

岩洞动力分析的一种解析方法*

杨 昇 田

(中国科学院工程力学研究所, 1985年9月21日收到)

摘 要

本文以数值分析与解析解相互构造为基础, 给出岩洞动力分析的一种解析方法, 并用实例说明这一方法的实际应用。

一、前 言

现代科学技术, 要求力学工作者提供较为精确的计算结果。这样一来经典力学理论所忽略的因素, 现在往往不能忽略, 当计入这些因素之后, 就给这类力学问题求得解析解造成了困难, 或者变得十分复杂。更有些实际工程要求解三维弹性力学方程组。当然, 这样在理论上比较成熟, 也较为精确, 但显然能解的问题也就比较局限、特殊。

有限元数值计算方法的出现和迅速发展, 许多力学问题得到了解决。

为了节省费用和减少计算量, 并给出明确而又清晰的解析表达式以建立各量之间的明显相互依赖关系, 本文利用“数值解析”方法, 对较为复杂的岩洞动力学问题求得解析解, 给出了一个具有一定精度而又较为简明的结果。

二、问题简化方法

在无限介质中对于非规则断面地下结构(如像地下岩洞, 巷道, 隧洞等)的动力分析目前还没有一个很好的办法, 而且问题本身也是十分复杂的。但是利用有限单元法能很方便的给出地下结构周围介质的应力状态及其分布规律, 即应力时空曲线, 通过对这一规律的分析发现, 在无限介质中由于地下结构的存在而产生对自由场的应力扰动, 并不是一个很大的范围, 仅在一倍结构跨度的范围内, 而远离结构的介质, 即自由场的应力状态与结构无关, 假设介质为岩石, 则在结构周围的介质形成“围岩结构”, 如果我们仅讨论地下结构的动力分析和强度问题, 那么只需对“围岩结构”作力学分析, 这样就把一个无限介质中的三维弹性动力学问题归结为围岩结构动力学问题。建立了自由场应力状态与地下结构围岩强度直接相联系的计算方法。作这样的简化之后, 可望对“围岩结构”的动力方程给出解析解。

可见通过数值解析方法即可通过数值计算(差分或有限元)给出复杂结构的应力状态和分布规律——即应力时空曲线, 通过对应力状态的分析建立新的等效结构的动力方程并求解。

* 岳曾元推荐。

三、岩洞受横向爆炸加载时的解

1、问题的数值计算结果

当爆炸压缩波横向通过地下岩洞时，引起岩洞周围岩石介质的应力重分布，对于荷载波长与岩洞特征尺寸相当时，要考虑岩洞的尺度效应。根据文献[1]的有限元分析，岩洞两侧的应力分布规律虽然相似，但其各点峰值并不对称，迎爆面的应力状态与背爆面相比其空间分布是处于高应力状态中，达峰值时刻有一定的时间差。如果仅从强度的角度出发，只需考虑迎爆面的应力状态。在迎爆一侧它的应力状态与自由场不同，如果分离一块围岩（如图1所示划斜线部分）即“围岩结构”，根据文献[1]的分析，这一分离体周向应力沿围岩周边三次曲线分布并有反弯点，沿垂直周边方向则近似线性分布，在岩体某一分界面有反向零点，

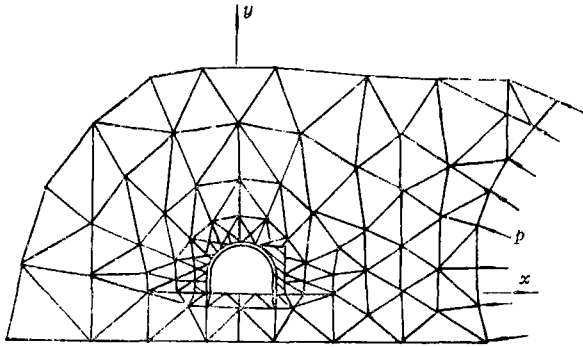


图 1

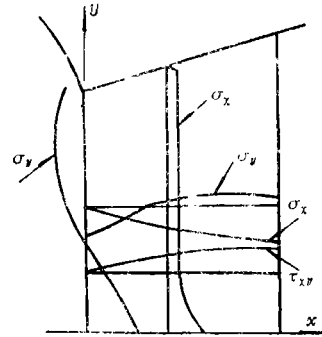


图 2

远离周边一定距离应力保持不变并等于自由场值，而它的剪应力沿该方向是抛物线分布。从应力分布状态看分离体与一个受弯构件极相似。图2是文献[1]的计算结果。围岩的应力分布还说明在1/3跨厚的分界面上已接近自由场中应力，自由场应力可取为考虑分离体与介质相互作用后的分离体上分布作用力，而分离体的另一侧是自由面，两端与一定形状的介质相连。

将一部分岩体分离出来后，它相当于一个在横向动载下的厚壁受弯构件。为不失一般性，假定分离体具有一定的长、宽、厚的块体，岩洞的破坏仅与这一块岩体有关。根据文献[1]，围岩应力的结构效应只在岩洞附近（一般在特征长度范围内），这里厚度取为不超过这个尺寸，而分离体的两端边界与自由场介质相连，可视为弹性嵌固边界，嵌固的程度由岩石的性质和岩洞拱、底边界形状决定。如果是矩形断面岩洞，边界为两两对称，如果是直墙拱，则为非对称，拱脚一边的嵌固程度依赖于拱顶的矢跨比。

2、等效围岩结构动力方程的建立

根据上述力学模型，对分离体可推导出动力平衡方程^[2]

$$\begin{cases} \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 & (3.1) \\ -Q_x + \frac{\partial M_x}{\partial x} - \rho J \frac{\partial^2 \beta_x}{\partial t^2} + \frac{\partial H}{\partial y} = 0 & (3.2) \\ -Q_y + \frac{\partial M_y}{\partial y} - \rho J \frac{\partial^2 \beta_y}{\partial t^2} + \frac{\partial H}{\partial x} = 0 & (3.3) \end{cases}$$

式中 Q_x , Q_y , M_x , M_y 分别为分离体断面的剪力和弯矩, 它的横向荷载 q 即为分离界面的自由场受力状态.

考虑到剪切、转动惯量的厚壁效应, 亦即, 考虑到位移

$$\begin{cases} w(x, y, z, t) = w(x, y, t) \\ u(x, y, z, t) = -\frac{\partial w}{\partial x} z + \psi(x, y, t)f(z) \\ v(x, y, z, t) = -\frac{\partial w}{\partial y} z + \phi(x, y, t)g(z) \end{cases}$$

注意到剪应力

$$\tau_{xz} = \frac{Q_x}{2h/3} \left[1 - \left(\frac{z}{h/2} \right)^2 \right]$$

$$\tau_{yz} = \frac{Q_y}{2h/3} \left[1 - \left(\frac{z}{h/2} \right)^2 \right]$$

那么根据弹性理论, 可推出 σ_x , σ_y , τ_{xy} , 并可得到弯矩

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz = D \left[\frac{\partial \beta_x}{\partial x} + \nu \frac{\partial \beta_y}{\partial y} + \frac{1+\nu}{c} q \right]$$

$$M_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z dz = D \left[\frac{\partial \beta_y}{\partial y} + \nu \frac{\partial \beta_x}{\partial x} + \frac{1+\nu}{c} q \right]$$

其中

$$\beta_x = -\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{Q_x}{5Gh/6}$$

$$\beta_y = -\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{Q_y}{5Gh/6}$$

$$c = \frac{5}{6} \cdot \frac{Eh}{\nu}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

对方程(3.1), (3.2), (3.3)进一步整理、简化, 并考虑到 q 在分离界面均匀分布, 是时间 t 的线性函数, 那么平衡方程可变为

$$\Delta \Delta w - \left(\frac{6\rho}{5G} + \frac{\rho J}{D} \right) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta w + \frac{\rho h}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q \quad (3.4a)$$

$$M_x = D \left[-\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - \frac{6D}{5Gh} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \Delta w + \frac{1+\nu}{c} q \right] \quad (3.4b)$$

$$M_y = D \left[-\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - \frac{6D}{5Gh} \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \Delta w + \frac{1+\nu}{c} q \right] \quad (3.4c)$$

该方程相当于厚壁受弯构件的动力方程.

3、方程的解

方程(3.4)可对四边支承的分离体给出圆频率、弯矩、剪力的基本解表达式^[3]

$$\omega_1^2 = \frac{Dg}{\rho h b^4} \cdot \lambda^2 \quad (3.5)$$

$$\lambda^2 = \frac{(\alpha_1 a)^4 \left(\frac{b}{a} \right)^4 + 2 \frac{E_1}{R_1} \frac{F_1}{S_1} \left(\frac{b}{a} \right)^2 + (\alpha_1 b)^4}{1 + I_1 \left(\frac{h}{b} \right)^2 \left(\frac{E_1}{R_1} \frac{b^2}{a^2} + \frac{F_1}{S_1} \right)} \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned}
 M_y(x, y, t) = & -p_0 b^2 \frac{1}{\lambda_c^2} \frac{G_1}{\sqrt{R_1}} \frac{H_1}{\sqrt{S_1}} \left\{ \nu \left(\frac{b}{a} \right)^2 \left(\frac{a^2 X_1''}{\sqrt{R_1}} \cdot \frac{Y_1}{\sqrt{S_1}} \right) \right. \\
 & + \left(\frac{X_1}{\sqrt{R_1}} \frac{b^2 Y_1''}{\sqrt{S_1}} \right) + I_2 \left(\frac{h}{b} \right)^2 \left[\left(\frac{X_1}{\sqrt{R_1}} \cdot \frac{b^4 Y_1''''}{\sqrt{S_1}} \right) \right. \\
 & + (1+\nu) \left(\frac{b}{a} \right)^2 \left(\frac{a^2 X_1''}{\sqrt{R_1}} \cdot \frac{b^2 Y_1''}{\sqrt{S_1}} \right) \\
 & \left. \left. + \nu \left(\frac{b}{a} \right)^4 \left(\frac{a^4 X_1''''}{\sqrt{R_1}} \cdot \frac{Y_1}{\sqrt{S_1}} \right) \right] \right\} \mathcal{X}_1(t) + q b^2 \frac{\nu}{10(1-\nu)} \left(\frac{h}{b} \right)^2 \quad (3.7)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Q_y(x, y, t) = & -p_0 b \frac{1}{\lambda_c^2} \frac{G_1}{\sqrt{R_1}} \frac{H_1}{\sqrt{S_1}} \left\{ \left(\frac{b}{a} \right)^2 \left(\frac{a^2 X_1''}{\sqrt{R_1}} \cdot \frac{b Y_1'}{\sqrt{S_1}} \right) + \left(\frac{X_1}{\sqrt{R_1}} \frac{b^3 Y_1''''}{\sqrt{S_1}} \right) \right. \\
 & + I_2 \left(\frac{h}{b} \right)^2 \left[\left(\frac{X_1}{\sqrt{R_1}} \frac{b^5 Y_1''''}{\sqrt{S_1}} \right) + 2 \left(\frac{b}{a} \right)^2 \left(\frac{a^2 X_1''}{\sqrt{R_1}} \frac{b^3 Y_1''''}{\sqrt{S_1}} \right) \right. \\
 & \left. \left. + \left(\frac{b}{a} \right)^4 \left(\frac{a^4 X_1''''}{\sqrt{R_1}} \frac{b Y_1'}{\sqrt{S_1}} \right) \right] \right\} \mathcal{X}_1(t) + p_0 b \frac{\lambda_c^2}{\lambda_c^2} \left(\frac{h}{b} \right)^2 \\
 & \cdot \frac{G_1}{\sqrt{R_1}} \frac{H_1}{\sqrt{S_1}} \left(\frac{X_1}{\sqrt{R_1}} \frac{b Y_1'}{\sqrt{S_1}} \right) \cdot \frac{\mathcal{X}_1(t)}{\omega_1^2} \quad (3.8)
 \end{aligned}$$

$$\lambda_c = \frac{(\alpha_1 a)^4 \left(\frac{b}{a} \right)^4 + 2 \frac{E_1}{R_1} \cdot \frac{F_1}{S_1} \left(\frac{b}{a} \right)^2 + (\alpha_1 b)^4}{1 + I_2 \left(\frac{h}{b} \right)^2 \left(\frac{E_1}{R_1} \frac{b^2}{a^2} + \frac{F_1}{S_1} \right)} \quad (3.9)$$

上式中

$$\begin{aligned}
 G_1 &= \frac{1}{a} \int_0^a X_1 dx, & H_1 &= \frac{1}{b} \int_0^b Y_1 dy \\
 R_1 &= \frac{1}{a} \int_0^a X_1^2 dx, & S_1 &= \frac{1}{b} \int_0^b Y_1^2 dy, \\
 E_1 &= a \int_0^a X_1'' X_1 dx, & F_1 &= b \int_0^b Y_1'' Y_1 dy \\
 I_1 &= \frac{1}{5(1-\nu)} + \frac{1}{12}, & I_2 &= \frac{1}{5(1-\nu)} \\
 \mathcal{X}_1(t) &= \frac{\omega_1}{p_0} \int_0^t q(\tau) \sin \omega_1(t-\tau) d\tau
 \end{aligned}$$

p_0 为荷载特征值, X_1, Y_1 为与 x, y 方向边界条件相应梁振型函数, $\alpha_1 a, \alpha_1 b$ 是相应梁频率方程的根。

4. 关于弹性嵌固边界

X_1, Y_1 的确定取决于边界条件, 因此需给出边界弹性嵌固系数 k 的计算。

$$k = \frac{EJ}{KH}$$

K 为弹嵌边界之支承结构产生单位转角所需力矩, H 为梁长。

根据文献[4], 把边界假定为刚印有直的倾斜基底的情形, 假定垂直边界的已知力将刚印压入弹性半平面, 并且刚印与弹性体之间存在很大的摩擦力, 使不致发生滑动。如图3所示。那么使压模倾斜的力矩和转角之间的关系为

$$\theta = \frac{\kappa + 1}{2\pi G(1 + 4\beta^2)l^2} \cdot M$$

其中 M 为力偶,

$$\kappa = \frac{\lambda + 3G}{\lambda + G}, \quad \beta = \frac{\ln x}{2\pi}$$

那么

$$K = \frac{2\pi G(1 + 4\beta^2)l^2}{\kappa + 1}$$

有

$$k_1 = \frac{EJ}{H} \cdot \frac{\kappa + 1}{2\pi G(1 + 4\beta^2)l^2}$$

拱顶一端的支承条件, 将其简化为有梁托支承的嵌固边界, 根据不同矢跨比用下式表示

$$k_2 = \eta k_1$$

其中

$$\eta = \frac{0.0833}{\alpha_2}$$

α_2 可查已算出的表1. 表中 α 为拱高与岩洞全高之比, m 为半跨加所取分离体厚度与分离体厚度之比.

至此, 问题得解.

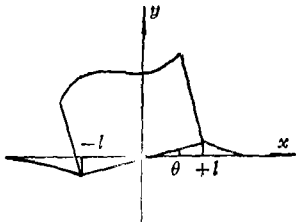


图 3

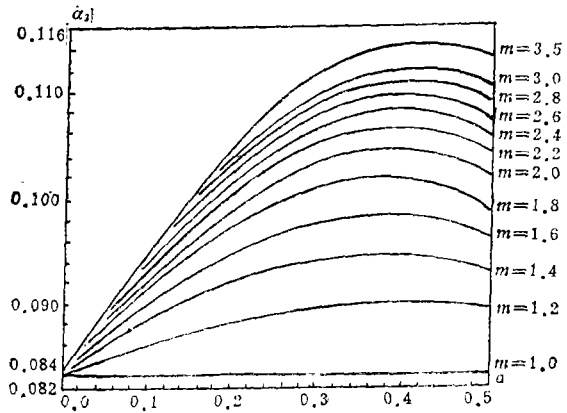


表 1

5、算例

对于直墙半圆拱形岩洞和同种尺寸的方形岩洞, 即 $k_1 = 0.05$, $k_2 = 0.10$ 和 $k_1 = 0.10$, $k_2 = 0.10$ 两种. 此时 $a \rightarrow \infty$, 即 $b/a \rightarrow 0$ (洞长视为无限), $X_1 = R_1 = G_1 = 1$, $E_1 = \alpha_1 a = 0$.

结果:

当 $k_1 = k_2 = 0.10$ 时, 分离体跨中弯矩

$$\lambda^2 = 208.06, \quad M_y = 1.468 \times 10^4 \text{kgcm/cm}$$

当 $k_1 = 0.05$, $k_2 = 0.10$ 时

$$\lambda^2 = 230.81, \quad M_y = 1.264 \times 10^4 \text{kgcm/cm.}$$

6、结果讨论

表达式(3.5)~(3.9)可以看出, 分离体强度的控制量 M_y , Q_y 不仅可以直接算出, 还明显给出与分离体有关量的依赖关系. 通过量 $\alpha_1 b$, F_1/S_1 , $H_1/\sqrt{S_1}$, $b^2 Y_1''/\sqrt{S_1}$ 以及

$b^4 Y_1'''' / \sqrt{S_1}$ 建立与边界嵌固程度的关系, 从而与围岩介质的性质和岩洞的形状有关. M_y 与 b^2 成正比, 亦即与分离体的长度平方成正比, 而 Q_y 与 b 成正比, 亦即与分离体长度一次方成正比. 量 $\chi_1(t)$ 给出与荷载的时间函数的关系, 量 $(h/b)^2$ 表明与分离体厚跨比的关系, 表达式还给出了其它量的影响量级. 总之该解析表达式有助于从理论上探讨岩洞受动载作用的一些本质问题.

四、结 论

通过有限元数值分析, 对非规则断面的地下岩洞, 这一复杂的动力学问题先给出了规律性的力学形态, 进而建立了简化的等效弹性体动力学方程. 方程的解析解给出该问题的明晰物理概念, 并能简捷的看出各物理量间的依赖关系. 这对工程实际和从理论上探讨这一问题是十分方便的. 使结构动力学方法处理一类复杂动力学问题成为可能.

参 考 文 献

- [1] Yang Sheng-tian and Zhan Yao-qin, Finite element analysis of a cavity in rock subjected to blast loading, *Proceeding of the ICFEM*, 8 (1982).
- [2] 杨昇田, 侧向爆炸荷载下直墙拱形岩洞强度的近似分析, *爆炸与冲击*, 2, 4 (1982).
- [3] 曹志远、杨昇田, 关于受弯构件力学计算的一种表达式, *科学通报*, 24, 3 (1979).
- [4] Мусхелишвили Н. И., 《数学弹性力学的几个基本问题》(赵惠元译), 科学出版社 (1958).

An Analytical Method in the Dynamical Analysis of the Rock Cavity

Yang Sheng-tian

(Institute of Engineering Mechanics, Academia Sinica, Haerbin)

Abstract

In this paper, an analytical method in the dynamical analysis of the rock cavity is given based on interaction construction of the numerical analysis and analytical solution. An example is used to show how to get it in practice.