

一般壳体组合结构在均布压力下的平衡与稳定*

宋天霞 秦庆华

(华中工学院, 1985年10月5日收到)

摘 要

本文采用几何非线性理论建立一般壳体组合结构的能量泛函, 再根据能量极值原理提出了这类组合结构在均布压力下的平衡和稳定的非线性有限元计算方法, 计算结果与实验结果符合较好。

一、引 言

具有肋骨、筋条和肘板加强的球壳、柱壳以及锥壳等组合结构^{[1],[2],[3],[4]}, 已在化工、深潜、造船和海洋工程中得到广泛应用, 但这类组合结构的平衡与稳定问题, 还没有一个统一的非线性有限元计算方法。在已有的解析分析^{[1],[6]}或半解析分析^{[5],[7]}中, 要么就是对整体结构作出过于粗略的假定^[6], 以致误差较大; 要么就是将整体分成各个局部后再作粗略假定^{[1],[2]}, 特别是在这类结构的优化设计中更是如此^{[8],[9]}。

薄壳屈曲大挠度理论在 Donell 大挠度方程的基础上, 提出了大挠度分析的一般方法^[10], 并指出了载荷-位移的非线性关系在薄壳理论中的重要作用。之后, 近四十年来, 许多作者围绕着柱壳的超屈曲平衡变形问题进行了深入的研究^{[11]~[13]}, 并讨论了带肋与不带肋柱壳的几何非线性稳定问题。但这些结果, 实验证明^[14]还不能直接用于一般具有加强部件的壳体组合结构。随着化工、深潜以及海洋工程的迅速发展, 急需找出一种比直接用非线性有限元来得更为简便有效的电算方法, 以解决这类组合结构的平衡与稳定问题。

本文首先从几何非线性理论出发, 采用几种特定单元离散, 建立有限元的能量计算公式, 确定组合结构的能量泛函, 并根据极值原理导出结构系统的平衡与稳定方程, 在此过程中, 还考虑了非对称大挠度变形对外势能的影响。实例计算的结果证明我们的分析与方法是比较符合实际的。

二、组 合 结 构

这里的一般壳体组合结构, 主要是指柱壳、锥壳、球壳、肋骨、肘板、圆板、筋条等的各种组合结构。在工程中常用这类结构, 如化工容器、海洋工程、深潜装置等, 都存在着结

* 叶开沅推荐。

构、受载以及变形与失稳的对称性。因此，我们研究这类结构所应用的离散单元、能量计算以及平衡与稳定问题都紧紧围绕这一特点进行。此外，文献[1]、[2]、[3]、[6]可看到这类结构的几种具体形式。

三、平衡与稳定方程

为了简便起见，用 e 表示结构系统的轴对称平衡状态， $u^{(e)}$ 代表该状态下的位移场。由能量极值原理，可得 e 状态下的平衡方程为：

$$\delta(U^{(e)} + \Omega^{(e)}) = 0 \quad (3.1)$$

式中 δ 为变分符号； U 为系统弹性变形能； Ω 为外载势能。式(3.1)即为以能量形式表达的平衡方程的一般形式。

为了研究 e 状态的稳定性，在 e 状态下给予微小扰动 $u^{(p)}$ （此扰动为 θ 的周期函数），且 $u^{(p)}$ 满足运动条件，于是有：

$$u = u^{(e)} + u^{(p)} \quad (3.2a)$$

$$U = U^{(e)} + U^{(1)} + U^{(2)} + O(U^{(3)}) \quad (3.2b)$$

$$\Omega = \Omega^{(e)} + \Omega^{(1)} + O(\Omega^{(2)}) \quad (3.2c)$$

式中，上标(1)、(2)分别表示包含有扰动 $u^{(p)}$ 所产生的线性项与非线性项（二次项）。

从总势能的变分等于零，即

$$\delta(U + \Omega) = 0 \quad (3.3)$$

并根据式(3.1)和式(3.2)可得平衡状态下的稳定方程的一般形式为：

$$\delta(U^{(1)} + U^{(2)} + \Omega^{(1)}) = 0 \quad (3.4)$$

四、能量计算

根据我们所研究的一般壳体组合结构，在考虑几何非线性下，其应变场一般可表示为：

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta}^{(e)} + \varepsilon_{\alpha\beta}^{(1)} + \varepsilon_{\alpha\beta}^{(2)} + O(\varepsilon_{\alpha\beta}^{(3)}) \quad (4.1a)$$

$$K_{\alpha\beta} = K_{\alpha\beta}^{(e)} + K_{\alpha\beta}^{(1)} + O(K_{\alpha\beta}^{(2)}) \quad (4.1b)$$

据此，须分类计算以下几种能量：

1、壳体能量

这里的壳体，主要是指柱壳、锥壳和球壳。由壳体分析的一般理论，壳体应变能可用中面应变 $\varepsilon_{\alpha\beta}$ 和曲率变化 $K_{\alpha\beta}$ 来表示：

$$U_s = \frac{1}{2} \iiint \left[\frac{Et}{1-\nu^2} \left\{ \varepsilon_s^2 + \varepsilon_\theta^2 + 2\nu\varepsilon_s\varepsilon_\theta + 2(1-\nu)\varepsilon_s^2 \right\} + \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \left\{ K_s^2 + K_\theta^2 + 2\nu K_s K_\theta + 2(1-\nu)K_s^2 \right\} \right] r ds d\theta \quad (4.2)$$

式中 ν 为泊松比； t 为壳厚。

利用式(4.1)，则可将应变能分解为：

$$U_s = U_{se\theta}^{(e)} + U_{se\theta}^{(1)} + U_{spp}^{(1)} + U_{se\theta}^{(2)} \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned}
 \text{式中 } U_{s_{ee}^{(e)}} &= \frac{1}{2} \iint \left[\frac{Et}{1-\nu^2} \{ (\varepsilon_s^{(e)})^2 + (\varepsilon_\theta^{(e)})^2 + 2\nu\varepsilon_s^{(e)}\varepsilon_\theta^{(e)} + 2(1-\nu)(\varepsilon_s^{(e)})^2 \} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \{ (K_s^{(e)})^2 + (K_\theta^{(e)})^2 + 2\nu K_s^{(e)}K_\theta^{(e)} + 2(1-\nu)(K_s^{(e)})^2 \} \right] rdsd\theta
 \end{aligned} \tag{4.4a}$$

$$\begin{aligned}
 U_{s_{ep}^{(1)}} &= \frac{1}{2} \iint \left[\frac{2Et}{1-\nu^2} \{ \varepsilon_s^{(e)}\varepsilon_s^{(1)} + \varepsilon_\theta^{(e)}\varepsilon_\theta^{(1)} + \nu(\varepsilon_s^{(e)}\varepsilon_\theta^{(1)} + \varepsilon_\theta^{(e)}\varepsilon_s^{(1)}) \right. \\
 &\quad \left. + 2(1-\nu)\varepsilon_s^{(e)}\varepsilon_s^{(1)} \right] + \frac{2Et^3}{12(1-\nu^2)} \{ K_s^{(e)}K_s^{(1)} + K_\theta^{(e)}K_\theta^{(1)} + \nu(K_\theta^{(1)}K_s^{(e)} \\
 &\quad \left. + K_s^{(1)}K_\theta^{(e)}) + 2(1-\nu)K_s^{(e)}K_s^{(1)} \right] rdsd\theta
 \end{aligned} \tag{4.4b}$$

$$\begin{aligned}
 U_{s_{pp}^{(1)}} &= \frac{1}{2} \iint \left[\frac{Et}{1-\nu^2} \{ (\varepsilon_\theta^{(1)})^2 + (\varepsilon_s^{(1)})^2 + 2\nu\varepsilon_s^{(1)}\varepsilon_\theta^{(1)} + 2(1-\nu)(\varepsilon_s^{(1)})^2 \} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \{ (K_s^{(1)})^2 + (K_\theta^{(1)})^2 + 2\nu K_s^{(1)}K_\theta^{(1)} + 2(1-\nu)(K_s^{(1)})^2 \} \right] rdsd\theta
 \end{aligned} \tag{4.4c}$$

$$\begin{aligned}
 U_{s_{ep}^{(2)}} &= \frac{1}{2} \iint \left[\frac{2Et}{1-\nu^2} \{ \varepsilon_s^{(2)}(\varepsilon_s^{(e)} + \nu\varepsilon_\theta^{(e)}) + \varepsilon_\theta^{(2)}(\varepsilon_\theta^{(e)} + \nu\varepsilon_s^{(e)}) \right. \\
 &\quad \left. + 2(1-\nu)\varepsilon_s^{(2)}\varepsilon_s^{(e)} \right] rdsd\theta
 \end{aligned} \tag{4.4d}$$

以上各算式中，均略去了二次以上的扰动项（在以下能量计算中均是如此）。

2、肋骨能量

设 \bar{z} 为壳体中面到肋骨形心的距离， A_f 为肋骨横截面积， I_f 为截面抗弯惯性矩，则肋骨中面应变为

$$\varepsilon'_\theta = \varepsilon_\theta + \bar{z}K_\theta \tag{4.5}$$

和肋骨应变能为：

$$U_f = \frac{1}{2} \int E \{ A_f (\varepsilon'_\theta)^2 + I_f K_\theta^2 \} r d\theta \tag{4.6}$$

由式(4.1)，有

$$U_f = U_{f_{ee}^{(e)}} + U_{f_{ep}^{(1)}} + U_{f_{pp}^{(1)}} + U_{f_{ep}^{(2)}} + O(U_{f_{pp}^{(3)}}) \tag{4.7}$$

$$\text{式中 } U_{f_{ee}^{(e)}} = \frac{1}{2} \int E \{ A_f (\varepsilon_\theta^{(e)})^2 + 2A_f \bar{z} \varepsilon_\theta^{(e)} K_\theta^{(e)} + (A_f \bar{z}^2 + I_f) (K_\theta^{(e)})^2 \} r d\theta \tag{4.8a}$$

$$\begin{aligned}
 U_{f_{ep}^{(1)}} &= \frac{1}{2} \int 2E \{ A_f \varepsilon_\theta^{(e)} \varepsilon_\theta^{(1)} + A_f \bar{z} (\varepsilon_\theta^{(e)} K_\theta^{(1)} + K_\theta^{(e)} \varepsilon_\theta^{(1)}) \\
 &\quad + (A_f \bar{z}^2 + I_f) K_\theta^{(e)} K_\theta^{(1)} \} r d\theta
 \end{aligned} \tag{4.8b}$$

$$U_{f_{pp}^{(1)}} = \frac{1}{2} \int E \{ A_f (\varepsilon_\theta^{(1)})^2 + 2A_f \bar{z} \varepsilon_\theta^{(1)} K_\theta^{(1)} + (A_f \bar{z}^2 + I_f) (K_\theta^{(1)})^2 \} r d\theta \tag{4.8c}$$

$$U_{f_{ep}^{(2)}} = \frac{1}{2} \int E \{ 2A_f \varepsilon_\theta^{(2)} (\varepsilon_\theta^{(e)} + \bar{z} K_\theta^{(e)}) \} r d\theta \tag{4.8d}$$

3、圆环板能量

由于我们研究的结构具有载荷与几何对称性，因而圆环板（图2(d)）受载情况总是近似

的看作板的中面内沿径向受均布载荷。应变仅有式(4.1a)，也即是按平面应力问题计算圆板能量，具体算式在一般弹性力学书中均可见到，在此勿须赘述。

4、薄壳圆块能量

结构中常常出现在柱壳上挖一圆孔。如果孔的面积相对于孔所在的柱壳段的侧面积较小 ($<5\%$)，则可略去不计，否则，由于挖孔而损失掉的变形能应按接受横向均布载荷的薄壳圆块计算，但为了避免计算上的麻烦，常近似的按承受横向均布载荷的圆板计算。这种计算，早为人们所熟知，故在此也不用多谈。

5、外载势能

在考虑轴对称变形引起势能变化的同时，还须考虑非轴对称大挠度变形对外载势能的影响。这样，在图1所示坐标及其位移变量的情况下，外载势能为：

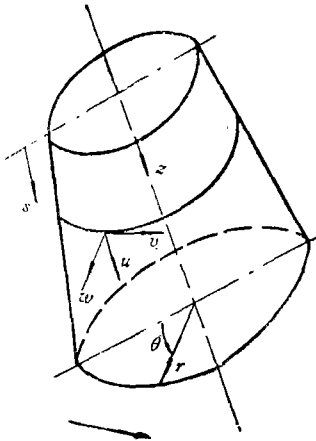


图 1

$$\Omega = \int_{\mathcal{A}} \int_u p d\bar{A} du \quad (4.9)$$

式中

$$du = (du, dv, dw) \quad (4.10)$$

$$d\bar{A} = (\bar{R},_s \wedge \bar{R},_\theta) d\theta ds \quad (4.11)$$

\bar{R} 为任一点沿经线发生位移后的位置矢量：

$$\bar{R} = (s+u, v, r+w) \quad (4.12)$$

于是式(4.10)又可写成：

$$\Omega = \int_{\mathcal{A}} \int_u p \{ (\bar{R},_s \wedge \bar{R},_\theta) \cdot (du, dv, dw) \} d\theta ds \quad (4.13)$$

同样，由式(3.2c)， Ω 又可分成：

$$\Omega = \Omega_{ee}^{(e)} + \Omega_{ep}^{(1)} + \Omega_{pp}^{(1)} + O(\Omega_{pp}^{(2)}) \quad (4.14)$$

式中

$$\Omega_{ee}^{(e)} = \iint p r w^{(e)} d\theta ds + \frac{1}{2} p \iint [(w^{(e)})^2 + w^{(e)} v,^{(e)}_s + r w^{(e)} u,^{(e)}_\theta + (v^{(e)})^2 - v^{(e)} w,^{(e)}_\theta - r w,^{(e)}_\theta u^{(e)}_\theta] d\theta ds \quad (4.15a)$$

$$\Omega_{ep}^{(1)} = \frac{1}{2} p \iint [2w^{(e)} w^{(p)} + w^{(e)} v,^{(p)}_\theta + w^{(p)} v,^{(e)}_\theta + r w^{(e)} u,^{(p)}_\theta + r w^{(p)} w,^{(e)}_\theta + 2v^{(e)} v^{(p)} - v^{(e)} w,^{(p)}_\theta - v^{(p)} w,^{(e)}_\theta - r u^{(e)} w,^{(p)}_\theta - r u^{(p)} w,^{(e)}_\theta] ds d\theta \quad (4.15b)$$

$$\Omega_{pp}^{(1)} = \frac{1}{2} p \iint [(w^{(p)})^2 + w^{(p)} v,^{(p)}_\theta + r w^{(p)} u,^{(p)}_\theta + (v^{(p)})^2 - v^{(p)} w,^{(p)}_\theta - r u^{(p)} w,^{(p)}_\theta] d\theta ds \quad (4.15c)$$

在式(4.15)中，不仅注意到扰动函数的周期性，而且还考虑了线性分支屈曲。

五、有限元法

将式(4.3)、(4.6)、(4.8)和式(4.14)代入式(3.4)，就可得到结构系统稳定方程的具体

形式。直接求解这种方程似乎是不太可能的。这里，仅就前面所谈到的一类组合结构来建有限元法计算格式。

1、 单元

建立这类结构的稳定问题的有限元计算格式，需采用如图 2 所示柱壳单元、锥壳单元、环肋单元和环板单元等。

此外，对于球壳离散还需用到球壳单元，但只要单元划分稍细一点，就可归结到锥壳单元中去。还有离散某些局部需用到杆、梁单元，但这些已为大家所熟知，故在此不再专门提出。

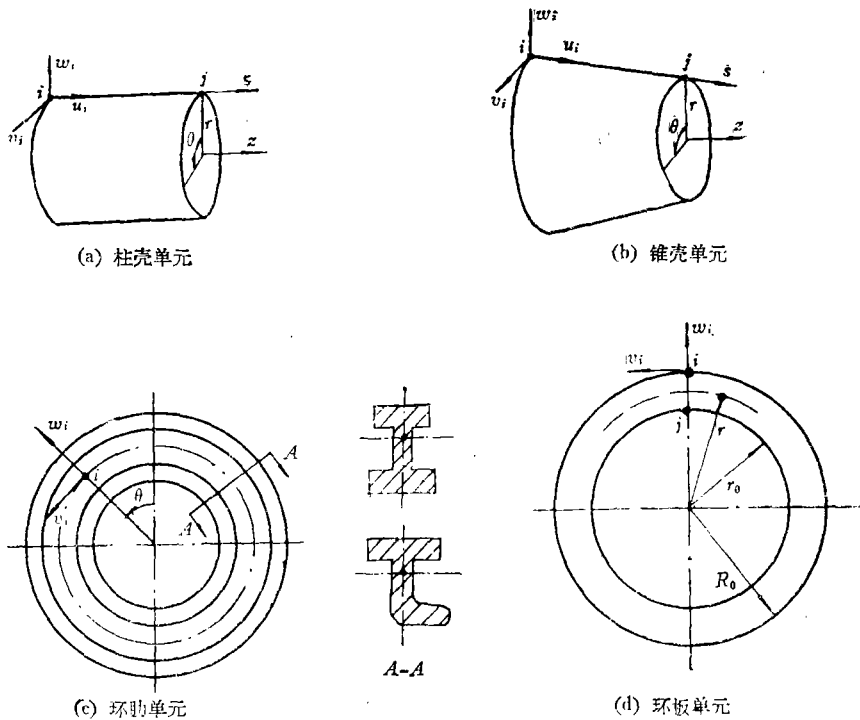


图 2

2、 位移函数

壳体单元：对于柱壳、锥壳而言，每个节点具有四个自由度： (u, v, w, w_s) 。因而位移函数可选为^[13]：

$$\left. \begin{aligned} u &= (a_1 + a_2 s) \cos k\theta \\ v &= (a_3 + a_4 s) \sin k\theta \\ w &= (a_5 + a_6 s + a_7 s^2 + a_8 s^3) \cos k\theta \end{aligned} \right\} \quad (5.1)$$

当 $k=0$ 时，上式给出轴对称平衡状态下的位移场。式(5.1)又可写成矩阵形式：

$$\left. \begin{aligned} \{u\} &= [N] \{a\} \\ \{a\} &= [\Gamma_a] \{\Delta\} \end{aligned} \right\} \quad (5.2)$$

式中

$$\{a\} = \{a_1 \ a_2 \ \dots \ a_7 \ a_8\}^T \quad (5.3a)$$

$$\{\Delta\} = \{u_1 \ v_1 \ w_1 \ w_{,s1} \ u_2 \ v_2 \ w_2 \ w_{,s2}\}^T \quad (5.3b)$$

$$[\Gamma_a] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/l & 0 & 0 & 0 & 1/l & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/l & 0 & 0 & 0 & 1/l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3/l^2 & -2/l & 0 & 0 & 3/l^2 & -1/l \\ 0 & 0 & 2/l^3 & 2/l^2 & 0 & 0 & -2/l^3 & 1/l^2 \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

由式(5.1)可知:

$$\left. \begin{aligned} u^{(e)} &= a_1 + a_2 s, \quad v^{(e)} = 0, \quad w^{(e)} = a_6 + a_7 s + a_8 s^2 + a_3 s^3 \\ u^{(r)} &= u, \quad v^{(r)} = v, \quad w^{(r)} = w \end{aligned} \right\} \quad (5.5)$$

环肋单元: 环肋加强处, 应是壳体的节圆处。这时, 一般近似的认为节圆与肋元的形心轴线重合。因此, 肋元的位移函数就是壳元的位移函数, 即根据式(5.1)算出肋环所在处的节圆应变变量, 再从式(4.6)算出环肋变形能, 问题也就解决了。

环板单元: 在壳体组合结构中, 常用中间开圆孔的圆板作为柱壳中间隔板。这时, 仅考虑由柱壳通过圆板的周边传递均匀分布载荷作用, 对这种隔板结构的离散, 则应采用环板单元。单元节点位移, 沿轴向(垂直于隔板)以 u 作刚体移动, 其它方向则按比例确定(图3):

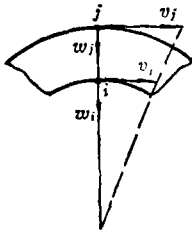


图 3

$$u_c = u, \quad v_{c,r} = \frac{r}{R_0} v, \quad w_{c,r} = \frac{r}{R_0} w \quad (5.6)$$

式中 r, R_0 如图 2(d) 所示。于是, 根据式(5.1)和式(5.2), 可得环板单元位移函数的一般形式:

$$\left. \begin{aligned} \{u\}_c &= [N] \{a\}_c \\ \{a\}_c &= [\Gamma_c] \{\Delta\} \end{aligned} \right\} \quad (5.7)$$

式中

$$\{a\}_c = \{a_1 \ a_2 \ \dots \ a_8\}^T \quad (5.8a)$$

$$[\Gamma_c] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/l & 0 & 0 & 0 & 1/l & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -R/l & 0 & 0 & 0 & R/l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3R/l^2 & -2R/l & 0 & 0 & 3R/l^2 & -R/l \\ 0 & 0 & 2R/l^3 & 2R/l^2 & 0 & 0 & -2R/l^3 & R/l^2 \end{bmatrix} \quad (5.8b)$$

3、离散特点

壳体组合结构, 尽管载荷与变形具有轴对称性, 但由于涉及到加强筋(图4)、肋板(图

7) 以及球壳等, 所以在单元离散时, 必须注意到这些部件组合形式和常用的有效处理方法^[1]。

筋条: 加强筋条一般用于开孔圆板(图4)或半圆板(图5), 而这种圆板又多半用作柱壳的横向隔板。因此, 当筋条布置较密时, 一般将筋条转变为增加板厚^[14]。

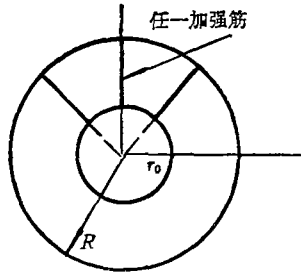


图 4

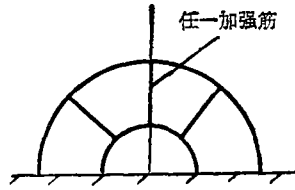
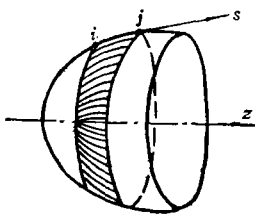


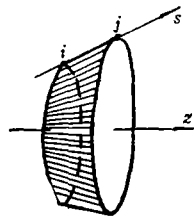
图 5

球壳: 在深潜结构中, 球壳是常见的, 较精确的办法是离散成球壳单元, 但为了简便, 也可近似地作为锥壳单元, 分别如图6(a), (b)所示, 本文还是采用球壳环单元。

肋板: 在双层柱壳组合结构中, 常在两层带肋柱壳之间加上肘板相联^{[1], [8]}。在文献[1]中, 作为相当肋骨计算, 但从离散角度来看, 当肋板布置较密时, 实际上主要是承受拉压作用, 因而可作为杆单元; 当肋板布置较稀时, 除存在拉压作用外, 还存在弯矩作用(图7), 因而应作梁单元处理。



(a) 球壳环单元



(b) 锥壳单元

图 6

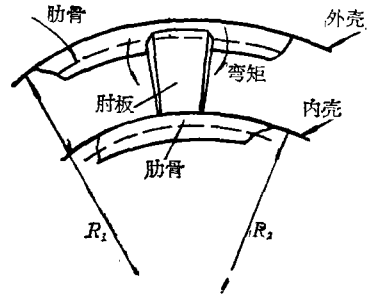


图 7

4. 曲率与应变

在考虑几何非线性下, 相应于式(5.1)、(5.5)和式(5.7)等给定的各种位移场的应变与曲率为:

$$\begin{aligned}
 \text{柱壳: } \{e^{(e)}\}_s &= \{e_s^{(e)} \quad e_\theta^{(e)} \quad e_s^{(e)}\}^T \\
 &= \{e_s^{(e)} \quad e_\theta^{(e)} \quad e_s^{(e)}\}^T + \{e_s^{(e)} \quad e_\theta^{(e)} \quad e_s^{(e)}\}^T \\
 &= \left\{ -\frac{\partial u^{(e)}}{\partial s} \quad \frac{w^{(e)}}{R} \quad 0 \right\}_L^T + \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w^{(e)}}{\partial s} \right)^2 \quad \frac{1}{2} \left(\frac{w^{(e)}}{r} \right)^2 \quad 0 \right\}_{N-L}^T
 \end{aligned} \tag{5.9}$$

式中的下标(下同): L为线性部分; N-L为非线性部分。

$$\begin{aligned}
 \{e^{(p)}\}_s &= \{e_s^{(p)} \quad e_\theta^{(p)} \quad e_s^{(p)}\}^T \\
 &= \left\{ e_s^{(1)} \quad e_\theta^{(1)} \quad e_s^{(1)} \right\}_L^T + \left\{ e_s^{(2)} \quad e_\theta^{(2)} \quad e_s^{(2)} \right\}_{N-L}^T \\
 &= \left\{ \frac{\partial u^{(p)}}{\partial s} \quad \frac{\partial v^{(p)}}{r \partial \theta} + \frac{w^{(p)}}{r} \quad \frac{\partial u^{(p)}}{r \partial \theta} + \frac{\partial v^{(p)}}{\partial s} \right\}_L^T
 \end{aligned}$$

$$+\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w^{(p)}}{\partial s}\right)^2-\frac{1}{2r^2}\left(\frac{\partial w^{(p)}}{\partial \theta}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{w^{(p)}}{r}\right)^2-\frac{\partial w^{(p)}}{\partial s}-\frac{\partial w^{(p)}}{r\partial \theta}\right\}_{N-L}^T \quad (5.10)$$

$$\begin{aligned} \{K\}_s &= \{K_s^{(e)}\}_L + \{K_s^{(p)}\}_L \\ &= \left\{K_s^{(e)}, K_\theta^{(e)}, K_{s\theta}^{(e)}\right\}_L^T + \left\{K_s^{(1)}, K_\theta^{(1)}, K_{s\theta}^{(1)}\right\}_L^T \\ &= \left\{-\frac{\partial^2 w^{(e)}}{\partial s^2}, 0, 0\right\}_L^T + \left\{-\frac{\partial^2 w^{(p)}}{\partial s^2}, -\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w^{(p)}}{\partial \theta^2}, -\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w^{(p)}}{\partial s \partial \theta}\right\}_L^T \end{aligned} \quad (5.11)$$

由式(5.9)~(5.11)可知:在变应中,除考虑线性项外,还考虑了 w 引起的几何非线性项,这与一般壳体屈曲理论中考虑的不一样;在曲率变化中,仅考虑了线性项,这与一般壳体屈曲理论中考虑的一样.在下面的球壳、锥壳中也是如此.

球壳:设子午线坐标 $s=r\varphi$,则有

$$\begin{aligned} \{e^{(e)}\}_B &= \left\{e_s^{(e)}, e_\theta^{(e)}, e_{s\theta}^{(e)}\right\}_B^T \\ &= \left\{e_{s1}^{(e)}, e_{\theta1}^{(e)}, e_{s\theta1}^{(e)}\right\}_L^T + \left\{e_{s2}^{(e)}, e_{\theta2}^{(e)}, e_{s\theta2}^{(e)}\right\}_{N-L}^T \\ &= \left\{-\frac{\partial u^{(e)}}{\partial s} + \frac{1}{r} w^{(e)}, \frac{u^{(e)}}{r} \operatorname{ctg} \varphi + \frac{w^{(e)}}{r}, 0\right\}_L^T \\ &\quad + \left\{\frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial w^{(e)}}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{w^{(e)}}{r}\right)^2\right), \frac{1}{2}\left(\frac{w^{(e)}}{r}\right)^2, \frac{\partial w^{(e)}}{\partial s} - \frac{w^{(e)}}{r}\right\}_{N-L}^T \end{aligned} \quad (5.12a)$$

$$\begin{aligned} \{e^{(p)}\}_B &= \left\{e_s^{(p)}, e_\theta^{(p)}, e_{s\theta}^{(p)}\right\}_B^T \\ &= \left\{e_s^{(1)}, e_\theta^{(1)}, e_{s\theta}^{(1)}\right\}_L^T + \left\{e_s^{(2)}, e_\theta^{(2)}, e_{s\theta}^{(2)}\right\}_{N-L}^T \\ &= \left\{e_{s1}^{(e)} \cos k\theta, \frac{1}{r} - \frac{1}{\sin \varphi} - \frac{\partial v^{(p)}}{\partial \theta} + \frac{u^{(p)}}{r} \operatorname{ctg} \varphi + \frac{w^{(p)}}{r}, \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u^{(p)}}{\partial \theta} + \frac{\partial v^{(p)}}{\partial s} - \frac{v^{(p)}}{r} \operatorname{ctg} \varphi\right\}_L^T \\ &\quad + \left\{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w^{(p)}}{\partial s}\right)^2, \frac{1}{2}\left(\frac{2}{\partial \theta} \left(\frac{w^{(p)}}{r \sin \varphi}\right)\right)^2, \frac{2}{\partial \theta} \left(\frac{w^{(p)}}{r \sin \varphi}\right) \frac{\partial w^{(p)}}{\partial s}\right\}_{N-L}^T \end{aligned} \quad (5.12b)$$

$$\begin{aligned} \{K\}_B &= \{K_B^{(e)}\}_L + \{K_B^{(p)}\}_L \\ &= \left\{K_s^{(e)}, K_\theta^{(e)}, K_{s\theta}^{(e)}\right\}_L^T + \left\{K_s^{(1)}, K_\theta^{(1)}, K_{s\theta}^{(1)}\right\}_L^T \\ &= \left\{\frac{\partial^2 w^{(e)}}{\partial s^2}, \frac{\partial w^{(e)}}{\partial s}, \frac{\operatorname{ctg} \varphi}{r}, 0\right\}_L^T + \left\{K_s^{(e)} \cos k\theta, K_\theta^{(e)} \cos k\theta \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{r^2 \sin^2 \varphi} \frac{\partial^2 w^{(p)}}{\partial \theta^2}, -\frac{1}{r \sin \varphi} \operatorname{ctg} \varphi \frac{1}{r} \frac{\partial w^{(p)}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial^2 w^{(p)}}{\partial s \partial \theta}\right\}_L^T \end{aligned} \quad (5.12c)$$

锥壳：在锥壳中，有

$$r = r_0 + s \cdot \sin \gamma \quad (5.13)$$

式中 γ 为锥角； r_0 为锥柱上端小圆半径。

$$\begin{aligned} \{e^{(e)}\}_{R-o} &= \left\{ e_s^{(e)} \quad e_\theta^{(e)} \quad e_{\theta\theta}^{(e)} \right\}_{R-o}^T \\ &= \left\{ e_{s1}^{(e)} \quad e_{\theta1}^{(e)} \quad e_{\theta\theta1}^{(e)} \right\}_L^T + \left\{ e_{s2}^{(e)} \quad e_{\theta2}^{(e)} \quad e_{\theta\theta2}^{(e)} \right\}_{N-L}^T \\ &= \left\{ \frac{\partial u^{(e)}}{\partial s} \quad \frac{w^{(e)}}{r_0 + s \cdot \sin \gamma} \quad 0 \right\}_L^T \\ &\quad + \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w^{(e)}}{\partial s} \right)^2 \quad \frac{1}{2} \left(\frac{w^{(e)}}{r_0 + s \cdot \sin \gamma} \right)^2 \quad \frac{\partial w^{(e)}}{\partial s} \frac{w^{(e)}}{r_0 + s \cdot \sin \gamma} \right\}_{N-L}^T \end{aligned} \quad (5.14a)$$

$$\begin{aligned} \{e^{(p)}\}_{R-o} &= \left\{ e_s^{(p)} \quad e_\theta^{(p)} \quad e_{\theta\theta}^{(p)} \right\}_{R-o}^T \\ &= \left\{ e_s^{(1)} \quad e_\theta^{(1)} \quad e_{\theta\theta}^{(1)} \right\}_L^T + \left\{ e_s^{(2)} \quad e_\theta^{(2)} \quad e_{\theta\theta}^{(2)} \right\}_{N-L}^T \\ &= \left\{ \frac{\partial u^{(p)}}{\partial s} \quad \frac{\partial v^{(p)}}{r \partial \theta} + \frac{w^{(p)}}{r_0 + s \cdot \sin \gamma} \quad \frac{\partial u^{(p)}}{r \partial \theta} + \frac{\partial v^{(p)}}{\partial s} \right\}_L^T \\ &\quad + \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w^{(p)}}{\partial s} \right)^2 \quad \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(r_0 + s \cdot \sin \gamma)^2} \left(\frac{\partial w^{(p)}}{\partial \theta} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. \frac{\partial w^{(p)}}{\partial s} \quad \frac{1}{(r_0 + s \cdot \sin \gamma)} \quad \frac{\partial w^{(p)}}{\partial \theta} \right\}_{N-L}^T \end{aligned} \quad (5.14b)$$

$$\begin{aligned} \{K\}_{R-o} &= \{K^{(e)}\}_{R-o} + \{K^{(p)}\}_{R-o} \\ &= \left\{ K_s^{(e)} \quad K_\theta^{(e)} \quad K_{\theta\theta}^{(e)} \right\}_L^T + \left\{ K_s^{(1)} \quad K_\theta^{(1)} \quad K_{\theta\theta}^{(1)} \right\}_L^T \\ &= \left\{ -\frac{\partial^2 w^{(e)}}{\partial s^2} \quad 0 \quad 0 \right\}_L^T + \left\{ -\frac{\partial^2 w^{(p)}}{\partial s^2} \right. \\ &\quad \left. -\frac{1}{(r_0 + s \cdot \sin \gamma)^2} \left(\frac{\partial^2 w^{(p)}}{\partial \theta^2} \right) \quad -\frac{1}{(r_0 + s \cdot \sin \gamma)} \left(\frac{\partial^2 w^{(p)}}{\partial s \partial \theta} \right) \right\}_L^T \end{aligned} \quad (5.14c)$$

环板：相应于式(5.6)和式(5.1) 给定位移场下的应变与曲率为

$$\begin{aligned} \{e^{(e)}\}_{o,p} &= \left\{ e_r^{(e)} \quad e_\theta^{(e)} \quad e_{r\theta}^{(e)} \right\}_{o,p}^T \\ &= \left\{ e_{r1}^{(e)} \quad e_{\theta1}^{(e)} \quad e_{r\theta1}^{(e)} \right\}_L^T + \left\{ e_{r2}^{(e)} \quad e_{\theta2}^{(e)} \quad e_{r\theta2}^{(e)} \right\}_{N-L}^T \\ &= \left\{ \frac{\partial w_{\theta\theta}^{(e)}}{\partial r} \quad \frac{w_{\theta\theta}^{(e)}}{r} \quad 0 \right\}_L^T + \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_{\theta\theta}^{(e)}}{\partial r} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{2} \left(\frac{w_{\theta\theta}^{(e)}}{r} \right)^2 \quad \frac{1}{2} \frac{\partial w_{\theta\theta}^{(e)}}{\partial r} \frac{w_{\theta\theta}^{(e)}}{r} \right\}_{N-L}^T \end{aligned} \quad (5.15a)$$

$$\begin{aligned} \{e^{(p)}\}_{o,p} &= \left\{ e_r^{(p)} \quad e_\theta^{(p)} \quad e_{r\theta}^{(p)} \right\}_{o,p}^T \\ &= \left\{ e_r^{(1)} \quad e_\theta^{(1)} \quad e_{r\theta}^{(1)} \right\}_L^T + \left\{ e_r^{(2)} \quad e_\theta^{(2)} \quad e_{r\theta}^{(2)} \right\}_{N-L}^T \end{aligned}$$

$$= \left\{ \frac{\partial w_{c_p}^{(e)}}{\partial r}, w_{c_p}^{(e)} + \frac{\partial v_{c_p}^{(e)}}{r \partial \theta}, \frac{\partial w_{c_p}^{(e)}}{r \partial \theta} + \frac{\partial v_{c_p}^{(e)}}{\partial s} \right\}_L^T$$

$$+ \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_{c_p}^{(e)}}{\partial r} \right)^2, \frac{1}{2} \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial w_{c_p}^{(e)}}{\partial \theta} \right)^2, \frac{\partial w_{c_p}^{(e)}}{\partial s} \frac{\partial w_{c_p}^{(e)}}{r \partial \theta} \right\}_{N-L}^T \quad (5.15b)$$

环肋：环肋一般加强于柱壳或锥壳，因而，它的应变与曲率应分别利用柱壳、锥壳的应变与曲率并通过式(4.5)、(4.6)确定。

5、奇异现象

从球壳应变的计算式(5.12)可知在球顶处会出现奇异现象，为保证应变为有限值，在球顶奇异处需作如下处理：

$$u|_{\varphi=0}=0, v|_{\varphi=0}=0, \left. \frac{\partial w}{\partial \theta} \right|_{\varphi=0}=0, \left. \frac{\partial w}{\partial s} \right|_{\varphi=0}=0 \quad (5.16)$$

这样，在包括球顶的单元中，单元节点位移矢量应为：

$$\{\Delta\}_e = \{0 \ 0 \ w_1 \ 0 \ u_2 \ v_2 \ w_2 \ w_{2,s}\}^T \quad (5.17)$$

此外，由于球壳应变式中含有三角函数项，故在计算单元能量积分时，均采用三点高斯积分。

六、平衡与稳定问题的解

1、平衡问题的解

将各类单元的应变与曲率计算式(5.9)~(5.15)分别代入相应的能量式(4.2)、(4.6)、(4.8)和式(4.14)进行积分计算后，按有限元法的常规作法组合成整体结构的能量。就 e 状态而言，变形能可写成：

$$U^{(e)} = U_s^{(e)} + U_B^{(e)} + U_{R-o}^{(e)} + U_{c_p}^{(e)}$$

$$+ U_f^{(e)} + U_{bar}^{(e)} + U_{beam}^{(e)}$$

$$= \frac{1}{2} \{\Delta\}^T [K^{(e)}] \{\Delta\} \quad (6.1)$$

式中

$[K^{(e)}] = [K^{(e)}(\{\Delta\})]$ 为整体结构刚度矩阵； $\{\Delta\}$ 为整体结构的节点位移矢量。外载势能可写成：

$$\Omega^{(e)} = \Omega_s^{(e)} + \Omega_B^{(e)} + \Omega_{R-o}^{(e)} + \Omega_{other}^{(e)}$$

$$= \{\Delta\}^T \{N\} \quad (6.2)$$

式中 $\{N\}$ 为节点载荷矢量。

将式(6.1)和(6.2)代入式(3.1)，可得系统的平衡方程：

$$[K^{(e)}(\{\Delta\})] \{\Delta\} = \{N\} \quad (6.3)$$

方程组(6.3)的解，就是平衡问题的解。求解这种非线性方程组，一般可用 Newton-Raphson 法进行^[15]。

2、 稳定问题的解

式(3.4)表明, 从 e 状态到 p 状态时, 扰动所引起的总势能的变分等于零。这意味着由这一判据所建立的方程不再有唯一解, 而在变形与载荷曲线上出现分叉点。相应于这种分叉点的载荷, 正是我们所要求的临界载荷, 即稳定问题的解。

将有关扰动应变和曲率式(5.10)、(5.11)、(5.12b)、(5.12c)、(5.14b)、(5.14c)和式(5.15b)分别代入相应的能量计算式(4.3)、(4.6)和式(4.14)的有关算式中, 进行积分后分类组集扰动能量部分, 并代入式(3.4), 再对扰动位移进行变分后加以整理, 可得:

$$[K^{(p)}]\{\Delta\}=0 \quad (6.4)$$

式中, 几何刚度矩阵是 $\{\Delta\}$ 的函数, 即

$$[K^{(p)}]=[K^{(p)}(\{\Delta\})] \quad (6.5)$$

由于我们是给平衡状态以扰动, 所以在式(6.4)中的 $\{\Delta\}$ 是表示扰动的某一值时, 则几何刚度矩阵中的位移, 即式(6.5)中的位移, 应由式(6.3)中的解代入, 从而使 $[K^{(p)}]$ 与扰动位移无关。

如果在式(6.4)中, 就分离出载荷因子进行整理, 则式(6.4)又可写成:

$$([L]+\lambda[X])\{\Delta\}=0 \quad (6.6)$$

式中

$$[L]+\lambda[X]=[K^{(p)}], \quad \lambda=p \quad (6.7)$$

这样, 求解临界载荷的问题变为求广义特征值问题:

$$|[L]+\lambda[X]|=0 \quad (6.8)$$

七、实例计算

为了检验理论与方法的正确性, 对球、柱壳组合结构⁽⁶⁾ (图8)进行了验算。

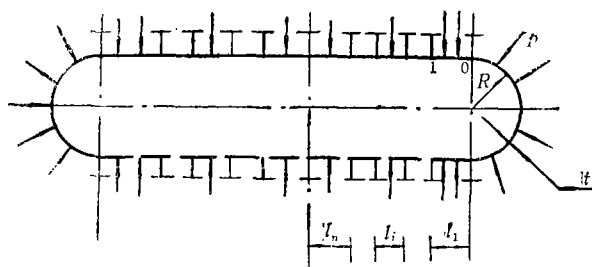


图 8

1、 e 状态的应力计算

数据: $p_1=60\text{kg/cm}^2$, $p_2=66\text{kg/cm}^2$, $p_3=72\text{kg/cm}^2$; $\nu=0.3$, $E=2.1 \times 10^9\text{kg/cm}^2$ 。

几何尺寸如图9所示。

单元划分: 由于对称性, 只计算结构的1/2 (图9)。将球壳、柱壳两部分分别划为7个单元, 共15个节点, 如图10所示。

计算结果:

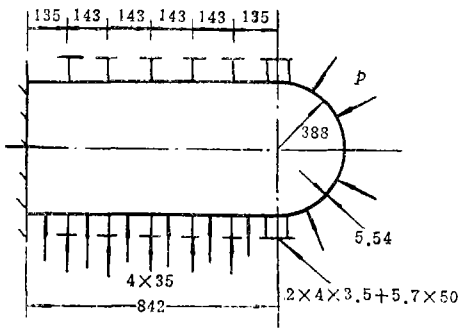


图 9 (单位mm)

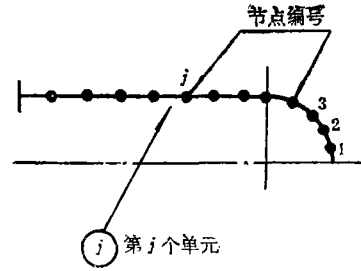


图 10

对 e 状态下的应力计算值与实测值均列于表1。

表 1 特征点应力计算值与实测值的比较^[5] (单位: kg/cm^2)

压 力	方 法	球壳交接处最大表面切向应力	柱壳中部最大表面纵向应力	球顶处最大表面切向应力
$p_1=60$	本 法	-2741	-4103	-2772
	实 测	-2577	-4053	-2534
	误 差	-6.4%	-1.2%	-9.4%
$p_2=66$	本 法	-2949	-4260	-3050
	实 测	-2732	-4441	-2782
	误 差	-7.9%	4.1%	-9.6%
$p_3=72$	本 法	-3217	-4946	-3327
	实 测	-3069	-4861	-3032
	误 差	-4.8%	-1.7%	-9.7%

从表中可以看出: (1) 计算结果与实测结果分别呈线性关系。事实上, 计算值与实测值均未超过结构材料的屈服极限, 如若把载荷加大到大于 $72\text{kg}/\text{cm}^2$, 那么, 从柱壳中部的计算位移来看, 考不考虑几何非线性就有比较明显的差别了, 由于该结构是为疲劳试验设计的, 不宜继续加载, 因而差此一步, 实是美中不足, 尽管如此, 但可断言, 如果继续加载, 几何非线性的影响将起着不可忽视的作用, 这一点, 在稳定性试验中已经得到证明。

(2) 计算值与实测值有相对误差, 在球顶处, 最大误差 $\approx 9.8\%$; 在球、柱壳交接处最大误差 $\approx 8\%$ 。造成误差的主要原因在于: 实际结构与理论模型有一定的差距; 布片位置与计算位置存在一定的错动, 特别是内表面的贴片更是如此。此外, 对球顶处奇异点的处理也存在着一定的误差。

2. 求临界压力

各种情况计算的结果与实验结果分别列于表 2 和表 3:

表 2 极值波数与临界压力

试 验 值*	$p_{cr}=125\text{kg}/\text{cm}^2$ [6]		
	2	3	4
波 数			
临界载荷	$252.5\text{kg}/\text{cm}^2$	$136.6\text{kg}/\text{cm}^2$	$200.3\text{kg}/\text{cm}^2$
理 论 值	$p_{cr}=136.6\text{kg}/\text{cm}^2$		

* 加载到 $125\text{kg}/\text{cm}^2$ 后, 钢模尚未完全破坏, 但因压力筒满载而不能继续加。

表 3

 p_{cr} 与 t 和 p_{cr} 与 L 的关系

$R=50$	L 不变	带肋	t/p_{cr}	0.3/108.2	0.4/115.3	0.5/132.5	0.6/147.2
		不带肋		0.3/79.5	0.4/92.3	0.5/101.2	7.6/112.7
	t 不变	带肋	L/p_{cr}	100/128.2	150/75.4	200/59.5	250/55.3
		不带肋		140/42	110/62	95/77	70/110

从表 2 可以看出：理论计算值与试验值是比较符合的。这里值得指出的是：当载荷加到 $>72\text{kg/cm}^2$ 时，明显出现大位移，因而考虑几何非线性的影响对于比较准确估计超屈服时的载荷是很重要的，不仅如此，从扰动后所相应的能量计算以及随之而导出的临界载荷的计算都可看出几何非线性的影响是不可忽略的。文献[6]中的计算结果其所以远大于实际值，除因简化结构粗糙外，还有一个重要原因就是没有考虑几何非线性项的影响。

从表 3 中可以看出：结构带肋与不带肋的临界压力随厚度 t 和随 L 的变化，是符合实际物理规律的，还可看出，肋骨对增强结构的承载能力起着非常重要的作用： L 不变，其增强率一般在 30% 左右。当然，还有一些有意义的实验与计算的研究，例如，肋骨距多大最好，厚度与距离的最佳配合关系等均由条件限制而未能进行。

根据本又方法已编制出一整套便于一般组合结构的强度和稳定计算的程序。

参 考 文 献

- [1] 宋天霞等，双层柱壳组合结构的外层壳板的弹性分析，华中工学院学报，3 (1978)。
- [2] 宋天霞等，双层柱壳组合结构的外层壳板的稳定性，华中工学院学报，4 (1978)。
- [3] 邓可顺，截断斜锥壳在流体外压下的塑性稳定，大连工学院学报，4 (1979)。
- [4] 宋天霞等，球、柱壳组合结构在均布外压下平衡与稳定，华中工学院学报，1 (1985)。
- [5] 宋天霞等，球、柱壳组合结构的应力分析，华中工学院学报，6 (1983)。
- [6] 郑衍双，球、柱壳组合结构的应力与稳定，华中工学院学报，专辑4 (1980)。
- [7] 曾广武等，带肋椭圆柱壳在均布外压下的强度，华中工学院学报，3 (1978)。
- [8] 宋天霞，双层柱壳组合结构的优化分析，固体力学学报，2 (1981)。
- [9] 宋天霞，改进《DFP》变尺度法及其在结构优华中的应用，固体力学学报，4 (1982)。
- [10] von Karmam, T. and H. S. Tsien, The buckling of thin cylindrical shells under axial compression, *J. Aeronaut. Sci.*, 8 (1941), 303—312.
- [11] Kempner, J., Postbuckling behavior of axially compressed circular cylindrical shells, *J. Aeronaut. Sci.*, 21 (1954), 329—335.
- [12] Almroth, B. O., A. B. Burns and E. C. Pittner, Design criteria for axially loaded cylindrical shells, *AIAA/ASME 11th Structures*, Apr. (1970), 173—184.
- [13] Subbiah, J. and R. Nuterajan, Stability analysis of ring-stiffened shells of revolution, *J. of Ship Research*, 26 (1982), 125—134.
- [14] 宋天霞，双层柱壳组合结构的实验应力分析，MD76-0031，华中工学院造船系资料室。
- [15] 谢贻权等，《弹塑性问题的有限元法》，机械工业出版社 (1981)。

Equilibrium and Buckling of Combined Shells under Uniform External Pressure

Song Tian-xia Qin Qing-hua

(Huazhong University of Science and Technology, Wuhan)

Abstract

Nonlinear strain is used to formulate the energy functional of combined structure with several kind of shells. The nonlinear finite element method(N. F. E. M.) is proposed for calculating bending and buckling of the structure subjected to external hydrostatic pressure. The numerical results are found to be in good agreement with experimental ones.