

文章编号: 1000-0887(2004)09-0917-10

轴向变速运动弦线的非线性振动的 稳态响应及其稳定性*

吴俊¹, 陈立群^{1,2}

(1. 上海大学, 上海市应用数学和力学研究所, 上海 200072;

2. 上海大学 力学系, 上海 200436)

(戴世强推荐)

摘要: 研究具有几何非线性的轴向运动弦线的稳态横向振动及其稳定性。轴向运动速度为常平均速度与小简谐涨落的叠加。应用 Hamilton 原理导出了描述弦线横向振动的非线性偏微分方程。直接应用于多尺度方法求解该方程。建立了避免出现长期项的可解性条件。得到了近倍频共振时非平凡稳态响应及其存在条件。给出数值例子说明了平均轴向速度、轴向速度涨落的幅值和频率的影响。应用 Liapunov 线性化稳定性理论, 导出倍频参数共振时平凡解和非平凡解的不稳定条件。给出数值算例说明相关参数对不稳定条件的影响。

关键词: 轴向运动弦线; 横向振动; 几何非线性; 多尺度法; 稳态响应

中图分类号: O322 **文献标识码:** A

引 言

多种工程装置出现轴向运动弦线的横向振动。这类系统已有大量研究^[1]。除个别例外, 这些研究都是针对轴向匀速运动弦线。Pakdemirli 等研究了以随时间变化的速度轴向运动弦线的横向运动。他们应用 Floquet 理论结合 Galerkin 截断^[2,3]和多尺度法^[4]研究了横向振动的稳定性。Ozkaya 和 Pakdemirli 用 Lie 群方法求解轴向变速弦线的振动问题^[5]。但这些工作仅考虑了线性振动。

本文建立了描述轴向变速弦线非线性振动的偏微分方程。将多尺度法^[4,6-10]应用于分析该方程。导出了可建立动态响应幅值和相角满足常微分方程的可解性条件。得到了倍频参数共振非平凡响应解及存在条件的显式。给出了倍频参数共振稳态响应和存在条件的数值结果。应用 Liapunov 线性化稳定性建立了平凡解、第一和第二非平凡解的不稳定条件。通过数值算例表明平均运动速度、速度变化的幅值和频率对不稳定条件的影响。

* 收稿日期: 2002_05_13; 修订日期: 2004_04_05

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10172056)

作者简介: 吴俊(1978—), 男, 江苏苏州人, 硕士;

陈立群(1963—), 男, 上海市人, 教授, 博士, 博士生导师(联系人, Tel: + 86_21_66134972;

Fax: + 86_21_56635364; E_mail: lqchen@online.sh.cn)。

1 运动方程

研究密度为 ρ 、横截面积为 A 、张力为 P_0 、轴向运动速度为时间 t 的已知函数 $c(t)$ 的均匀弹性轴向运动弦线。仅考虑 y 方向的横向振动。弦线在距离为 l 的小孔固定运动。将应用 Hamilton 原理建立系统运动方程。

弦线的势能为

$$E_P = \int_0^l \left(P_0 \varepsilon_L + \frac{1}{2} E_0 A \varepsilon_L^2 \right) dx, \quad (1)$$

其中 $\varepsilon_L(x, t)$ 表示轴向 Lagrange 应变分量, E_0 为弹性模量, 式(1) 积分中第一项由张力引起, 第二项由轴向变形引起。应变与横向位移 $V(x, t)$ 的关系是

$$\varepsilon_L = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2, \quad (2)$$

系统动能为

$$E_K = \frac{\rho A}{2} \int_0^l \left[\left(\frac{\partial V}{\partial t} + c \frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 + c^2 \right] dx. \quad (3)$$

根据 Hamilton 原理

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (E_K - E_P) dt = 0, \quad (4)$$

式(2)代入式(1), 然后将式(1)和(3)代入式(4), 得到

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l \left\{ \frac{\rho A}{2} \left[\left(\frac{\partial V}{\partial t} \right)^2 + 2c \frac{\partial V}{\partial t} \frac{\partial V}{\partial x} + c^2 \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 + c^2 \right] - \left[\frac{1}{2} P_0 \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{8} E_0 A \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^4 \right] \right\} dx dt = 0 \quad (5)$$

进行分部积分并令积分号中项为零, 得到

$$\rho \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + 2\rho c \frac{\partial^2 V}{\partial t \partial x} + \left(\rho c^2 - \frac{P_0}{A} \right) \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \rho \frac{dc}{dt} \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{3E_0}{2} \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}, \quad (6)$$

式(6)为横向非线性振动的方程。

在下列研究中, 设轴向运动速度为常平均速度与小简谐涨落的叠加

$$c(t) = c_0 + c_1 \cos \Omega t, \quad (7)$$

将式(7)代入式(6), 并将所得结果变换为无量纲形式, 得到

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2} + 2(\gamma_0 + \gamma_1 \cos \omega \tau) \frac{\partial^2 v}{\partial \tau \partial \xi} + \left(\gamma_0^2 + \frac{\gamma_1^2}{2} + 2\gamma_0 \gamma_1 \cos \omega \tau + \frac{\gamma_1^2}{2} \cos 2\omega \tau - 1 \right) \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} - \omega \gamma_1 \sin \omega \tau \frac{\partial v}{\partial \xi} = \frac{3E}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial \xi} \right)^2 \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}, \quad (8)$$

其中

$$\begin{cases} v = \frac{V}{l}, \quad \xi = \frac{x}{l}, \quad \tau = t \left(\frac{P_0}{\rho A l^2} \right)^{1/2}, \quad \omega = \Omega \left(\frac{\rho A l^2}{P_0} \right)^{1/2}, \\ E = \frac{E_0 A}{P_0}, \quad \gamma_0 = c_0 \left(\frac{\rho A}{P_0} \right)^{1/2}, \quad \gamma_1 = c_1 \left(\frac{\rho A}{P_0} \right)^{1/2}. \end{cases} \quad (9)$$

2 多尺度分析

引入下列质量、陀螺和刚度算子

$$M = I, \quad G = 2v_0 \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad K = (v_0^2 - 1) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}, \quad (10)$$

其中算子 M 和 K 在亚临界轴向速度下为对称正定, 表示 Coriolis 加速度分量算子 G 为反对称. 采用小无量纲参数 ε 为记帐符号, 将式(8)改写为带弱非线性项和参数激励项的连续陀螺系统

$$M \frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2} + G \frac{\partial v}{\partial \tau} + Kv = \varepsilon \left[\frac{3E}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial \xi} \right)^2 \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} - \frac{\delta v_0^2}{2} (\delta + 4\cos \omega \tau + \delta \cos 2\omega \tau) \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} - 2\delta v_0 \cos \omega \tau \frac{\partial^2 v}{\partial \tau \partial \xi} + \omega \delta v_0 \sin \omega \tau \frac{\partial v}{\partial \xi} \right], \quad (11)$$

其中 $\delta = v_1/v_0$.

多尺度方法将直接应用于式(11). 所求的一阶一致近似具有形式

$$v(\xi, \tau, \varepsilon) = v_0(\xi, T_0, T_1) + \varepsilon v_1(\xi, T_0, T_1) + \dots, \quad (12)$$

其中快尺度 $T_0 = \tau$ 刻画接近 ω 或 ω_k (相应未受扰动线性系统的一个固有频率), 慢尺度 $T_1 = \varepsilon \tau$ 刻画由于非线性和可能的共振导致的幅值和相位调制. 将式(12)和下列关系式

$$\frac{\partial}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T_1} + \dots \quad (13)$$

代入式(11), 应用链求导规则并令 ε 的同次幂相等, 得到

$$\begin{aligned} M \frac{\partial^2 v_0}{\partial T_0^2} + G \frac{\partial v_0}{\partial T_0} + Kv_0 &= 0, \\ M \frac{\partial^2 v_1}{\partial T_0^2} + G \frac{\partial v_1}{\partial T_0} + Kv_1 &= -2M \frac{\partial^2 v_0}{\partial T_0 \partial T_1} - G \frac{\partial v_0}{\partial T_1} + \\ &\quad \frac{3E}{2} \left(\frac{\partial v_0}{\partial \xi} \right)^2 \frac{\partial^2 v_0}{\partial \xi^2} - 2\delta v_0 \cos \omega T_0 \frac{\partial^2 v_0}{\partial T_0 \partial \xi} - \\ &\quad \frac{\delta v_0^2}{2} (\delta + 4\cos \omega T_0 + \delta \cos 2\omega T_0) \frac{\partial^2 v_0}{\partial \xi^2} + \omega \delta v_0 \sin \omega T_0 \frac{\partial v_0}{\partial \xi}. \end{aligned} \quad (14)$$

方程(14)的解由 Wickert 和 Mote^[10] 给出

$$v_0 = \sum_{m=0, \pm 1, \dots} [\phi_m(\xi) A_m(T_1) e^{i\omega_m T_0} + \bar{\phi}_m(\xi) A_m(T_1) e^{-i\omega_m T_0}], \quad (16)$$

其中的上短横表示共轭复数, 第 m 阶固有频率和位移场的第 m 阶本征函数分别为

$$\omega_m = m\pi(1 - v^2), \quad \phi_m(\xi) = \sqrt{2} \sin(m\pi\xi) e^{im\pi v \xi}, \quad (17)$$

它们满足

$$\langle \phi_m, M\phi_m \rangle = 1, \quad \langle \phi_m, G\phi_m \rangle = 2im\pi v^2, \quad (18)$$

其中的内积定义为

$$\langle \phi_i, \phi_j \rangle = \int_0^l \phi_i \phi_j d\xi. \quad (19)$$

若涨落频率接近于系统某固有频率的 2 倍, 可能出现倍频参数共振. 引入解谐参数 μ 量化 ω 与 $2\omega_m$ 的偏离而将 ω 表示为

$$\omega = 2\omega_m + \varepsilon\mu. \quad (20)$$

为研究倍频参数共振, 式(16)可写作

$$v_0 = \phi_m(\xi) A_m(T_1) e^{i\omega_m T_0} + cc, \quad (21)$$

在本文中, cc 表示方程右端前面所有项的共轭复数。

将式(20)和(21)代入式(15), 并将三角函数表示为指数形式, 得到

$$M \frac{\partial^2 v_1}{\partial T_0^2} + G \frac{\partial v_1}{\partial T_0} + K v_1 = \text{NST} + \left\{ -2i\omega_m A_m' M \phi_m - \right. \\ \left. A_m' G \phi_m + 3EM_{2m} A_m |A_m|^2 - \frac{1}{2} \gamma_0^2 \delta^2 A_m \phi_m'' + \right. \\ \left. \left[\left((1+i)\omega_m + \frac{1}{2}\mu \right) \overline{\phi_m} - \gamma_0 \overline{\phi_m} \right] \delta \gamma_0 A_m e^{i\mu_1} \right\} e^{2i\omega_m T_0} + \text{c. c.}, \quad (22)$$

其中

$$M_{2m} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \phi_m}{\partial \xi} \right)^2 \frac{\partial^2 \overline{\phi_m}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial \phi_m}{\partial \xi} \frac{\partial \overline{\phi_m}}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \phi_m}{\partial \xi^2} \right], \quad (23)$$

而 NST 表示不会产生长期项的各项。仅当可解性条件成立时, 方程(22)有有界解。可解性条件要求式(22)右端各项与相应齐次问题的解正交。为避免无界解, 可解性条件为

$$-2i\omega_m A_m \langle M \phi_m, \phi_m \rangle - A_m \langle G \phi_m, \phi_m \rangle + 3E A_m |A_m|^2 \langle M_{2m}, \phi_m \rangle - \\ \frac{1}{2} \gamma_0^2 \delta^2 A_m \langle \phi_m'', \phi_m \rangle + \left\{ \left[(1+i)\omega_m + \frac{1}{2}\mu \right] \langle \overline{\phi_m}, \phi_m \rangle - \right. \\ \left. \gamma_0 \langle \overline{\phi_m}, \phi_m \rangle \right\} \delta \gamma_0 A_m e^{i\mu_1} = 0. \quad (24)$$

利用式(17)给出的固有频率和本征函数, 计算式(24)中的内积, 得到

$$\begin{cases} \langle M_{2m}, \phi_m \rangle = -\frac{1}{4} \pi^4 m^4 (3 + 2\gamma_0^2 + 3\gamma_0^4), & \langle \overline{\phi_m}', \phi_m \rangle = 0, \\ \langle \phi_m'', \phi_m \rangle = -m^2 \pi^2 (1 + \gamma_0^2), & \langle \overline{\phi_m}'', \phi_m \rangle = \frac{im\pi}{2\gamma_0} (1 - e^{-2i\gamma_0 m\pi}). \end{cases} \quad (25)$$

式(18)和(25)代入式(24)导出可解性条件

$$A_m - 3iC_1 m^3 E A_m |A_m|^2 + iC_2 m A_m - \\ \frac{\delta \gamma_0}{4} [1 - \cos(2\gamma_0 m\pi) + i \sin(2\gamma_0 m\pi)] A_m e^{i\mu_1} = 0, \quad (26)$$

其中

$$C_1 = \frac{1}{8} \pi^3 (3 + 2\gamma_0^2 + 3\gamma_0^4), \quad C_2 = \frac{1}{4} \gamma_0^2 \delta^2 \pi (1 + \gamma_0^2). \quad (27)$$

显然, 式(26)具有平凡解 $A_m = 0$ 。将非平凡解表示为极坐标形式

$$A_m = \alpha_m e^{i\beta_m}, \quad (28)$$

其中 α_m 和 β_m 分别表示响应的幅值和相角。式(28)代入式(26)并在所得到式子中分离实部和虚部, 导出

$$\alpha_m' = \frac{\delta \gamma_0 \alpha_m}{4} \left\{ \cos \theta [1 - \cos(2\gamma_0 m\pi)] - \sin \theta \sin(2\gamma_0 m\pi) \right\}, \quad (29)$$

$$\theta_m' = \mu - 3C_1 E m^3 \alpha_m^2 + C_2 m - \\ \frac{\delta \gamma_0}{4} \left\{ \sin \theta [1 - \cos(2\gamma_0 m\pi)] + \cos \theta \sin(2\gamma_0 m\pi) \right\}, \quad (30)$$

其中

$$\theta_m = \mu T_1 - \beta_m. \quad (31)$$

3 稳态响应

对于稳态响应, 式(29)和(30)中的幅值 α_m 和新相角 θ_m 应为常数。在式(29)和(30)中分

别令 $\dot{\alpha}_m = 0$ 和 $\dot{\theta}_m = 0$, 得到

$$\frac{\delta \gamma_0 \alpha_m}{4} \left\{ \cos \theta [1 - \cos(2 \gamma_0 m \pi)] - \sin \theta \sin(2 \gamma_0 m \pi) \right\} = 0, \tag{32}$$

$$\mu - 3C_1 E m^3 \alpha_m^2 + C_2 m -$$

$$\frac{\delta \gamma_0}{4} \left\{ \sin \theta [1 - \cos(2 \gamma_0 m \pi)] + \cos \theta \sin(2 \gamma_0 m \pi) \right\} = 0 \tag{33}$$

从式(32)和(33)消去 θ_m , 导出

$$\alpha_m^4 - k_1 \alpha_m^2 + k_0 = 0, \tag{34}$$

其中

$$k_1 = \frac{(\mu + 2C_2 m)}{3C_1 E m^3}, \quad k_0 = \frac{(\mu + 2C_2 m)^2 - \delta^2 \gamma_0^2 [1 - \cos(2 \gamma_0 m \pi)]}{72C_1^2 E^2 m^6}. \tag{35}$$

显然, 式(29)在原点有奇异点平凡零解。此外, 可能存在非平凡周期解, 其幅值由方程(32)和(33), 亦即方程(34)确定, 即

$$\alpha_m^2 = \frac{(\mu + 2C_2 m)^2 \pm \delta \gamma_0 |\sin(\gamma_0 m \pi)|}{6C_1 E m^3}, \tag{36}$$

式(36)表示倍频参数共振稳态响应的幅值。

由式(36)可知, 非平凡稳态解存在的条件为

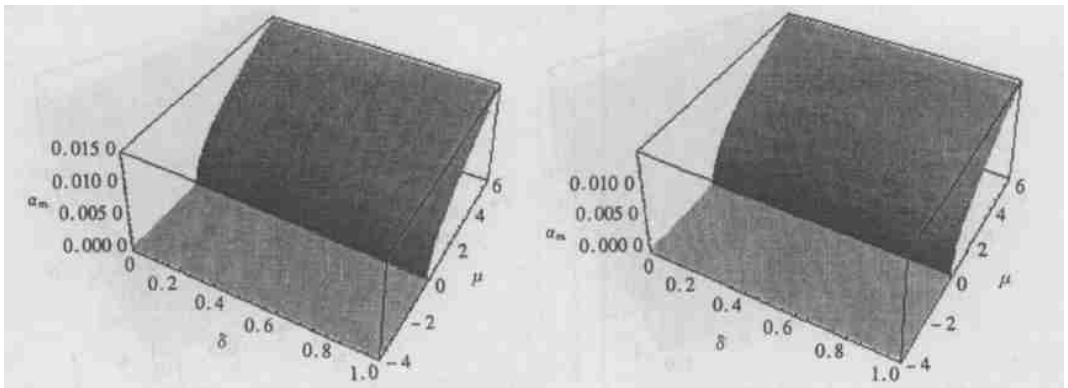
$$(\mu + 2C_2 m) \pm \delta \gamma_0 |\sin(\gamma_0 m \pi)| > 0, \tag{37}$$

它给出了在参数空间倍频参数共振的存在边界。

由式(36)可以确定平均轴向运动速度、速度变化的幅值和频率对稳态响应幅值的影响。

在下列算例中, 取 $m = 1$ 和 $E = 400$ 。

在分别将无量纲化的平均轴向运动速度固定为 $\gamma_0 = 0.2$ 和 $\gamma_0 = 0.9$ 时, 稳态响应的幅值和存在边界随无量纲化的速度变化幅值 δ 和解谐参数 μ 的变化如图 1 和图 2 所示。响应幅值随 δ 和 μ 的增加而增大。无量纲化的平均轴向速度显著影响存在边界。

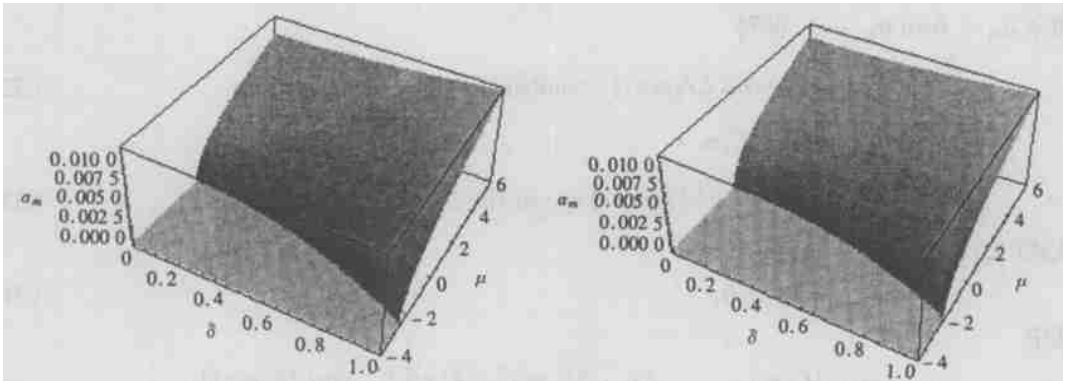


(a) 第一非平凡解

(b) 第二非平凡解

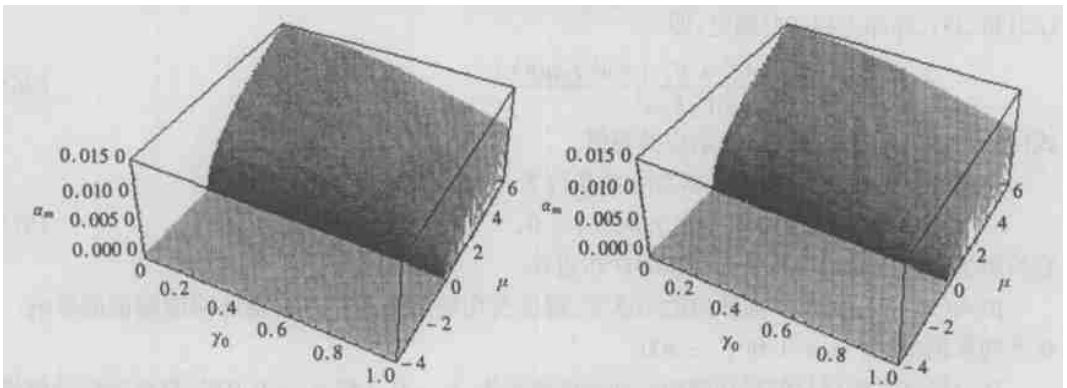
图 1 给定 $\gamma_0 = 0.2$ 时响应幅值随 δ 和 μ 的变化

在分别将无量纲化的速度变化幅值固定为 $\delta_0 = 0.1$ 和 $\delta_0 = 0.9$ 时, 稳态响应的幅值和存在边界随无量纲化的平均轴向运动速度 γ_0 和解谐参数 μ 的变化如图 3 和图 4 所示。平均轴向速度不仅影响非平凡稳态响应的幅值, 而且影响其存在区域, 特别是在图 4 中。响应的幅值随 μ 的增加和 γ_0 的减少而增大。



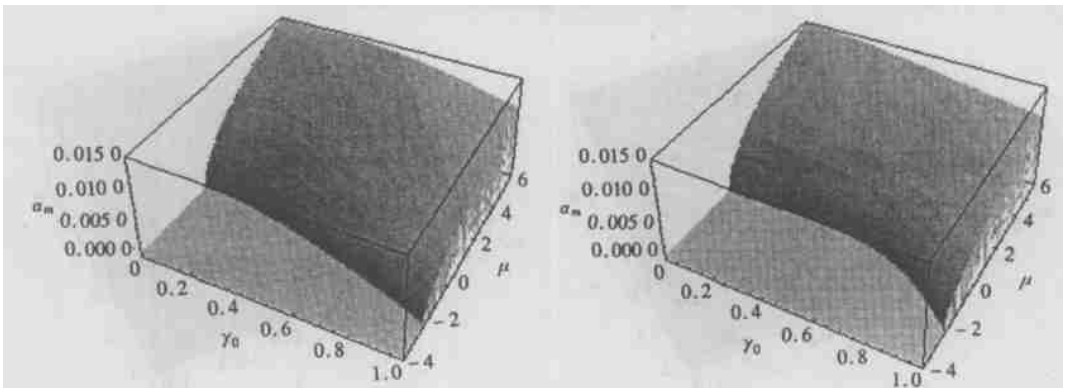
(a) 第一非平凡解

(b) 第二非平凡解

图2 给定 $\gamma_0 = 0.9$ 时响应幅值随 δ 和 μ 的变化

(a) 第一非平凡解

(b) 第二非平凡解

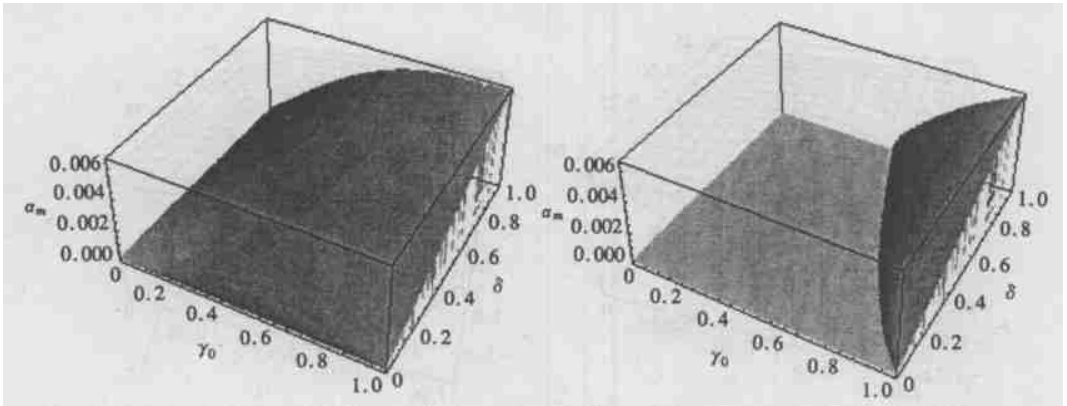
图3 给定 $\delta = 0.1$ 时响应幅值随 γ_0 和 μ 的变化

(a) 第一非平凡解

(b) 第二非平凡解

图4 给定 $\delta = 0.9$ 时响应幅值随 γ_0 和 μ 的变化

在上述情形, μ 显著影响稳态响应的幅值和存在边界。在严格倍频共振的情形 ($\mu = 0$), 稳态响应的幅值和存在边界随无量纲化速度变化幅值 δ 和平均速度 γ_0 的变化如图 5 示。响应幅值随 δ 和 γ_0 增加而增大。第二非平凡解仅在 δ 和 γ_0 较大时存在。



(a) 第一非平凡解 (b) 第二非平凡解

图5 严格倍频参数共振的响应幅值随 γ_0 和 δ 的变化

4 稳定性分析

先讨论平凡解的稳定性。将式(26)中的非线性项略去, 得到

$$A_m' - iC_2mA_m - \frac{\delta\gamma_0}{4}[1 - \cos(2\gamma_0m\pi) + i\sin(2\gamma_0m\pi)]A_me^{i\mu T_1} = 0 \quad (38)$$

为将式(38)变换为常系数方程, 引入变换

$$A_m = (a_r + ia_i)e^{\beta T_1 + (i\mu T_1/2)}, \quad (39)$$

式(39)代入式(38)并在所得方程中分离实部和虚部, 得到

$$\begin{cases} \left\{ 2\beta - \frac{\delta\gamma_0}{2}[1 - \cos(2\gamma_0m\pi)] \right\} a_r - \left[\mu + 2C_2m + \frac{\delta\gamma_0}{2}\sin(2\gamma_0m\pi) \right] a_i = 0, \\ \left[\mu + 2C_2m - \frac{\delta\gamma_0}{2}\sin(2\gamma_0m\pi) \right] a_r + \left\{ 2\beta + \frac{\delta\gamma_0}{2}[1 - \cos(2\gamma_0m\pi)] \right\} a_i = 0 \end{cases} \quad (40)$$

受扰动的平凡解为非平凡解, 故式(41)的系数行列式为零, 即

$$4\beta^2 - \frac{\delta^2\gamma_0^2}{2}[1 - \cos(2\gamma_0m\pi)] + (\mu + 2C_2m)^2 = 0, \quad (41)$$

若条件

$$\frac{\delta^2\gamma_0^2}{8}[1 - \cos(2\gamma_0m\pi)] - \frac{(\mu + 2C_2m)^2}{4} > 0 \quad (42)$$

成立时 β 有正实部。由式(39)知, 在此条件下式(38)的零解不稳定。Liapunov 线性化稳定性表明原非线性系统的不稳定性与相应线性系统相同。故当

$$\begin{aligned} -\frac{\pi}{2}\gamma_0^2\delta^2(1 + \gamma_0^2)m - \delta\gamma_0|\sin(\gamma_0m\pi)| < \mu < \\ -\frac{\pi}{2}\gamma_0^2\delta^2(1 + \gamma_0^2)m + \delta\gamma_0|\sin(\gamma_0m\pi)| \end{aligned} \quad (43)$$

时, 倍频参数共振的平凡解不稳定。

$m = 1$ 和 $m = 2$ 时的倍频参数共振平凡解的不稳定区域分别如图6(a)中区域1和图6(b)中的区域1、2所示。

再讨论非平凡解的稳定性。线性化式(29)和(30), 可以得到线性方程

$$\begin{pmatrix} \alpha_m' \\ \theta' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \alpha_m \\ \theta \end{pmatrix}, \quad (44)$$

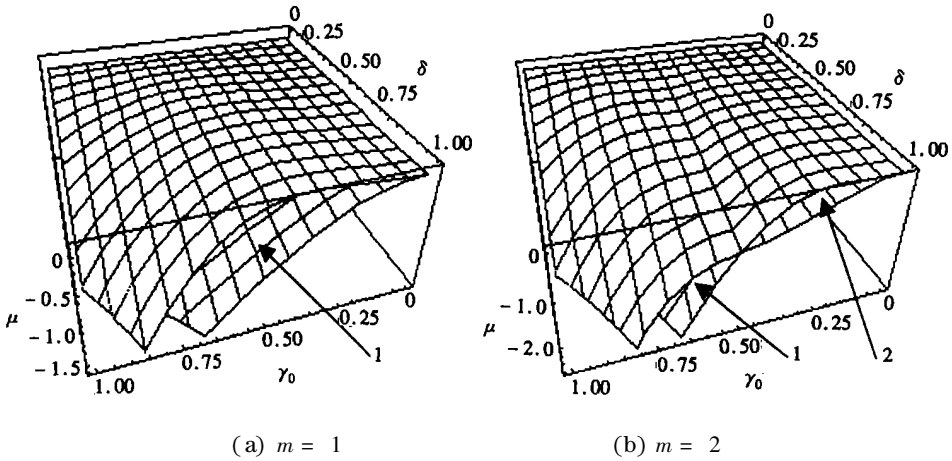


图 6 平凡解的不稳定区域

其中矩阵 A 是在由式(32) 和(33) 确定的不动点 $(\alpha_{m,2}, \theta_{1,2})$ 计算的 Jacobi 矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_{m,2} \left[\frac{1}{2} \mu - 3C_1 E m^3 \alpha_{m,2}^2 + C_2 m \right] \\ -12C_1 E m^3 \alpha_{m,2} & 0 \end{pmatrix}. \tag{45}$$

根据 Liapunov 线性化稳定性理论, 非平凡解的稳定性由矩阵 A 的本征值确定. 如果本征值具有负实部, 则稳态解稳定. 而至少有一个本征值实部为正, 则稳态解不稳定. 矩阵 A 的特征方程为

$$\lambda^2 + a_2 = 0, \tag{46}$$

其中

$$a_2 = 6C_1 E m^3 \alpha_{m,2}^2 (6C_1 E m^3 \alpha_{m,2}^2 - \mu - 2C_2 m). \tag{47}$$

将式(36) 和式(27) 代入式(47), 得到

$$a_2 = \pm \delta \gamma_0 (\mu + 2C_2 m) | \sin(\gamma_0 m \pi) | + \delta^2 \gamma_0^2 \sin^2(\gamma_0 m \pi), \tag{48}$$

故当

$$\mu < -\frac{\pi}{2} \gamma_0^2 \delta^2 (1 + \gamma_0^2) m - \delta \gamma_0 | \sin(\gamma_0 m \pi) | \tag{49}$$

时, 对于第一非平凡解有 $a_2 < 0$. 特征方程(46) 有一个具有正实部的根, 线性化方程(44) 不稳定. 故此时第一非平凡解不稳定. $m = 1$ 和 $m = 2$ 时的倍频参数共振第一非平凡解的不稳定区域分别如图 7(a) 和图 7(b) 中的区域 1 所示. 当

$$\mu > -\frac{\pi}{2} \gamma_0^2 \delta^2 (1 + \gamma_0^2) m + \delta \gamma_0 | \sin(\gamma_0 m \pi) | \tag{50}$$

时, 对于第一非平凡解 $a_2 < 0$. 特征方程(46) 有一个具有正实部的根, 线性化方程(44) 不稳定. 故此时第二非平凡解不稳定. $m = 1$ 和 $m = 2$ 时的倍频参数共振第二非平凡解的不稳定区域分别如图 8(a) 和图 8(b) 中的区域 1 所示.

5 结 论

本文研究了轴向加速弦线的横向非线性振动. 基于 Hamilton 原理建立了描述弦线横向振动的非线性偏微分方程(6). 将多尺度法直接应用于该偏微分方程. 由可解性条件(26) 导出一组确定动态响应幅值和相角的常微分方程(29)和(30), 得到了倍频参数共振非平凡响应的

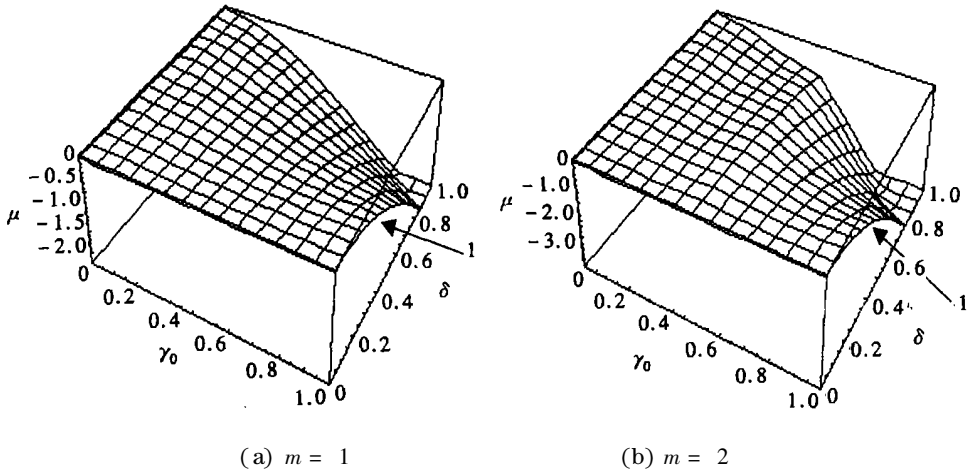


图7 第一非平凡解的不稳定区域

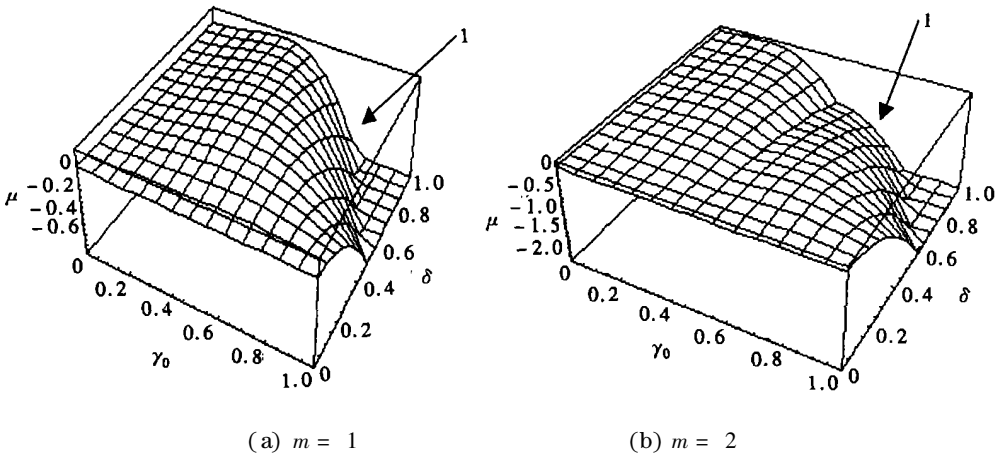


图8 第二非平凡解的不稳定区域

幅值(36)和存在条件(37)• 用数值方法说明了相关参数对倍频响应稳态响应和存在条件的影响• 应用线性化稳定性分析,建立了平凡解、第一非平凡解和第二非平凡解的不稳定条件(43)、(49)和(50)• 用数值算例说明了相关参数对不稳定条件的影响•

[参 考 文 献]

- [1] 陈立群, Zu J W. 轴向运动弦线纵向振动及其控制[J]. 力学进展, 2001, 31(4): 535—546.
- [2] Pakdemirli M, Batan H. Dynamic stability of a constantly accelerating strip [J]. J Sound Vibrations, 1993, 168(2): 371—378.
- [3] Pakdemirli M, Ulsoy A G, Ceranoglu A. Transverse vibration of an axially accelerating string[J]. J Sound Vibrations, 1994, 169(2): 179—196.
- [4] Pakdemirli M, Ulsoy A G. Stability analysis of an axially accelerating string[J]. J Sound Vibrations, 1997, 203(5): 815—832.
- [5] Ozkaya E, Pakdemirli M. Lie group theory and analytical solutions for the axially accelerating string problem[J]. J Sound Vibrations, 2000, 230(4): 729—742.
- [6] Zhang L, Zu J W. Non-linear vibrations of viscoelastic moving belts—part I: free vibration analysis [J]. J Sound Vibrations, 1998, 216(1): 75—91.

- [7] Zhang L, Zu J W. Non_linear vibrations of viscoelastic moving belts—part 2: forced vibration analysis [J]. J Sound Vibrations, 1998, **216**(1): 93—103.
- [8] Zhang L, Zu J W. Nonlinear vibration of parametrically excited moving belts—part 1: dynamic response [J]. J Appl Mech, 1999, **66**(2): 396—402.
- [9] Zhang L, Zu J W. Nonlinear vibration of parametrically excited moving belts—part 2: stability analysis [J]. J Appl Mech, 1999, **66**(2): 403—409.
- [10] Wickert J A, Mote C D Jr. Classical vibration analysis of axially moving continua [J]. J Appl Mech, 1990, **57**(3): 738—744.

Steady_State Responses and Their Stability of Nonlinear Vibration of an Axially Accelerating String

WU Jun¹, CHEN Li_qun^{1,2}

(1. Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics,
Shanghai University, Shanghai 200072, P. R. China;

2. Department of Mechanics, Shanghai University,
Shanghai 200436, P. R. China)

Abstract: The steady_state transverse vibration of an axially moving string with geometric nonlinearity was investigated. The transport speed was assumed to be a constant mean speed with small harmonic variations. The nonlinear partial_differential equation that governs the transverse vibration of the string was derived by use of the Hamilton principle. The method of multiple scales was applied directly to the equation. The solvability condition of eliminating the secular terms was established. Closed form solutions for the amplitude and the existence conditions of nontrivial steady_state response of the two_to_one parametric resonance were obtained. Some numerical examples showing effects of the mean transport speed, the amplitude and the frequency of speed variation were presented. The Liapunov linearized stability theory was employed to derive the instability conditions of the trivial solution and the nontrivial solutions for the two_to_one parametric resonance. Some numerical examples highlighting influences of the related parameters on the instability conditions were presented.

Key words: axially moving string; transverse vibration; geometric nonlinearity; method of multiple scale; steady_state response