应用数学和力学，第8卷第1期（1987年1月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

Poincaré非线性振动理论在连续介质力学中的推广(Ⅰ)——基本理论与方法*

霍麟春　　李　骊

（天津大学，1985年10月25日收到）

摘　要

本文将离散介质的Poincaré非线性振动理论[1]向连续介质力学推广，做了初步尝试。首先讨论在非共振与共振情况下，连续介质线性强迫振动周期解，及其周期解存在条件。进而运用线性理论结果，将Poincaré理论中的主要结论推广到连续介质非线性振动问题中去。此外，本文提出并建议用偏微分方程直接摄动与加权积分方法，计算共振区内的周期解。

一、引　言

Poincaré理论[1]是目前研究离散系统非线性振动最常用和最有效的理论之一。Малкин[2]和Андронов[3]等人成功地使用这一理论解决了拟线性离散系统期周解的理论与计算问题。对于连续介质很少有人研究。只见到过Stoker[4]运用Poincaré理论讨论弦的非线性振动。但是，他的讨论在理论与方法上均不够完备，因此很难运用到其他连续介质系统中去。另一方面，目前在梁、薄板、薄壳等非线性振动的研究中，大都采用近似方法，将偏微分方程化为有限多自由度的常微分方程处理，其结果依赖于空间函数的选择，从而限制了对连续介质非线性振动更全面的了解。因此，本文试图从较一般角度出发，将Poincaré理论推广到连续介质力学中去。证明了，该理论中的主要结论，对于较广泛的一类连续介质系统也是适用的。同时，本文提出并建议使用偏微分方程直接摄动与加权积分方法，计算共振区内的周期解。在周期解的定解条件中，只对时间函数进行简单的积分运算，避免求解非线性常微分方程。在求解过程中，注意力集中于边值问题的讨论，因此，本文的方法便于同与边值问题有关的近似方法相结合，进行运算。

二、线性（派生）系统的周期解

线性（派生）系统的运动微分方程可归结为

$$A_1 w+\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=q \tag{2.1}$$

* 中国科学院科学基金资助课题。

其中A_1为关于空间变量的线性算子，w为位移，q为荷载。对于梁，$A_1=\partial^4/\partial x^4$，$q=q(x,t)$。对于平板与扁壳，$A_1=\nabla^4$，$q=q(x,y,t)$。假设方程(2.1)中的各个变量均已无量纲化。

在确定边界条件下，派生系统方程(2.1)的齐次方程具有可数无穷多个特征值$\omega_n(n=1,2,\cdots)$和相应的特征函数$u_n(x,y)\ (n=1,2,\cdots)$，并且$\{u_n(x,y)\}$构成正交规范完备函数系[5]

$$\iint_F u_i(x,y)u_j(x,y)dxdy=\delta_{ij} \tag{2.2}$$

微分方程(2.1)的位移可以展开为函数系$\{u_n(x,y)\}$的收敛级数[5]

$$w(x,y,t)=\sum_{n=1}^{\infty} g_n(t)u_n(x,y) \tag{2.3}$$

将(2.3)代入(2.1)，在w的定义域F内用$u_m(x,y)$加权积分，得

$$\ddot{g}_m(t)+\omega_m^2 g_m(t)=q_m(t) \tag{2.4}$$

其中
$$q_m(t)=\iint_F q(x,y,t)u_m(x,y)dxdy \tag{2.5}$$

于是，(2.1)的通解为

$$w(x,y,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\sin\omega_n t+b_n\cos\omega_n t+\frac{1}{\omega_n}\int_0^t q_n(\tau)\sin\omega_n(t-\tau)d\tau\right]u_n(x,y) \tag{2.6}$$

其中a_n,b_n为任意常数。设$q(x,y,t)$是时间t的周期函数，周期为$2\pi/\Omega$。方程(2.1)具有周期为$2\pi/\Omega$的周期解的充要条件为

$$\left.\begin{aligned}&w\left((x,y,\frac{2\pi}{\Omega}\right)-w(x,y,0)=0\\&\frac{\partial}{\partial t}w\left(x,y,\frac{2\pi}{\Omega}\right)-\frac{\partial}{\partial t}w(x,y,0)=0\end{aligned}\right\} \tag{2.7}$$

(2.6)代入(2.7)，得

$$\left.\begin{aligned}&a_n\sin\frac{2\pi\omega_n}{\Omega}+b_n\left(\cos\frac{2\pi\omega_n}{\Omega}-1\right)=-\frac{1}{\omega_n}\int_0^{\frac{2\pi}{\Omega}}q_n(\tau)\sin\omega_n\left(\frac{2\pi}{\Omega}-\tau\right)d\tau\\&a_n\left(\cos\frac{2\pi\omega_n}{\Omega}-1\right)-b_n\cdot\sin\frac{2\pi\omega_n}{\Omega}=-\frac{1}{\omega_n}\int_0^{\frac{2\pi}{\Omega}}q_n(\tau)\cdot\cos\omega_n\left(\frac{2\pi}{\Omega}-\tau\right)d\tau\end{aligned}\right\} \tag{2.8}$$

$$(n=1,2,3,\cdots)$$

若全部特征值与Ω之比$\omega_n/\Omega(n=1,2,3,\cdots)$均不为整数，称为非共振。此时，(2.8)中各系数行列式

$$\Delta_n=2\left(\cos\frac{2\pi\omega_n}{\Omega}-1\right)\neq 0$$

于是，从(2.8)中可唯一解出常数$a_n,b_n\ (n=1,2,3,\cdots)$。因此，在非共振情况下，(2.1)有唯一周期解。

若某特征值ω_r与Ω之比$\omega_r/\Omega=N$，N为整数，称为共振。此时，当$n\neq r$，仍从(2.8)唯一解出a_n,b_n。但由于$\Delta_r=0$，a_r与b_r可解的充要条件为

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^{\frac{2\pi}{\Omega}} q_r(\tau)\cdot\sin\omega_r\tau d\tau=0\\&\int_0^{\frac{2\pi}{\Omega}} q_r(\tau)\cos\omega_r\tau d\tau=0\end{aligned}\right\}\tag{2.9}$$

成立。因此，在共振情况下，当且仅当(2.9)成立时，(2.1)具有包含任意常数 a_r 与 b_r 的周期解族。

三、非线性系统周期解

采用适当的无量纲数值，弹性梁、弹性薄板、弹性扁壳非线性振动运动微分方程可以统一表述为

$$\begin{cases}A_1w=\varepsilon B_1(w,\phi)+\varepsilon C_1\phi+q-\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2}-2\varepsilon\lambda\dfrac{\partial w}{\partial t} & (3.1)\\ A_2\phi=\varepsilon B_2(w,w)+\varepsilon C_2 w & (3.2)\end{cases}$$

基本方程(3.1)和(3.2)再补充w和ϕ的边界条件，构成本问题的全部定解条件。(3.1)和(3.2)的具体意义如下：

（1） 等截面定跨度弹性梁：

$$A_1=\frac{\partial^4}{\partial x^4},\qquad B_1(w,\phi)=\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\cdot\phi$$

$$A_2=\frac{\partial}{\partial x},\qquad B_2=C_1=C_2\equiv 0$$

ϕ为轴向内力

（2） 等厚度弹性薄板：

$$A_1=\nabla^4,\qquad B_1=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}$$

$$A_2=A_1,\qquad B_2=\frac{-\nu}{2}B_1,\qquad C_1=C_2\equiv 0$$

$\nu=12(1-\mu^2)$，ϕ为应力函数，ε 为与挠度有关的无量纲小参数。

（3） 等厚度弹性扁壳：

$$C_1=k\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\xi\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right),\quad C_2=-\nu C_1,\qquad \xi=\frac{\rho_x}{\rho_y}$$

其中ρ_x和ρ_y为中曲面的主曲率半径。并且设$\rho_x\neq 0$。k为与ρ_x有关的常数。其他算子的意义与平板情况相同。

（一） 非共振情况

令方程(3.1)与(3.2)中的$\varepsilon=0$，得到派生系统的运动微分方程：

$$A_1w_0+\frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2}=q\tag{3.3}$$

在非共振情况下，派生系统运动微分方程（3.3）有唯一的周期解(2.6)，并且称为派生周期解，其中的常数a_n和 b_n（$n=1,2,3,\cdots$）由(2.8)式确定。

设方程(3.1)解的初值为

$$
\begin{cases}
w(x,y,\beta_1,\beta_2,\varepsilon,0)=w_0(x,y,0)+\beta_1(x,y,\varepsilon) & (3.4)\\
\dfrac{\partial}{\partial t}w(x,y,\beta_1,\beta_2,\varepsilon,0)=\dfrac{\partial}{\partial t}w_0(x,y,0)+\beta_2(x,y,\varepsilon) & (3.5)
\end{cases}
$$

将函数$\beta_1(x,y,\varepsilon)$和$\beta_2(x,y,\varepsilon)$展开为$\{u_n(x,y)\}$的收敛的广义Fourier级数[5]:

$$\beta_1(x,y,\varepsilon)=\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n^{(1)}(\varepsilon)u_n(x,y) \tag{3.6}$$

$$\beta_2(x,y,\varepsilon)=\sum_{n=1}^{\infty}\omega_n\beta_n^{(2)}(\varepsilon)u_n(x,y) \tag{3.7}$$

将(3.1)和(3.2)的解$w(x,y,\beta^{(1)},\beta^{(2)},\varepsilon,t)$和$\phi(x,y,\beta^{(1)},\beta^{(2)},\varepsilon,t)$代入(3.1) 式右端各个小算子中，并令

$$L_n(\beta^{(1)},\beta^{(2)},\varepsilon,t)=\iint_F\left[B_1(w,\phi)+C_1\phi-2\lambda\frac{\partial w}{\partial t}\right]\cdot u_n(x,y)dxdy \tag{3.8}$$

其中$\beta^{(1)}$代表$\beta_n^{(1)}(\varepsilon)$ $(n=1,2,3,\cdots)$全体. $\beta^{(2)}$代表$\beta_n^{(2)}(\varepsilon)$ $(n=1,2,3,\cdots)$全体. 于是，由(2.6)得到(3.1)解的表达式:

$$
\begin{aligned}
w(x,y,\varepsilon,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\Big[&a_n(\varepsilon)\sin\omega_n t+b_n(\varepsilon)\cos\omega_n t+\frac{1}{\omega_n}\int_0^t q_n(\tau)\sin\omega_n(t-\tau)d\tau\\
&+\frac{\varepsilon}{\omega_n}\int_0^t L_n(\beta^{(1)},\beta^{(2)},\varepsilon,\tau)\sin\omega_n(t-\tau)d\tau\Big]u_n(x,y)
\end{aligned}\tag{3.9}
$$

令(3.9)式中的$t=0$,代入(3.4)和(3.5)式，并考虑派生解(2.6),得

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n(\varepsilon)u_n(x,y)=\beta_1(x,y,\varepsilon)+\sum_{n=1}^{\infty}b_nu_n(x,y)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\omega_na_n(\varepsilon)u_n(x,y)=\beta_2(x,y,\varepsilon)+\sum_{n=1}^{\infty}\omega_na_nu_n(x,y)$$

以上二式的两端在F域内用$u_m(x,y)$加权积分，并注意(2.2)、(3.6)、(3.7)式，得

$$a_m(\varepsilon)=\beta_m^{(2)}(\varepsilon)+a_m \tag{3.10}$$

$$b_m(\varepsilon)=\beta_m^{(1)}(\varepsilon)+b_m \qquad (m=1,2,3,\cdots\cdots) \tag{3.11}$$

将(3.10)和(3.11)代入(3.9)，并考虑(2.6)，得

$$
\begin{aligned}
w(x,y,\varepsilon,t)=w_0(x,y,t)+\sum_{n=1}^{\infty}\Big[&\beta_n^{(2)}(\varepsilon)\sin\omega_n t+\beta_n^{(1)}(\varepsilon)\cos\omega_n t\\
&+\frac{\varepsilon}{\omega_n}\int_0^t L_n(\beta^{(1)},\beta^{(2)},\varepsilon,\tau)\sin\omega_n(t-\tau)d\tau\Big]u_n(x,y)
\end{aligned}\tag{3.12}
$$

由[6]可知，由(3.12)所表达的方程(3.1)的解$w(x,y,\varepsilon,t)$关于ε解析.

$w(x,y,\varepsilon,t)$是以$T=2\pi/\Omega$为周期的周期解的充要条件为

$$\begin{cases} w\left(x,y,\varepsilon,\dfrac{2\pi}{\Omega}\right)-w(x,y,\varepsilon,0)=0 & (3.13)\\ \dfrac{\partial}{\partial t}w\left(x,y,\varepsilon,\dfrac{2\pi}{\Omega}\right)-\dfrac{\partial}{\partial t}w(x,y,\varepsilon,0)=0 & (3.14)\end{cases}$$

将(3.12)代入(3.13)和(3.14)，并注意派生周期解$w_0(x,y,t)$的周期为 $2\pi/\Omega$，得

$$I_n^{(1)}=\beta_n^{(1)}(\varepsilon)\left(\cos\frac{2\pi\omega_n}{\Omega}-1\right)+\beta_n^{(2)}(\varepsilon)\sin\frac{2\pi\omega_n}{\Omega}$$

$$+\frac{\varepsilon}{\omega_n}\int_0^{\frac{2\pi}{\Omega}}L_n(\beta^{(1)},\beta^{(2)},\varepsilon,\tau)\cdot\sin\omega_n\left(\frac{2\pi}{\Omega}-t\right)d\tau=0 \qquad (3.15)$$

$$I_n^{(2)}=-\beta_n^{(1)}(\varepsilon)\sin\frac{2\pi\omega_n}{\Omega}+\beta_n^{(2)}(\varepsilon)\left(\cos\frac{2\pi\omega_n}{\Omega}-1\right)$$

$$+\frac{\varepsilon}{\omega_n}\int_0^{\frac{2\pi}{\Omega}}L_n(\beta^{(1)},\beta^{(2)},\varepsilon,\tau)\cos\omega_n\left(\frac{2\pi}{\Omega}-\tau\right)d\tau=0 \qquad (3.16)$$

$$(n=1,2,3,\cdots)$$

由$I_n^{(1)}$和$I_n^{(2)}$ $(n=1,2,3,\cdots)$组成的雅可比行列式为

$$J=\left\{\frac{\partial(I_1^{(1)},I_1^{(2)},\cdots,I_m^{(1)},I_m^{(2)})}{\partial(\beta_1^{(1)},\beta_1^{(2)},\cdots,\beta_m^{(1)},\beta_m^{(2)})}\right\}_{\beta^{(1)}=\beta^{(2)}=\varepsilon=0}$$

$$=2^m\prod_{n=1}^{m}\left(\cos\frac{2\pi\omega_n}{\Omega}-1\right)\neq 0 \qquad (3.17)$$

其中m为任意的正整数。若初始偏差$\beta_1(x,y,\varepsilon)$及$\beta_2(x,\beta,\varepsilon)$的 Fourier 展开式可以精确地表示为有限项之和

$$\beta_1(x,y,\varepsilon)=\sum_{n=1}^{m}\beta_n^{(1)}(\varepsilon)u_n(x,y) \qquad (3.18)$$

$$\beta_2(x,y,\varepsilon)=\sum_{n=1}^{m}\omega_n\beta_n^{(2)}(\varepsilon)u_n(x,y) \qquad (3.19)$$

由(3.17)式，根据隐函数存在定理，从(3.15)和(3.16)式精确地唯一解得ε的解析函数$\beta_n^{(1)}=\beta_n^{(1)}(\varepsilon)$和$\beta_n^{(2)}=\beta_n^{(2)}(\varepsilon)$，且有$\beta_n^{(1)}(0)=\beta_n^{(2)}(0)=0$ $(n=1,2,3,\cdots)$成立。若初始偏差$\beta_1(x,y,\varepsilon)$或$\beta_2(x,y,\varepsilon)$只能展开为无穷多项的Fourier级数，由于(3.6)和(3.7)的无穷级数在有限的定义域中是收敛的，(3.15)和(3.16)中的$L_n(\beta^{(1)},\beta^{(2)},\varepsilon,t)$在域$F$和 $0\leqslant t\leqslant 2\pi/\Omega$ 内连续依赖于(3.1)和(3.2)的解w及ϕ，而w和ϕ在域F和 $0\leqslant t\leqslant 2\pi/\Omega$ 内又连续地依赖于初值，于是，当用有限项之和(3.18)及(3.19)近似代替(3.6)与(3.7)式时，由(3.15)及(3.16)解得的$\beta_n^{(1)}(\varepsilon)$和$\beta_n^{(2)}(\varepsilon)$记为${}_m\beta_n^{(1)}$和${}_m\beta_n^{(2)}$，显然，当$m\to+\infty$时，${}_m\beta_n^{(1)}\to\beta_n^{(1)}$，${}_m\beta_n^{(2)}\to\beta_n^{(2)}$。因此得出结论，在非共振情况下，方程(3.1)和(3.2)存在周期解，当ε充分小时对于ε解析，且当$\varepsilon=0$时变为派生周期解(2.6)。

（二）共振情况

当特征值（派生系统固有频率）ω_r与Ω之比为整数，称为共振。(2.8)系数行列式$\Delta_r=0$，无法从(2.8)中解出a_r和b_r。对于$n\neq r$的$\Delta_n\neq 0$，可唯一解出$n\neq r$的a_n和b_n。于是，派生周期

解族为

$$w_0(x,y,t)=(a_r\sin\omega_r t+b_r\cos\omega_r t)\,u_r(x,y)+\sum_{n\neq r}^{\infty}\Big[a_n\sin\omega_n t+b_n\cos\omega_n t$$

$$+\frac{1}{\omega_n}\int_0^t q_n(\tau)\,\sin\omega_n(t-\tau)d\tau\Big]u_n(x,y) \tag{3.20}$$

其中a_r和b_r为待定常数。

由于共振条件下，$\Delta_r=0$，无法应用隐函数存在定理，从(3.15)和(3.16)中解出$\beta_n^{(1)}(\varepsilon)$及$\beta_n^{(2)}(\varepsilon)(n=1,2,3,\cdots)$。类似于(2.9)式，此时应有

$$\tilde{\Psi}_1=\int_0^{\frac{2\pi}{\Omega}}[L_r(\beta^{(1)},\beta^{(2)},\varepsilon,\tau)+Q_r(\tau)]\sin\omega_r\tau d\tau=0 \tag{3.21}$$

$$\tilde{\Psi}_2=\int_0^{\frac{2\pi}{\Omega}}[L_r(\beta^{(1)},\beta^{(2)},\varepsilon,\tau)+Q_r(\tau)]\cos\omega_r\tau d\tau=0 \tag{3.22}$$

式中 $$Q_r(\tau)=q_r(\tau)/\varepsilon \tag{3.23}$$

令(3.21)和(3.22)中的$\beta^{(1)}=\beta^{(2)}=\varepsilon=0$，得到确定$a_r$和$b_r$的方程组：

$$\begin{cases}\Psi_1(a_r,b_r)=\int_0^{\frac{2\pi}{\Omega}}[L_r(0,0,0,\tau)+Q_r(\tau)]\sin\omega_r\tau d\tau=0 & (3.24)\\ \Psi_2(a_r,b_r)=\int_0^{\frac{2\pi}{\Omega}}[L_r(0,0,0,\tau)+Q_r(\tau)]\cos\omega_r\tau d\tau=0 & (3.25)\end{cases}$$

将(3.15)和(3.16)中的$n=r$方程除去，得到剩余方程组，其系数行列式不等于零。于是，应用隐函数存在定理，从(3.15)和(3.16)的剩余方程组中可唯一解出ε的解析函数族

$$\beta_n^{(1)}=\beta_n^{(1)}(\beta_r^{(1)},\beta_r^{(2)},\varepsilon)\qquad (n\neq r)$$

$$\beta_n^{(2)}=\beta_n^{(2)}(\beta_r^{(1)},\beta_r^{(2)},\varepsilon)\qquad (n\neq r)$$

且有 $$\beta_n^{(1)}(0,0,0)=\beta_n^{(2)}(0,0,0)=0\qquad (n\neq r)$$

成立。将$n\neq r$的$\beta_n^{(1)}$和$\beta_n^{(2)}$代入(3.21)和(3.22)，得

$$\begin{cases}\tilde{\Psi}_1=\int_0^{\frac{2\pi}{\Omega}}[L_r(\beta_r^{(1)},\beta_r^{(2)},\varepsilon,\tau)+Q_r(\tau)]\cdot\sin\omega_r\tau d\tau=0 & (3.26)\\ \tilde{\Psi}_2=\int_0^{\frac{2\pi}{\Omega}}[L_r(\beta_r^{(1)},\beta_r^{(2)},\varepsilon,\tau)+Q_r(\tau)]\cos\omega_r\tau d\tau=0 & (3.27)\end{cases}$$

若(3.26)和(3.27)的行列式

$$\tilde{J}=\left\{\frac{\partial(\tilde{\Psi}_1,\tilde{\Psi}_2)}{\partial(\beta_r^{(1)},\beta_r^{(2)})}\right\}_{\beta_r^{(1)}=\beta_r^{(2)}=\varepsilon=0}\neq 0 \tag{3.28}$$

则可从(3.26)和(3.27)中唯一地解出$\beta_r^{(1)}=\beta_r^{(1)}(\varepsilon)$和$\beta_r^{(2)}=\beta_r^{(2)}(\varepsilon)$，且有$\beta_r^{(1)}(0)=\beta_r^{(2)}(0)=0$成立。将此$\beta_r^{(1)}(\varepsilon)$，$\beta_r^{(2)}(\varepsilon)$代入上述的$\beta_n^{(1)},\beta_n^{(2)}$的表达式中，即可求出$\beta_n^{(1)}(\varepsilon)$与$\beta_n^{(2)}(\varepsilon)$。最后，把可解条件(3.28)化为另一种等价的更明显的形式。为此，考虑共振条件下，(3.10)和(3.11)式仍然成立，且有

$$\left\{\frac{\partial(\beta_r^{(1)},\beta_r^{(2)})}{\partial(a_r(\varepsilon),b_r(\varepsilon))}\right\}_{\substack{a_r(\varepsilon)=a_r\\ b_r(\varepsilon)=b_r}}=1$$

那么

$$\left\{\frac{\partial(\widetilde{\Psi}_1,\widetilde{\Psi}_2)}{\partial(\beta_r^{(1)},\beta_r^{(2)})}\right\}_{\beta_r^{(1)}=\beta_r^{(2)}=\varepsilon=0}\cdot\left\{\frac{\partial(\beta_r^{(1)},\beta_r^{(2)})}{\partial(a_r(\varepsilon),b_r(\varepsilon))}\right\}_{\substack{a_r(\varepsilon)=a_r\\ b_r(\varepsilon)=b_r}}=\left\{\frac{\partial(\Psi_1,\Psi_2)}{\partial(a_r,\ b_r)}\right\}$$

于是，可解条件(3.28)等价于

$$\left\{\frac{\partial(\Psi_1,\Psi_2)}{\partial(a_r,\ b_r)}\right\}\neq 0 \tag{3.29}$$

由此得出结论，在共振和ε充分小情况下，方程(3.1)和(3.2)存在周期为$2\pi/\Omega$的周期解，且关于ε解析，当$\varepsilon=0$时，变为派生周期解(3.20)。$n\neq r$的常数a_n和b_n由(2.8)式确定，a_r和b_r由(3.24)和(3.25)式确定，a_r和b_r的可解条件为(3.29)式成立。至于$\beta_r^{(1)}(\varepsilon)$和$\beta_r^{(2)}(\varepsilon)$及$\beta_n^{(1)}(\varepsilon)$和$\beta_n^{(2)}(\varepsilon)$的确定方法则如上述。

四、周期解的计算——偏微分方程直接摄动方法

非线性振动系统无量纲化的运动方程为

$$\begin{cases} A_1w=\varepsilon B_1(w,\phi)+\varepsilon C_1\phi+q-\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2}-2\varepsilon^3\lambda\dfrac{\partial w}{\partial t} & (4.1)\\ A_2\phi=\varepsilon B_2(w,w)+\varepsilon C_2 w & (4.2)\end{cases}$$

再补充w与ϕ的边界条件，构成了本问题的全部定解条件。其中A_1、A_2、C_1、C_2均为关于空间变量偏导的线性算子，$B_1(w,\phi)$是w关于空间变量偏导与ϕ关于空间变量偏导或与ϕ乘积的线性组合，$B_2(w,w)$是w关于空间变量偏导乘积的线性组合。ε为小参数。q为时间t的周期函数，周期为$2\pi/\Omega$

设
$$w=w_0+\varepsilon^2w_2+\varepsilon^4w_4+\cdots \tag{4.3}$$
$$\phi=\varepsilon\phi_1+\varepsilon^3\phi_3+\varepsilon^5\phi^5+\cdots \tag{4.4}$$

将(4.3)和(4.4)代入(4.1)和(4.2)，令两端ε同次幂系数相等，得

$$A_1w_0=q-\frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \tag{4.5}$$

$$A_1w_2=B_1(w_0,\ \phi_1)+C_1\phi_1-2\lambda\frac{\partial w_0}{\partial t}-\frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} \tag{4.6}$$

$$A_1w_4=B_1(w_0,\phi_3)+B_1(w_2,\phi_1)+C_1\phi_3-\frac{\partial^2 w_4}{\partial t^2} \tag{4.7}$$

$$A_2\phi_1=B_2(w_0,w_0)+C_2w_0 \tag{4.8}$$

$$A_2\phi_3=B_2(w_0,w_2)+B_2(w_2,w_0)+C_2w_2 \tag{4.9}$$

当线性派生系统的固有频率ω_r与Ω之比接近整数，系统处在共振区内的共振状态。引入解谐参数σ，令

$$\omega_r^2=N^2\Omega^2+\varepsilon^2\cdot\sigma \tag{4.10}$$

引入参数D，并分解为

$$D=D_0+D' \tag{4.11}$$

使得

$$D_0A_1u_r(x,y)/D=N^2\Omega^2u_r(x,y) \tag{4.12}$$

而
$$A_1u_r(x,y)=\omega_r^2u_r(x,y) \tag{4.13}$$
于是
$$\frac{D'}{D}=\varepsilon^2\frac{\sigma}{\omega_r^2} \tag{4.14}$$

本文第二节求解派生系统周期解的加权积分方法，实质上，就是将方程组
$$A_1w_0+\frac{\partial^2w_0}{\partial t^2}=q_n(t)u_n(x,y) \qquad (n=1,2,3,\cdots) \tag{4.15}$$
的周期解叠加。由于(4.10)式成立，(4.15)中 $n=r$方程的解代入(2.8)，出现小分母项，因此，必须按照(4.11)式，将(4.15)中$n=r$方程变换为
$$\frac{D_0}{D}A_1w_0+\frac{\partial^2w_0}{\partial t^2}=q_r(t)u_r(x,\ y)-\frac{D'}{D}A_1w_0$$
将$M\cos(N\Omega t+\theta)\cdot u_r(x,y)$代入上式右端，考虑(4.14)和
$$q_r(t)=\varepsilon^2Q_r(t) \tag{4.16}$$
于是它化为 $\varepsilon^2[Q_r(t)-\sigma M\cos(N\Omega t+\theta)]u_r(x,y)$

因此，$[Q_r(t)-\sigma M\cos(N\Omega t+\theta)]u_r(x,y)$应放入(4.6)式右端。(4.5)的周期解族为
$$w_0(x,y,t)=M\cos\ (N\Omega t+\theta)u_r(x,y)+\sum_{n\neq r}^{\infty}\Big[a_n\sin\omega_nt+b_n\cos\omega_nt$$
$$+\frac{1}{\omega_n}\int_0^t q_n(\tau)\sin\omega_n(t-\tau)\,d\tau\Big]u_n(x,y) \tag{4.17}$$
常数a_n和b_n由(2.8)式确定。补充后的(4.6)式化为
$$A_1w_2+\frac{\partial^2w_2}{\partial t^2}=H_2(x,y,t) \tag{4.18}$$
$$H_2(x,y,t)=B_1(w_0,\phi_1)+C_1\phi_1-2\lambda\frac{\partial w_0}{\partial t}$$
$$+[Q_r(t)-\sigma M\cos(N\Omega t+\theta)]u_r(x,y) \tag{4.19}$$
确定常数M、θ的方程组为
$$\begin{cases}\displaystyle\int_0^{\frac{2\pi}{\Omega}}\Big[\iint_F H_2(x,y,t)u_r(x,y)\,dxdy\Big]\sin N\Omega t\,dt=0 & (4.20)\\ \displaystyle\int_0^{\frac{2\pi}{\Omega}}\Big[\iint_F H_2(x,y,t)u_r(x,y)\,dxdy\Big]\cos N\Omega t\,dt=0 & (4.21)\end{cases}$$
亦可用同样方法，计算高阶近似。

对于非共振情况，(4.5)的周期解$w_0(x,y,t)$由(2.6)式给出，其中的常数a_n和b_n ($n=1,2,\cdots$)由 (2.8) 式确定。将 $w_0(x,y,t)$代入 (4.8)，根据 ϕ 的边界条件解得 $\phi_1(x,y,t)$。再将$w_0(x,y,t)$和$\phi_1(x,y,t)$代入(4.6)，应用第二节方法求得 $w_2(x,y,t)$。循此前进，即可求得任意阶近似。

参 考 文 献

[1] Poincaré, *Les méthodes nouvelles de la mécanique celest*, Paris (1892).

[2] Малкин И. Г., *Некоторые Задачи Теории Нелинейных Колебаний*, Москва

(1956).
[3] Андронов А. и С. Хайкин, *Теория Колебания*, ОНТИ (1937).
[4] Stoker, J. L., Periodic motions in nonlinear systems having infinitely many degrees of freedom, *Actes. Coll*. (1951).
[5] 王大钧、胡海昌，弹性结构理论中线性振动普遍性质的统一论证，振动与冲击，1 (1982).
[6] Петровский И. Г., *Лекции об Уравнениях с Частными Производными*, Гостехиздат (1953).

Extension of Poincaré's Nonlinear Oscillation Theory to Continuum Mechanics(Ⅰ)—Basic Theory and Method

Huo Lin-chun Li Li

(*Tianjin University, Tianjin*)

Abstract

In this paper we extend the Poincaré's nonlinear oscillation theory of discrete system to continuum mechanics. First we investigate the existence conditions of periodic solution for linear continuum system in the states of resonance and nonresonance. By applying the results of linear theory, we prove that the main conclusion of Poincaré's nonlinear oscillation theory can be extended to continuum mechanics. Besides, in this paper a new method is suggested to calculate the periodic solution in the states of both resonance and nonresonance by means of the direct perturbation of partial differential equation and weighted integration.