应用数学和力学，第8卷第2期（1987年2月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

受冲力作用的非完整系统的运动方程*

孙右烈

（上海工业大学，1985年11月3日收到）

摘　要

有关用广义坐标表示的非完整系统的碰撞方程组，在一般分析力学著作中已有详细的叙述，但在这些方程中，都包含有待定乘子，这些未知量的出现使问题变得复杂。

本文通过适当的数学处理，推出了用广义坐标表示的、不含待定乘子的非完整系统的碰撞方程组，简化了问题。由于运用了δ函数以及矩阵表示，因而使推导与结论更简洁明瞭。

一、引　言

当系统的运动状态用广义坐标：$q_1, \cdots, q_n$ 描写时，可以从拉格朗日方程推出该完整系统的碰撞方程组[1]：

$$\Delta p_i = \hat{Q}_i \qquad (i=1, \cdots, n)$$

其中p_i为广义动量，$\hat{Q}_i$为广义冲量。

如在系统上加有非完整约束

$$a_{\beta 0} + a_{\beta 1}\dot{q}_1 + \cdots + a_{\beta n}\dot{q}_n = 0 \qquad (\beta=1, \cdots, s) \tag{1.1}$$

也可推出该非完整系统的碰撞方程组[2,3]：

$$\Delta p_i = \hat{Q}_i + \sum_{\beta=1}^{s} \sigma'_\beta a_{\beta i} \qquad (i=1, \cdots, n)$$

其中σ'_β为待定乘子。这些内容在一般著作[2][3]中皆有叙述。但是，由于在碰撞方程组中，出现了s个待定乘子：$\sigma'_1, \cdots, \sigma'_s$，因此，要解具有非完整约束的碰撞问题，必须将$n$个碰撞方程和$s$个非完整约束方程联立起来，才能解出$q_1, \cdots, q_n$，$\sigma'_1, \cdots, \sigma'_s$等$n+s$个未知量。这就使问题变得更复杂了。

为了简化问题，作者提出，从消去了待定乘子的马基方程[2]出发，它的形式为：

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) C_{ij} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial T}{\partial q_i} C_{ij} = \sum_{i=1}^{n} Q_i C_{ij} \qquad (j=1, \cdots, n) \tag{1.2}$$

其中C_{ij}为广义速度：$\dot{q}_1, \cdots, \dot{q}_n$ 和新的独立广义速度：$u_1, \cdots, u_l$，之间的变换系数：

$$\dot{q}_i = \sum_{j=1}^{l} C_{ij} u_j + C_{i0} \qquad (i=1, \cdots, n)$$

---

* 汪家訸推荐。

其中 $l=n-s$ 为非完整系统的自由度数，经过适当的推导，就能得出非完整系统的碰撞方程，其中不含待定乘子。这样，就使问题得到简化。

二、取$\dot{q}_1$，…，$\dot{q}_l$为独立广义速度时，C_{ij}的值

考虑加有s个约束(1.1)的非完整系统，其中$a_{\beta 0}$，$a_{\beta 1}$,…，$a_{\beta n}$为：q_1,…，q_n以及时间τ的函数。设作用于系统上的主动力不具有势函数。

为了清楚起见，以下用矩阵表示来叙述。

由于系统中加有s个约束(1.1)，因此n个广义速度$\dot{q}_1$,…，$\dot{q}_n$中只有$l=n-s$个广义速度是独立的，现在取前l个广义速度$\dot{q}_1$,…，$\dot{q}_l$为独立变量，记为

$$\{\dot{q}_1\}=[\dot{q}_1 \ \cdots \ \dot{q}_l]^T$$

后s个不独立的广义速度：$\dot{q}_{l+1}$,…，$\dot{q}_n$记为

$$\{\dot{q}_2\}=[\dot{q}_{l+1} \ \cdots \ \dot{q}_n]^T$$

于是，方程组(1.1)写成矩阵形式为

$$\{A_0\}+[A_1]\{\dot{q}_1\}+[A_2]\{\dot{q}_2\}=0 \tag{2.1}$$

其中

$$\{A_0\}=[a_{10} \ \cdots \ a_{s0}]^T$$

为一列矢，

$$[A_1]=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1l} \\ & \cdots\cdots\cdots & \\ a_{s1} & \cdots & a_{sl} \end{bmatrix} \tag{2.1$'$}$$

为$s\times l$矩阵，

$$[A_2]=\begin{bmatrix} a_{1\,l+1} & \cdots & a_{1n} \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ a_{s\,l+1} & \cdots & a_{sn} \end{bmatrix} \tag{2.1$''$}$$

因为$n-l=s$，所以$[A_2]$是$s\times s$方阵。

方程组(1.2)写成矩阵表示式为

$$\left\{\frac{dP}{d\tau}\right\}^T[C]=\left\{\frac{\partial T}{\partial q}\right\}^T[C]+\{Q\}^T[C] \tag{2.2}$$

其中

$$\left\{\frac{dP}{d\tau}\right\}=\left[\frac{d}{d\tau}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \ \cdots \ \frac{d}{d\tau}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_n}\right]^T$$

$$\left\{\frac{\partial T}{\partial q}\right\}=\left[\frac{\partial T}{\partial q_1} \ \cdots \ \frac{\partial T}{\partial q_n}\right]^T$$

$$\{Q\}=[Q_1 \ \cdots \ Q_n]^T$$

均为一列矢。由(2.1)解出$\{\dot{q}_2\}$为

$$\{\dot{q}_2\}=-[A_2]^{-1}\{A_0\}-[A_2]^{-1}[A_1]\{\dot{q}_1\} \tag{2.3}$$

将$\{\dot{q}_1\}$和(2.3)式合并，可以写成

$$\begin{bmatrix}\{\dot{q}_1\}\\ \{\dot{q}_2\}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\{0\}\\ -[A_2]^{-1}\{A_0\}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}[I]\\ -[A_2]^{-1}[A_1]\end{bmatrix}\{\dot{q}_1\} \tag{2.4}$$

其中$\{0\}$是由l个零元素组成的列矢量，$[I]$为$l\times l$单位矩阵。(2.4)式再可写成

$$\{\dot{q}\}=\{C_0\}+[C]\{\dot{q}_I\} \tag{2.5}$$

其中

$$\{\dot{q}\}=\begin{bmatrix}\{\dot{q}_1\}\\ \{\dot{q}_2\}\end{bmatrix},\ \{C_0\}=\begin{bmatrix}\{0\}\\ -[A_2]^{-1}\{A_0\}\end{bmatrix}$$

分别都是由n个元素组成的一列矢，

$$[C]=\begin{bmatrix}[I]\\ -[A_2]^{-1}[A_1]\end{bmatrix} \tag{2.6}$$

是$n\times l$矩阵。

这样我们利用(2.1)式求出了$\{\dot{q}\}$以$\{\dot{q}_1\}$为变量的表示式(2.5)，即找出了n个广义速度：$\dot{q}_1,\cdots,\ \dot{q}_n$和$l$个独立变量：$\dot{q}_1,\cdots,\ \dot{q}_l$之间的变换关系，其变换系数$[C]$由(2.6)式给出。

三、有冲力作用时非完整系统的运动方程

考虑由N个质点组成的质点系，在其上作用了m个完整约束，还作用了s个非完整约束(1.1)。系统的广义坐标个数为$n=3N-m$，记为$q_1,\cdots,\ q_n$，由于约束(1.1)的存在，n个广义速度$\dot{q}_1,\cdots,\ \dot{q}_n$必须满足(1.1)式。已知在$t$至$t+\tau_0$的碰撞时间间隔中，作用在质点系上第$\mu$个质点的冲力为$\vec{F}_\mu$ ($\mu=1,\cdots,\ N$)，则系统的广义力[4]为

$$Q_i=\sum_{\mu=1}^{N}\frac{\partial\vec{r}_\mu}{\partial q_i}\cdot\vec{F}_\mu \qquad (i=1,\cdots,\ n) \tag{3.1}$$

以(3.1)式代入(2.2)式，再将其两边同乘以$d\tau$，得到

$$\left\{\frac{dP}{d\tau}\right\}^T[C]d\tau=\left\{\frac{\partial T}{\partial q}\right\}^T[C]d\tau+\{Q\}^T[C]d\tau$$

上式在碰撞时间间隔τ_0上求积分，再取$\tau_0\to 0$时的极限值，得到：

$$\lim_{\tau_0\to 0}\int_t^{t+\tau_0}\left\{\frac{dP}{d\tau}\right\}^T[C]d\tau=\lim_{\tau_0\to 0}\int_t^{t+\tau_0}\left\{\frac{\partial T}{\partial q}\right\}^T[C]d\tau+\lim_{\tau_0\to 0}\int_t^{t+\tau_0}\{Q\}^T[C]d\tau \tag{3.2}$$

上式中，三个积分都是含l个元素的一行矢。

由矩阵方程(3.2)可以得到代数方程：

$$\lim_{\tau_0\to 0}\int_t^{t+\tau_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{dp_i}{d\tau}C_{ij}d\tau=\lim_{\tau_0\to 0}\int_t^{t+\tau_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial q_i}C_{ij}d\tau+\lim_{\tau_0\to 0}\int_t^{t+\tau_0}\sum_{i=1}^{n}Q_iC_{ij}d\tau$$
$$(j=1,\cdots,\ l) \tag{3.2$'$}$$

将上式中的三个积分依次分别以I_1，I_2，I_3表示。考察(3.2)$'$式中的各项，因为

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial q_i}C_{ij}$$

是有界量(注：以下我们把有限量都称为有界量)。所以$I_2=0$，即(3.2)$'$式中右边的第一项为零。

再考虑(3.2)$'$式右边的第二项，其中矩阵$[C]$的各个元素C_{ij}都是广义坐标$q_1,\cdots,\ q_n$以及时间τ的有界函数，而矩阵$\{Q\}$的元素为

$$Q_i=\sum_{\mu=1}^{N}\frac{\partial\vec{r}_\mu}{\partial q_i}\cdot\vec{F}_\mu$$

其中$\vec{F}_\mu$为冲力，它具有如下二个性质：

1．当$\tau_0\to 0$，即$t+\tau_0\to t$时，$F_\mu(\tau)\to\infty$。

2．$\lim\limits_{\tau_0\to 0}\int_t^{t+\tau_0}\vec{F}_\mu d\tau=\vec{S}_\mu$。

这里$\vec{S}_\mu$为力$\vec{F}_\mu$的碰撞冲量。由此可知，$\vec{F}_\mu$是一个和δ函数[5]有关的力学量，可用δ函数表示为

$$\vec{F}_\mu(\tau)=\vec{S}_\mu\delta(\tau-t)$$

其中$\vec{S}_\mu$为有界量。于是自(3.1)可知，广义力Q_i可以表示为

$$Q_i=\sum_{\mu=1}^{N}\frac{\partial\vec{r}_\mu}{\partial q_i}\cdot\vec{S}_\mu\delta(\tau-t)$$

其中$(\partial\vec{r}_\mu/\partial q_i)\cdot\vec{S}_\mu$是广义坐标$q_1,\cdots,q_n$，时间$\tau$以及$\vec{S}_\mu$的有界函数，(3.2)′式中积分$I_2$的被积函数为

$$\sum_{i=1}^{n}Q_iC_{ij}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{N}\vec{S}_\mu\cdot\frac{\partial\vec{r}_\mu}{\partial q_i}C_{ij}\delta(\tau-t)$$

其中
$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{N}\vec{S}_\mu\cdot\frac{\partial\vec{r}_\mu}{\partial q_i}C_{ij}$$

是$q_1,\cdots,q_n$，τ以及$\vec{S}_1,\cdots,\vec{S}_n$的有界函数，由$\delta$函数的性质[5]可知$I_3$为

$$I_3=\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{N}\vec{S}_\mu\cdot\frac{\partial\vec{r}_\mu}{\partial q_i}C_{ij}\right]_{\tau=t}=\left[\sum_{i=1}^{n}\hat{Q}_iC_{ij}\right]_{\tau=t}$$

其中
$$\hat{Q}_i=\sum_{\mu=1}^{N}\vec{S}_\mu\cdot\frac{\partial\vec{r}_\mu}{\partial q_i}$$

称为广义冲量。

最后再考察(3.2)′式的积分I_1，函数$dp_i/d\tau$在$\tau=t$时，也具有以下两个性质

1．$\lim\limits_{\tau\to t}\dfrac{dp_i}{d\tau}=\infty$

2．$\lim\limits_{\tau_0\to 0}\int_t^{t+\tau_0}\dfrac{dp_i}{d\tau}d\tau=\Delta p_i$

Δp_i为碰撞后广义动量p_i的增量，所以$dp_i/d\tau$可以用δ函数表示为

$$\frac{dp_i}{d\tau}=\Delta p_i\delta(\tau-t)$$

于是I_1的被积函数可以表示为

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{dp_i}{d\tau}C_{ij}=\sum_{i=1}^{n}\Delta p_iC_{ij}\delta(\tau-t)$$

由δ函数的性质[5]，可将(3.2)′左边的一项积分后，改写如下：

$$I_1=\left[\sum_{i=1}^{n}\Delta p_i C_{ij}\right]_{\tau=t}$$

于是由(3.2)′式推导出表示式

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\Delta p_i C_{ij}\right)_{\tau=t}=\left(\sum_{i=1}^{n}\hat{Q}_i C_{ij}\right)_{\tau=t}$$

简记为

$$\sum_{i=1}^{n}\Delta p_i C_{ij}=\sum_{i=1}^{n}\hat{Q}_i C_{ij}\qquad (j=1,\cdots,\ l)$$

或者以矩阵表示为

$$\{\Delta P\}^T[C]=\{\hat{Q}\}^T[C]\tag{3.3}$$

其中

$$\{\Delta P\}=[\Delta p_1\quad\cdots\quad\Delta p_n]^T\tag{3.3$'$}$$

是一列矢。(3.3)式中的矩阵$\{\Delta P\}$，$[C]$以及$\{\hat{Q}\}$都是广义坐标$q_1,\cdots$，q_n和时间 t 的函数。

(3.3) 式就是非完整系统具有冲力作用时的运动方程，它是包含了 l 个方程的 方 程 组。(3.3)式和(1.1)式联立，共$l+s=n$个方程，可以求解n个广义坐标：$q_1,\cdots$，q_n。它比用待定乘子法减少了 s 个方程。这就使问题得到了简化。

因为(1.1)式中各项系数都是 q，t 的连续函数，在碰撞中，q，t 又可看成是不变的，因此(1.1)式中的系数在碰撞前后是不变的。碰撞后的广义速度为：$\dot{q}_1+\Delta\dot{q}_1,\cdots$，$\dot{q}_n+\Delta\dot{q}_n$，于是在碰撞后(1.1)式变为

$$a_{\beta 0}+a_{\beta 1}(\dot{q}_1+\Delta\dot{q}_1)+\cdots+a_{\beta n}(\dot{q}_n+\Delta\dot{q}_n)=0\tag{1.1$'$}$$

(1.1)′式和(1.1)式相减，得到

$$a_{\beta 1}\Delta\dot{q}_1+\cdots+a_{\beta n}\Delta\dot{q}_n=0\qquad(\beta=1,\cdots,\ s)\tag{1.1$''$}$$

(3.3)式和(1.1)″式联立，共$l+s=n$个方程。从理论上讲，它们和(3.3)式，(1.1)式组成的联立方程组是完全一样的，也可以用来求解有冲力作用时的非完整系统的碰撞问题。但在解题时，取(3.3)式和(1.1)″式联立，运算较简单些。

例 质量为m半径为r的两个完全相同的均质轮A与B，以长为 $2l$ 质量为 M 的均质轴通过轴承相连接置于地 面上，此时$\varphi=\pi/4$，轴AB的角速度为ω，轮A的角速度为零，其俯视图如图 2 所示。设轮子与地面间有足够的摩擦阻力阻止其相对滑动。今有一大小为 S 的 冲力沿过轴的水平面垂 直 地作用于轴 C上(如图所示)求碰撞后系统的运动。设 $M=m$，$l=r$。

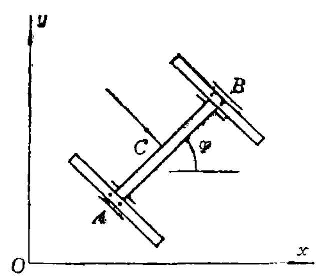

图 1

解 取AB中点C的坐标x_C，y_C；AB与x轴的交角 φ以及A，B两轮的转角θ_A与θ_B为广义坐标。

由 A，B 轮与地面的接触点的速度等于零可以求得加在系统上的三个独立的非完整约束方程：

$$\dot{x}_C+l\sin\varphi\,\dot{\varphi}+r\sin\varphi\,\dot{\theta}_A=0\tag{a$'$}$$

$$\dot{y}_C-l\cos\varphi\,\dot{\varphi}-r\cos\varphi\,\dot{\theta}_A=0\tag{b$'$}$$

$$\dot{x}_C+r\sin\varphi\,\dot{\theta}_B-l\sin\varphi\,\dot{\varphi}=0\tag{c$'$}$$

由(a)′, (b)′, (c)′, 可以计算出$[A_1]$, $[A_2]$

$$[A_1]=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\\ 1 & r\sin\varphi\end{bmatrix},\qquad [A_2]=\begin{bmatrix}0 & l\sin\varphi & r\sin\varphi\\ 1 & -l\cos\varphi & -r\cos\varphi\\ 0 & -l\sin\varphi & 0\end{bmatrix}$$

则$[A_2]^{-1}$为:

$$[A_2]^{-1}=\frac{1}{-rl\sin^2\varphi}\begin{bmatrix}-lr\sin\varphi\cos\varphi & -rl\sin^2\varphi & 0\\ 0 & 0 & r\sin\varphi\\ -l\sin\varphi & 0 & -l\sin\varphi\end{bmatrix}$$

$$-[A_2]^{-1}[A_1]=\frac{1}{rl\sin\varphi}\begin{bmatrix}-lr\cos\varphi & 0\\ r & r^2\sin\varphi\\ -2l & -rl\sin\varphi\end{bmatrix}$$

由 (2.6) 式可得

$$[C]=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ -\cot\varphi & 0\\ \dfrac{1}{l}\dfrac{1}{\sin\varphi} & \dfrac{r}{l}\\ -\dfrac{2}{r}\dfrac{1}{\sin\varphi} & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ -1 & 0\\ \dfrac{\sqrt{2}}{r} & 1\\ -\dfrac{2\sqrt{2}}{r} & -1\end{bmatrix}$$

广义冲量为

$$\{\hat{Q}\}=\begin{bmatrix}S\sin\varphi\\ 0\\ -S\cos\varphi\\ 0\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}S/\sqrt{2}\\ 0\\ -S/\sqrt{2}\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

由已知条件可知, 轴AB及轮A的角速度分别为: $\dot{\varphi}_0=\omega$, $\dot{\theta}_A=0$。由 (a)′, (b)′, (c)′ 可以算得C点的初速度及轮B的角速度分别为

$$\dot{x}_{C_0}=-\frac{\sqrt{2}}{2}l\omega,\quad \dot{y}_{C_0}=-\frac{\sqrt{2}}{2}l\omega,\quad \dot{\theta}_{B_0}=2\omega$$

系统的动能为

$$\begin{aligned}T=&\frac{1}{2}M(\dot{x}_C^2+\dot{y}_C^2)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}Ml^2\right)\dot{\varphi}^2+\frac{1}{2}m(v_{Ax}^2+v_{Ay}^2)\\&+\frac{1}{2}m(v_{Bx}^2+v_{By}^2)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mr^2\right)\dot{\theta}_A^2+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mr^2\right)\dot{\theta}_B^2\\&+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}mr^2\right)\dot{\varphi}^2\times 2\\=&\frac{1}{2}(2m+M)(\dot{x}_C^2+\dot{y}_C^2)+\left(\frac{l^2}{6}M+ml^2+\frac{1}{4}mr^2\right)\dot{\varphi}^2\\&+\frac{1}{4}mr^2\dot{\theta}_A^2+\frac{1}{4}mr^2\dot{\theta}_B^2\end{aligned}$$

取广义坐标：$q_1=x_C$，$q_2=\theta_B$，$q_3=y_C$，$q_4=\varphi$，$q_5=\theta_A$分别将$(\dot{x}_C-\dot{x}_{C0})$，$(\dot{\theta}_B-\dot{\theta}_{B0})$，$(\dot{y}_C-\dot{y}_{C0})$，$(\dot{\varphi}-\dot{\varphi}_0)$，$(\dot{\theta}_A-\dot{\theta}_{A0})$简写为$\Delta\dot{x}_C$，$\Delta\dot{\theta}_B$，$\Delta\dot{y}_C$，$\Delta\dot{\varphi}$，$\Delta\dot{\theta}_A$，由(3.3)′可以计算出$\{\Delta P\}$

$$\{\Delta P\}=\begin{bmatrix}(2m+M)\Delta\dot{x}_C\\ \frac{1}{2}mr^2\Delta\dot{\theta}_B\\ (2m+M)\Delta\dot{y}_C\\ \left(\frac{1}{3}Ml^2+2ml^2+\frac{1}{2}mr^2\right)\Delta\dot{\varphi}\\ \frac{1}{2}mr^2\Delta\dot{\theta}_A\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3m\Delta\dot{x}_C\\ \frac{1}{2}mr^2\Delta\dot{\theta}_B\\ 3m\Delta\dot{y}_C\\ 2\frac{5}{6}mr^2\Delta\dot{\varphi}\\ \frac{1}{2}mr^2\Delta\dot{\theta}_A\end{bmatrix}$$

将$\{\Delta P\}$，$[C]$，$\{\hat{Q}\}$代入(3.3)式可求得碰撞方程。

$$\begin{bmatrix}3m\Delta\dot{x}_C\\ \frac{1}{2}mr^2\Delta\dot{\theta}_B\\ 3m\Delta\dot{y}_C\\ \frac{17}{6}mr^2\Delta\dot{\varphi}\\ \frac{1}{2}mr^2\Delta\dot{\theta}_A\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ -1 & 0\\ \frac{\sqrt{2}}{r} & 1\\ -\frac{2\sqrt{2}}{r} & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}S/\sqrt{2}\\ 0\\ -S/\sqrt{2}\\ 0\\ 0\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ -1 & 0\\ \frac{\sqrt{2}}{r} & 1\\ -\frac{2\sqrt{2}}{r} & -1\end{bmatrix}$$

即为

$$3\Delta\dot{x}_C-3\Delta\dot{y}_C+\frac{17\sqrt{2}}{6}r\Delta\dot{\varphi}-\sqrt{2}\,r\Delta\dot{\theta}_A=\frac{\sqrt{2}}{m}S \tag{d}$$

$$\Delta\dot{\theta}_B+\frac{17}{3}\Delta\dot{\varphi}-\Delta\dot{\theta}_A=0 \tag{e}$$

由(a)′，(b)′，(c)′，得到

$$\Delta\dot{x}_C+l\sin\varphi\Delta\dot{\varphi}+r\sin\varphi\Delta\dot{\theta}_A=0 \tag{a$_1$}$$

$$\Delta\dot{y}_C-l\cos\varphi\Delta\dot{\varphi}-r\cos\varphi\Delta\dot{\theta}_A=0 \tag{b$_1$}$$

$$\Delta\dot{x}_C+r\sin\varphi\Delta\dot{\theta}_B-l\sin\varphi\Delta\dot{\varphi}=0 \tag{c$_1$}$$

再以$\varphi=\pi/4$，$l=r$代入(a$_1$)，(b$_1$)，(c$_1$)得到

$$\Delta\dot{x}_C+\frac{\sqrt{2}}{2}r\Delta\dot{\varphi}+\frac{\sqrt{2}}{2}r\Delta\dot{\theta}_A=0 \tag{a}$$

$$\Delta\dot{y}_C-\frac{\sqrt{2}}{2}r\Delta\dot{\varphi}-\frac{\sqrt{2}}{2}r\Delta\dot{\theta}_A=0 \tag{b}$$

$$\Delta\dot{x}_C+\frac{\sqrt{2}}{2}r\Delta\dot{\theta}_B-\frac{\sqrt{2}}{2}r\Delta\dot{\varphi}=0 \tag{c}$$

三个非完整约束方程(a)，(b)，(c)和二个不含待定乘子的碰撞方程(d)，(e)联立，就可求得$\Delta\dot{x}_C$，$\Delta\dot{y}_C$，$\Delta\dot{\varphi}$，$\Delta\dot{\theta}_A$，$\Delta\dot{\theta}_B$，这五个量决定了系统于碰撞后的运动，它们的数值为

$$\dot{x}_C=\frac{\sqrt{2}}{8}\frac{S}{m}-\frac{\sqrt{2}}{2}l\omega,\quad \dot{y}_C=-\frac{\sqrt{2}}{8}\frac{S}{m}-\frac{\sqrt{2}}{2}l\omega$$

$$\dot{\varphi}=\omega,\quad \dot{\theta}_A=-\frac{1}{4}\frac{S}{mr},\quad \dot{\theta}_B=-\frac{1}{4}\frac{S}{mr}+2\omega$$

致谢 本文写作过程中得到汪家诉教授多方面的帮助和指点，特致谢忱。

参 考 文 献

[1] 汪家诉，《分析力学》，高等教育出版社 (1982, 9).
[2] 吴 镇，《分析力学》，上海交通大学 (1984, 9).
[3] Greenwood, Donald T., *Classical Dynamics*, Prentice-Hall, Inc. (1977).
[4] 甘特马赫，Φ. P.，《分析力学讲义》，人民教育出版社 (1961).
[5] 吉洪诺夫，A. H.，A. A. 萨马尔斯基，《数学物理方程》(上册)，高等教育出版社 (1960).

The Equations of Motion for a Nonholonomic System under the Action of Impulsive Forces

Sun You-lie

(*Shanghai University of Technology, Shanghai*)

Abstract

The equations of impact for a nonholonomic system described with generalized coordinates have been discussed in detail in the general references of classical dynamics. But these equations contain undetermined multipliers which make the problem complicated.

Through the appropriate treatment of mathematics, using the δ-function and expression of matrix in this paper, the author derived equations of impact for a nonholonomic system without undetermined multipliers. Therefore, the problem can be solved more simply.