应用数学和力学，第8卷第1期（1987年1月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

间断和脉冲激励*

刘曾荣

（安徽大学，1985年9月20日收到）

摘　要

本文讨论由于脉冲和间断激励所引起的含有Dirac函数和Heavisde函数微分方程的求解问题。首先，按照微分方程理论，我们建议把方程解表达为$x(t)=x_1(t)+x_2(t)H(t-\alpha)$；然后，利用广义函数性质，导出$x_1(t)$和$x_2(t)$方程，通过求解$x_1(t)$和$x_2(t)$来得到原来方程解$x(t)$。最后，对周期脉冲参数激励问题进行了深入讨论。

一、引　言

在非线性振动领域中，由于脉冲或间断激励存在，使得控制方程成为含有Dirac函数或Heaviside函数的微分方程。求解这类方程是一件很困难的事，尤其对于非线性情况。

当外激励为脉冲函数时，二阶线性微分方程可用冲量定理求解。文献[1]把此结果推广到高阶线性微分方程。徐皆苏教授在[2]～[5]中，利用广义函数的近似性质和Poincaré映射思想，处理了周期脉冲参数激励问题。本文打算对外激励和参数激励为脉冲和间断情况作一些探讨，主要工具为常微分方程理论[6]、广义函数的性质[7]、奇摄动方法[8~9]和Poincaré映射的思想。我们先把解$x(t)$表示成为$x(t)=x_1(t)+x_2(t)H(t-\alpha)$并导出$x_1(t)$和$x_2(t)$的方程；然后通过求解$x_1(t)$和$x_2(t)$得到解$x(t)$。最后，我们对周期脉冲参数激励问题作了深入分析，指出现存结果仅仅是一些特殊结果，正确的答案是不定型的。

对于在$t=\alpha$出现脉冲或间断的非线性振动问题，其控制方程变成含有$\delta(t-\alpha)$或$H(t-\alpha)$的微分方程，我们把这类方程统一地化为一阶方程组。显然，除$t=\alpha$外，方程的系数或非齐次项都是连续函数。按照存在性定理和延拓定理，我们可以认为方程除$t=\alpha$外在C^1空间存在解，因此，我们可设想解的形式为

$$x(t)=x_1(t)+x_2(t)H(t-\alpha) \tag{1.1}$$

(1.1)是方程在C空间中的广义Caratheódory解的推广。如果$x_2(\alpha)=0$，(1.1)是广义的Caratheódory解；否则$x_2(\alpha)\neq 0$，(1.1)成为一类具有间断性质的解。

显然在求(1.1)型解中，我们要遇到$H(t-\alpha)$和$\delta(t-\alpha)$，为此我们给出这类广义函数的两条性质：

引理1　在广义函数，有

1°、 $H(x)=H^2(x)=\cdots=H^n(x)$　（n为任意正整数）

* 李骊推荐。

其中$H(x)$为Heaviside函数；

2°、若$f(x)$为充分光滑函数，则有

$$f(x)\delta^{(n)}(x)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}f^{(n-k)}(0)\delta^{(k)}(x)$$

其中n为整数，$\delta(x)$为Dirac函数。

引理2 在广义函数空间，$\delta(x)$为Dirac函数，则有$H(x)$、$\delta(x)$、$\delta'(x)$、…、$\delta^{(n)}(x)$是互为线性独立的。

二、外激励为脉冲或间断

外激励为脉冲时，控制方程可归结为

$$\dot{x}=Ax+\varepsilon f(x)+\lambda\delta(t-a) \tag{2.1}$$

其中x和λ为n维矢量，$f(x)$为阶数高于1的n维多项式，A为$n\times n$常数矩阵，$0<\varepsilon\ll1$是小参数。

(2.1)解的形式为

$$x(t)=x_1(t)+x_2(t)H(t-a) \tag{2.2}$$

要求$x_1(t)$满足方程

$$\dot{x}_1(t)=Ax_1(t)+\varepsilon f(x_1) \tag{2.3}$$

以及x的的定解条件。对于充分小ε，用奇摄动方法找到(2.3)的一致有效渐近解。

$$x_1(t)=\bar{x}_1(t) \tag{2.4}$$

那么，$x_2(t)$应当满足方程

$$\begin{aligned}\dot{x}_2(t)H(t-a)+x_2(t)\delta(t-a)&=Ax_2(t)H(t-a)\\&+\varepsilon[f(\bar{x}_1+x_2H(t-a))-f(\bar{x}_1)]+\lambda\delta(t-a)\end{aligned} \tag{2.5}$$

按照引理1和引理2，得到

$$\dot{x}_2(t)=Ax_2(t)+\varepsilon g(\bar{x}_1(t),x_2(t)),\quad x_2(a)=\lambda \tag{2.6}$$

利用奇摄动方法或者数值方法，解得

$$x_2(t)=\bar{x}_2(t) \tag{2.7}$$

这样就得到(2.1)的解为

$$x(t)=\bar{x}_1(t)+\bar{x}_2(t)H(t-a) \tag{2.8}$$

然后，考虑外激励为间断情况，即方程为

$$\dot{x}=Ax+\varepsilon f(x)+F(t) \tag{2.9}$$

其中$F(t)$在$t=a$处间断，

$$F(t)=\begin{cases}p_1(t) & (0<t\leqslant a)\\ p_2(t) & (t>a)\end{cases} \tag{2.10}$$

$p_1(t)$和$p_2(t)$是连续函数。(2.9)能改写成为

$$\dot{x}=Ax+\varepsilon f(x)+p_1(t)+[p_2(t)-p_1(t)]H(t-a) \tag{2.11}$$

类似于上述过程，我们也可建立(2.9)的解为$x(t)=x_1(t)+x_2(t)H(t-a)$。

我们能得到如下结论：

1°、(2.1)解在$t=a$出现间断，是一类具有间断性质的解；(2.9)解是广义Carathéodory解。

2°、 $\lambda\delta(t-\alpha)$导至$x_2(t)$定解条件的非齐次性，$\lambda H(t-\alpha)$导至$x_2(t)$方程的非齐次项改变。

3°、 对于n阶线性或非线性方程，$\lambda\delta(t-\alpha)$都引起$x(t)$的$(n-1)$阶导数的跃度为λ跳跃；可是，对于线性情况$x_2(t)$方程与$x_1(t)$无关，对于非线性情况$x_2(t)$方程依赖于$x_1(t)$。这样必然导至在非线性情况时出现复杂现象。

三、参数激励为脉冲或间断

先讨论间断情况，此时方程为

$$\dot{x}=A(t)x+\varepsilon f(x) \tag{3.1}$$

其中$A(t)$在$t=\alpha$发生跳跃，即

$$A(t)=\begin{cases}A_1(t) & (0<t\leqslant\alpha)\\ A_2(t) & (t>\alpha)\end{cases}$$

(3.1)改写为

$$\dot{x}=[A_1(t)+(A_2(t)-A_1(t))H(t-\alpha)]x+\varepsilon f(x) \tag{3.2}$$

同样假定

$$x(t)=x_1(t)+x_2(t)H(t-\alpha) \tag{3.3}$$

其中$x_1(t)$满足

$$\dot{x}_1(t)=A_1(t)x_1(t)+\varepsilon f(x_1) \tag{3.4}$$

把(3.3)代入(3.2)，得到下列定解问题

$$\left.\begin{aligned}&\dot{x}_2(t)=A_2(t)x_2+[A_2(t)-A_1(t)]x_1(t)+\varepsilon g(x_1(t),x_2(t))\\&x_2(\alpha)=0\end{aligned}\right\} \tag{3.5}$$

利用奇异摄动方法和数值方法求得(3.4)和(3.5)解，这样(3.1)的解就为

$$x(t)=x_1(t)+x_2(t)H(x-\alpha) \tag{3.6}$$

对于脉冲情况，控制方程为

$$\dot{x}(t)=Ax+\lambda\delta(t-\alpha)x+\varepsilon f(x) \tag{3.7}$$

假设

$$x(t)=x_1(t)+x_2(t)H(t-\alpha) \tag{3.8}$$

把(3.8)代入(3.7)，发现在$x_2(t)$方程中出现$H(t-\alpha)\delta(t-\alpha)$项。由广义函数性质，我们知道乘积$H(t-\alpha)\delta(t-\alpha)$为不定型，因而$x_2(t)$也不能唯一确定。对此复杂情况讨论留在下节。

通过上述分析，发现对于间断参数激励，$x_2(t)$方程增加非齐次项，其定解条件是齐次。这与外激励为间断情况一致。可是所增加的非齐次项对于外激励是与$x_1(t)$无关，对于参数激励是依赖于$x_1(t)$，因此参数激励问题必须是更加复杂。

四、讨　论

利用上面结果，我们讨论周期脉冲参数激励的问题。考虑方程组

$$\frac{dx}{dt}=C(t)x \tag{4.1}$$

其中 $C(t)=A+B\sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta(t-t_1-2\pi m)$，$A$和$B$为$n\times n$常数矩阵。按照Poincaré映射思想，我们只要讨论$[0,2\pi]$内的解，然后分析稳定性以及周期性。

按照[2～3]近似方法，在 $t\in[0,2\pi]$内的解在$t=t_1$处发生跃度为 e^B 跳跃；另一方面依据[4～5]结果，解在$t=t_1$发生跃度为$I+B$跳跃。如果按照本文方法，可假定

$$x=x_1(t)+x_2(t)H(t-a) \tag{4.2}$$

其中$x_1(t)$满足

$$\dot{x}_1=Ax_1,\ \ x_1(0)=x(0) \tag{4.3}$$

这样，$x_2(t)$应当满足

$$\begin{aligned}\dot{x}_2(t)H(t-t_1)+x_2(t)\delta(t-t_1)&=Ax_2(t)H(t-t_1)\\&+Bx_1(t)\delta(t-t_1)+Bx_2(t)H(t-t_1)\delta(t-t_1)\end{aligned} \tag{4.4}$$

(4.4)中出现了不定型$H(t-t_1)\delta(t-t_1)$，因而我们断定结果是不定的。考虑如下三种常见情况：

1°、 如果t_1是脉冲结束时刻，即$\delta(t-t_1)$用$(t_1-\varepsilon,\ t_1)$之间相应的函数序列的极限代替，那么可认为$H(t-t_1)\delta(t-t_1)=0$，解将在$t=t_1$发生跃度为$I+B$的跳跃。这与[4][5]结果一致。

2°、 如果t_1是脉冲开始时刻，在$(t_1,\ t_1+\varepsilon)$之间用一个高度为B/ε、宽为ε的矩形函数代替$\delta(t-t_1)$，由极限过程发现解在$t=t_1$发生跃度为e^B的跳跃。这与[2]和[3]结果一致。

3°、 如果t_1是脉冲开始时刻，$\delta(t-t_1)$用$(t_1,\ t_1+\varepsilon)$之间的相应的函数序列的极限代替，那么可以认为$H(t-t_1)\delta(t-t_1)=\delta(t-t_1)$，解在$t=t_1$发生跃度为$(I-B)^{-1}$的跳跃。

对于振动理论中典型的周期脉冲参数激励问题，在第一周期内方程为

$$\ddot{x}+\mu\dot{x}+[a+b\delta(t-t_1)]x=0 \tag{4.5}$$

即

$$\dot{x}=y,\ \ \dot{y}=-\mu y+[a+b(t-t_1)]x \tag{4.6}$$

此时

$$B=\begin{pmatrix}0 & 0\\ b & 0\end{pmatrix}$$

显然$B^n=0$（$n\geqslant2$ 的正整数），因此我们判断上述三种情况导至解在$t=t_1$发生跃度为$I+B$的跳跃的相同结论。

参 考 文 献

[1] Pan, H. H. and R. H. Hohenstein, A method of solution for an ordinary differential equation containing symbolic functions, *Quart. Appl. Math.*, 39 (1981), 131-137.

[2] Hsu, C. S., On nonlinear parametric excitation problem, *J. Appl. Mech.*, 39 (1972), 551-559.

[3] Hsu, C. S., Impulsive parametric excitation theory, *Adv. Appl. Mech.*, 17 (1977), 245-301.

[4] Hsu, C. S., Nonlinear behavior of multibody systems under impulsive parametric excitation, *Dynamics of Multibody System*, Magnus K. Springer, Berlin (1977), 63-74.

[5] Hsu, C. S., W. H. Cheng and H. C. Yee, Steady-state response of a non-linear

system under impulsive periodic parametric excitation, *J. Sound Vib.*, **50** (1977), 95—116.

[6] 尤秉礼，《常微分方程补充教程》，人民教育出版社 (1981).

[7] 盖尔芳特等，《广义函数》，科学出版社 (1965).

[8] Nayfeh, A. H., *Perturbation Methods*, Wiley-Insterscience (1973).

[9] Ting, L., *Perturbation Methods and Its Application in Mechanics*, Beijing (1981).

[10] 刘曾荣、魏锡荣，含有δ函数的弱非线性微分方程的摄动解，应用数学和力学，**5**, 5 (1984), 691—698.

Discontinuous and Impulsive Excitation

Liu Zheng-rong

(*Anhui University, Hefei*)

Abstract

In this paper, we study the solution of differential equation with Dirac function and Heaviside function, arising from discontinuous and impulsive excitation. Firstly, according to the theory of differential equation, we suggest $x(t)=x_1(t)+x_2(t)H(t-\alpha)$; then we derive the equation of $x_1(t)$ and $x_2(t)$ by terms of property of distribution and by solving $x_1(t)$ and $x_2(t)$ we obtain $x(t)$; finally, we make a thorough investigation about periodic impulsive parametric excitation.