\left.\begin{aligned}
&\ddot{\xi}_n^{(1)}+\lambda_n^2\,\xi_n^{(1)}=\varepsilon\Big[-2\nu_n\,\dot{\xi}_n^{(1)}-n\varkappa\sum_{m=1}^{\infty} m\eta_m^{(1)}(p\eta_p^{(1)}+q\eta_q^{(1)})\Big]\\
&\ddot{\eta}_n^{(1)}+\omega_n^2\,\eta_n^{(1)}=\varepsilon\Big[-2\mu_n\dot{\eta}_n^{(1)}-\eta\varkappa\sum_{m=1}^{\infty} m\xi_m^{(1)}(p\eta_p^{(1)}+q\eta_q^{(1)})\Big]
\end{aligned}\right\}\tag{5.7}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
&\ddot{\xi}_n^{(2)}+\lambda_n^2\xi_n^{(2)}=\varepsilon\Big[-2\nu_n\,\dot{\xi}_n^{(2)}-n\varkappa\sum_{m=1}^{\infty} m\,\eta_m^{(1)}(p\eta_p^{(2)}+q\eta_q^{(2)})\\
&\qquad+m\eta_m^{(2)}(p\eta_p^{(1)}+q\eta_q^{(1)})+m\,\eta_m^{(2)}(p\eta_p^{(2)}+q\eta_q^{(2)})\Big]\\
&\ddot{\eta}_n^{(2)}+\omega_n^2\,\eta_n^{(2)}=\varepsilon\Big[-2\mu_n\dot{\eta}_n^{(2)}-n\varkappa\sum_{m=1}^{\infty} m\,\xi_m^{(1)}(p\eta_p^{(2)}+q\,\eta_q^{(2)})\\
&\qquad+m\xi_m^{(2)}(p\eta_p^{(1)}+q\eta_q^{(1)})+m\,\xi_m^{(2)}(p\eta_p^{(2)}+q\eta_q^{(2)})\Big]
\end{aligned}\right\}\tag{5.8}
$$

这里(5.7)与(5.8)是无穷个耦合的方程组，但在一定内共振条件下可以转化为有限个方程组。我们假设

$$\lambda_n\doteq\omega_m\pm\omega_p\qquad\text{或}\qquad\omega_m\doteq\omega_n\pm\omega_q$$

此时存在内共振，由于应用梁理论，细长比必须小，故只限于基本纵向模态$n=1$。我们取以下特殊情况说明问题：$\lambda_1=\omega_2+\omega_3+\varepsilon\sigma_1$

利用多重尺度法可求得内共振条件下一级近似解：

$$
\left.\begin{aligned}
&u(x,t)=[a_1^{(1)}\cos(\lambda_1 t+\alpha_1^{(1)})+a_1^{(2)}\cos(\lambda_2 t+\alpha_1^{(2)})H(t-t_0)]\sin\frac{\pi x}{l}+O(\varepsilon)\\
&w(x,t)=[b_2^{(1)}\cos(\omega_2 t+\beta_2^{(1)})+b_2^{(2)}\cos(\omega_2 t+\beta_2^{(2)})H(t-t_0)]\sin\frac{2\pi x}{l}\\
&\qquad+[b_3^{(1)}\cos(\omega_3 t+\beta_3^{(1)})+b_3^{(2)}\cos(\omega_3 t+\beta_3^{(1)})H(t-t_0)]\sin\frac{3\pi x}{l}+O(\varepsilon)
\end{aligned}\right\}\tag{5.9}
$$

其中 $a_1^{(1)},b_2^{(1)},b_3^{(1)},\alpha_1^{(1)}\ \beta_2^{(1)},\quad\beta_3^{(1)}$ 满足

$$
\left.\begin{aligned}
&\lambda_1\dot{a}_1^{(1)}+\lambda_1 a_1^{(1)}\nu_1-K\,b_2^{(1)}b_3^{(1)}\sin\gamma_{\rm I}=0,\quad \lambda_1 a_1^{(1)}\dot{\alpha}_1^{(1)}-K\,b_2^{(1)}b_3^{(1)}\cos\gamma_{\rm I}=0\\
&\omega_2\dot{b}_2^{(1)}+\omega_2\mu_2\,b_2^{(1)}+K\,a_1^{(1)}b_3^{(1)}\sin\gamma_{\rm I}=0,\quad \omega_2\,b_2^{(1)}\dot{\beta}_2^{(1)}-K\,a_1^{(1)}b_3^{(1)}\cos\gamma_{\rm I}=0\\
&\omega_3\dot{b}_3^{(1)}+\omega_3\mu_3\,b_3^{(1)}+K\,a_1^{(1)}b_2^{(1)}\sin\gamma_{\rm I}=0,\quad \omega_3\,b_3^{(1)}\dot{\beta}_3^{(1)}-K\,a_1^{(1)}b_2^{(1)}\cos\gamma_{\rm I}=0
\end{aligned}\right\}\tag{5.10}
$$

式中　$K=\dfrac{3}{2}\varkappa\qquad\gamma_{\rm I}=\sigma_{\rm I}T_1+\alpha_1-\beta_2-\beta_3$

而 $a_1^{(2)}$，$b_2^{(2)}$，$b_3^{(2)}$，$\alpha_1^{(2)}$，$\beta_2^{(2)}$，$\beta_3^{(2)}$满足

$$\left.\begin{aligned}
&\lambda_1\dot{a}_1^{(2)}+\lambda_1\nu_1 a_1^{(2)}-K(b_2^{(2)}b_3^{(2)}+b_2^{(1)}b_3^{(2)}+b_2^{(2)}b_3^{(1)})\sin\gamma_{\rm I}=0\\
&\lambda_1 a_1^{(2)}\dot{\alpha}_1^{(2)}-K(b_2^{(2)}b_3^{(2)}+b_2^{(1)}b_3^{(2)}+b_2^{(2)}b_3^{(1)})\cos\gamma_{\rm I}=0\\
&\omega_2\dot{b}_2^{(2)}+\omega_2\mu_2 b_2^{(2)}+K(a_1^{(2)}b_3^{(2)}+a_1^{(1)}b_3^{(2)}+a_1^{(2)}b_3^{(1)})\sin\gamma_{\rm I}=0\\
&\omega_2 b_2^{(2)}\dot{\beta}_2^{(2)}-K(a_1^{(2)}b_3^{(2)}+a_1^{(1)}b_3^{(2)}+a_1^{(2)}b_3^{(1)})\cos\gamma_{\rm I}=0\\
&\omega_3\dot{b}_3^{(2)}+\omega_3\mu_3 b_3^{(2)}+K(a_1^{(2)}b_2^{(2)}+a_1^{(1)}b_2^{(2)}+a_1^{(2)}b_2^{(1)})\sin\gamma_{\rm I}=0\\
&\omega_3 b_3^{(2)}\dot{\beta}_3^{(2)}-K(a_1^{(2)}b_2^{(2)}+a_1^{(1)}b_2^{(2)}+a_1^{(2)}b_2^{(1)})=\cos\gamma_{\rm I}=0
\end{aligned}\right\}\tag{5.11}$$

可以证明，(5.10)，(5.11)没有任何定常响应。

特别地，当$K=0$时，即线性情况，取$\omega_2=1$，$\lambda_1=2$，$\omega_3=1,4$，$\nu_1=1$，$\mu_2=\mu_3=1$，则可得

$$a_1^{(1)}=c_1^{(1)}e^{-t},\qquad b_2^{(1)}=c_2^{(1)}e^{-t},\qquad b_3^{(1)}=c_3^{(1)}e^{-t}$$

$$a_1^{(2)}=c_1^{(2)}e^{-t},\qquad b_2^{(2)}=c_2^{(2)}e^{-t},\qquad b_3^{(2)}=c_3^{(2)}e^{-t}$$

显然所得解全是衰减解，这与实际问题一致。

关于小冲击下弦和板的响应我们将另文给出。

作者对导师许政范教授在本文写作过程中的指导和帮助表示衷心感谢。

## 参 考 文 献

[1] 刘曾荣、魏锡荣，含有δ函数的弱非线性微分方程的摄动解，应用数学和力学，**5**，5 (1984)，691—697.

[2] Nayfeh, A. H. and Deam T. Mook, *Nonlinear Oscillations*, Wiley-Interscience (1979).

[3] Nayfeh, A. H., *Perturbation Methods*, Wiley-Interscience (1973).

# Perturbation Solution of the Weak-Nonlinear Partial Differential Equation with δ-Function

Xu Zhen-yuan

(*Anhui Huainan Normal College, Anhui*)

Liu Zheng-rong

(*Anhui University, Hefei*)

**Abstract**

In this paper we extend the method which Liu Zheng-rong provided to the weak-nonlinear partial equation with δ-function.