

文章编号: 1000-0887(2004)09-0935-08

基于表面阻抗张量的界面滑移 波动态失稳分析*

李楠¹, 汪越胜¹, 于桂兰²

(1. 北京交通大学 力学所, 北京 100044;

2. 北京交通大学 土建系, 北京 100044)

(我刊原编委张景绘推荐)

摘要: 基于 Stroh 公式和表面阻抗张量理论, 提出了研究界面滑移波动态失稳问题的一种新的方法。该方法将表面阻抗张量概念推广到复波速域, 并将摩擦接触界面上的边界条件以表面阻抗张量表示。最终将边值问题化归为求解一个复多项式在单位圆内的根。以弹性半空间与刚体平面相对稳态摩擦滑移为例进行了详细的分析, 导出了一个 4 次复特征方程并讨论了方程在单位圆内解的特性, 给出了滑移界面波失稳条件的显式解析表达式。

关键词: 摩擦接触; 滑移波; 失稳; Stroh 公式; 表面阻抗张量

中图分类号: O347 **文献标识码:** A

引言

近年来, 摩擦问题中出现的失稳或不适应性成为研究的热点^[1~5]。研究表明, 两个相异弹性体(或弹性与刚性体)稳态相对滑移时, 即使界面摩擦系数是常数, 也会出现动态失稳。这种不稳定性归因于界面滑移波传播失稳性的破失。这一现象在干摩擦断层的滑动中可能起着重要的作用, 因而值得做深入的研究。本文将考查一个弹性半空间和一个刚性平面摩擦滑移时的失稳问题, 文献[3]曾研究过相似的问题。本文的目的有两个: (i) 发展一种基于 Stroh 公式的新方法, 希望该方法进一步用于解决一般各向异性问题; (ii) 给出界面滑移波的显式失稳条件, 而文献[3]的方法较难做到这点。

在研究各向异性弹性固体的界面波问题中, Stroh 方法已得到广泛的发展和应^[6~9]。“表面阻抗张量”这一重要概念的引入, 使得界面波理论的描述一目了然。在本文中, 通过将波速向复数域的扩展, 把“表面阻抗张量”概念用于研究摩擦边界条件下的界面波失稳问题。作为初步分析, 首先考查各向同性的情况。

* 收稿日期: 2002_09_13; 修订日期: 2004_06_08

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(49974007); 国家杰出青年科学基金资助项目(10025211)

作者简介: 李楠(1974—), 男, 河南省郑州市人, 博士(Tel: + 86_10_84920401; Fax: + 86_10_51682094; E-mail: jason_nan_li@yahoo.com.cn);

汪越胜(联系人, Tel: + 86_10_51688417; Fax: + 86_10_51682094; E-mail: yswang@center.njtu.edu.cn)。

1 问题描述

如图 1, 考虑一个均质的各向同性的线弹性半空间和一个刚性平面摩擦接触。定义一个固定的正交参考坐标系 (e_1, e_2, e_3) , 原点在弹性体边界上, e_2 轴的正方向指向面外。刚性平面承受外加均布正应力 σ_0 和切应力 τ_0 , 并以恒定速度 V 向着 e_1 轴的反方向运动。 σ_0/τ_0 的比值等于摩擦系数 f_k 。另外, 我们假设: 1) 恒定滑动速度 V 大于界面上动态扰动速度的绝对值, 这样就不会出现局部黏着; 2) 外加正应力 σ_0 大于界面上扰动应力的幅值, 这样就不会出现局部分离。

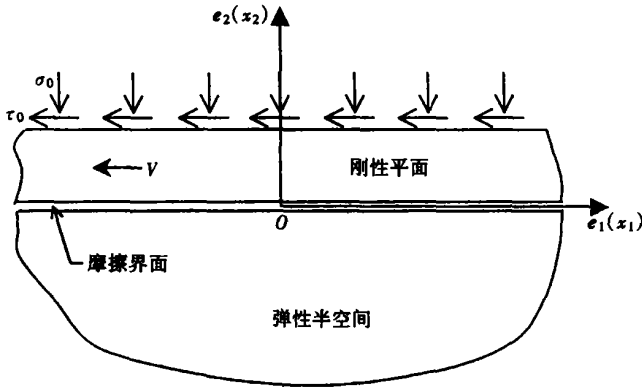


图 1 刚性平面与各向同性弹性半空间稳定摩擦滑动

弹性体内扰动的位移场及其应力场分别用 $u(x, t)$ 和 $\sigma(x, t)$ 表示。考虑到假设 1) 和 2), 则界面 $e_2 \cdot x = 0$ 上的边界条件可以写为

$$u \cdot e_2 = 0, \quad (1)$$

$$(\sigma \cdot e_2) \cdot (e_1 - f_k \cdot e_2) = 0. \quad (2)$$

上述问题将借助 Stroh 公式和表面阻抗张量求解, 以下先简单地介绍一下 Stroh 公式和表面阻抗张量。

2 各向同性介质中复波速域的 Stroh 公式

对于一般各向异性介质, 运动方程为

$$C_{ijkl}u_{k,jl} = \rho \dot{u}_i, \quad (3)$$

其中 C_{ijkl} 为弹性刚度张量, ρ 为介质密度, Stroh^[10] 发现具有如下形式的任一位移场

$$u = A f(e_1 \cdot x + p e_2 \cdot x - vt) \quad (4)$$

是方程(3)的一个可能的解。其中 v 为波速, p 为待定的复数, A 为与 p 有关的极化矢量。注意到解(4)是与 $e_3 \cdot x$ 无关的, 即这个解表示的是 e_1 - e_2 平面内的平面波。将(4)代入(3), 得到

$$\left\{ (e_1 e_1) + p[(e_1 e_2) + (e_2 e_1)] + p^2(e_2 e_2) - \Omega^2 I \right\} A = 0, \quad (5)$$

式中 I 是 3×3 的单位矩阵, 矩阵 (ab) 定义为

$$(ab) = a \cdot C \cdot b \quad (6)$$

可以证明 $(ab) = (ba)^T$, 其中上标 T 代表转置。Stroh 定义了一个 6 维的特征向量:

$$\zeta = (A, L)^T, \quad (7)$$

其中

$$L = - e_2 \cdot C \cdot (e_1 + p e_2) \cdot A = - [(e_2 \cdot C \cdot e_1) + p(e_2 \cdot C \cdot e_2)] \cdot A \quad (8)$$

这样(5)就被化为一个6维的特征值问题

$$N \zeta = p \zeta, \quad (9)$$

其中 N 是一个 6×6 的矩阵:

$$N = - \begin{pmatrix} (e_2 e_2)^{-1} (e_2 e_1) & (e_2 e_2)^{-1} \\ (e_1 e_2) (e_2 e_2)^{-1} (e_2 e_1) - (e_1 e_1) + \rho^2 I & (e_1 e_2) (e_2 e_2)^{-1} \end{pmatrix}. \quad (10)$$

如果波速 v 取0与“极限速度” $\hat{v}^{(6)}$ 之间的实数, N 有三对复共轭特征值 $p_\alpha (\alpha = 1, 2, \dots, 6)$, 并且 $p_\alpha = p_{\alpha+3} (\alpha = 1, 2, 3, \text{上画线表示共轭})$, 其伴随特征向量表示为 $(A_\alpha, L_\alpha)^T$.

如文献[7]中定义如下矩阵:

$$S = - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} [ss]^{-1} [sr] d\varphi, \quad Q = - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} [ss]^{-1} d\varphi \quad (11a, b)$$

其中 $r = e_1 \cos \varphi + e_2 \sin \varphi; s = -e_1 \sin \varphi + e_2 \cos \varphi$, 则

$$[ab] = a \cdot (C - \rho^2 e_1 \otimes I - e_1) \cdot b \quad (12)$$

可以证明 A_α 和 L_α 之间存在着如下线性关系^[6,7]:

$$L_\alpha = -iZ A_\alpha \quad (\text{当 } \text{Im}(p_\alpha) > 0); \quad (13a)$$

$$L_\alpha = iZ^* A_\alpha \quad (\text{当 } \text{Im}(p_\alpha) < 0); \quad (13b)$$

其中 Z 和 Z^* 就是我们所提到的表面阻抗张量, 其定义如下^[6,7]

$$Z = - (Q^{-1} + iQ^{-1}S), \quad Z^* = - (Q^{-1} - iQ^{-1}S). \quad (14a, b)$$

当 v 取0与 \hat{v} 之间的实数时, Z (或 Z^*) 是一个 Hermite 张量, 并且 $Z^* = Z^{[6,7]}$. 该张量在界面波理论中有重要的作用^[7~9].

以上所介绍的 Stroh 公式中, 波速 v 假设为实数. 然而, 我们发现当 v 取一个虚部不为零的复数时, 上述 Stroh 公式依然有效. 这里, N 的6个特征值 p_α 一般不再两两共轭, 但方程(11)所定义的矩阵 S 和 Q 依然成立, 虽然它们是复数矩阵. 按照文献[6]中的推导, 可以证明, 在 v 取一个虚部不为零的复数时, 以下重要结论仍然成立:

$$\int_0^{2\pi} p_\alpha(\varphi) d\varphi = \begin{cases} 2\pi i & (\text{当 } \text{Im}(p_\alpha) > 0), \\ -2\pi i & (\text{当 } \text{Im}(p_\alpha) < 0). \end{cases} \quad (15)$$

因此, 式(13)所描述的 L_α 和 A_α 之间的关系依然成立. 但是, 我们应注意到由(14)所定义的 Z (或 Z^*) 不再是 Hermitian 阵 (因此 $Z^* \neq Z$). 为了验证 Stroh 公式向复波速情况的扩展, 考查一个特殊情况——各向同性弹性材料. 这时有

$$C_{1111} = \lambda + 2\mu, \quad C_{1212} = C_{2121} = \mu, \quad C_{1122} = C_{2211} = C_{1111} - 2C_{1212} = \lambda \quad (16)$$

其它弹性常数为零, λ, μ 是 Lam 常数. S 和 Q 可以由(11a, b)计算得到:

$$S = - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left\{ \left[\frac{v^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi}{c_2^2 - v^2 \sin^2 \varphi} - \frac{v^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi}{c_1^2 - v^2 \sin^2 \varphi} + \frac{c_2^2 \cos^2 \varphi}{c_2^2 - v^2 \sin^2 \varphi} - \frac{(c_1^2 - 2c_2^2) \sin^2 \varphi}{c_1^2 - v^2 \sin^2 \varphi} \right] e_1 \otimes e_2 + \left[\frac{v^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi}{c_2^2 - v^2 \sin^2 \varphi} - \frac{v^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi}{c_1^2 - v^2 \sin^2 \varphi} - \right. \right.$$

$$\left. \frac{c_2^2 \sin^2 \varphi}{c_2^2 - v^2 \sin^2 \varphi} + \frac{(c_1^2 - 2c_2^2) \cos^2 \varphi}{c_1^2 - v^2 \sin^2 \varphi} \right] \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_1 \Big\} d\varphi, \quad (17a)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} = & -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left\{ \left[\frac{\cos^2 \varphi}{\rho(c_2^2 - v^2 \sin^2 \varphi)} + \frac{\sin^2 \varphi}{\rho(c_1^2 - v^2 \sin^2 \varphi)} \right] \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_1 + \right. \\ & \left[\frac{\sin^2 \varphi}{\rho(c_2^2 - v^2 \sin^2 \varphi)} + \frac{\cos^2 \varphi}{\rho(c_1^2 - v^2 \sin^2 \varphi)} \right] \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_2 + \\ & \left. \frac{1}{\rho(c_2^2 - v^2 \sin^2 \varphi)} \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_3 \right\} d\varphi, \quad (17b) \end{aligned}$$

其中 $c_1 = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$, $c_2 = \sqrt{\mu/\rho}$ 计算上式中的积分(详见附录), 得到

$$\begin{aligned} \mathbf{S} = & \left[\frac{z_2}{2} - \frac{z_1}{2} - \frac{c_2^2}{v^2} \frac{2z_2}{z_2 - 1} - \frac{c_1^2 - 2c_2^2}{v^2} \frac{2z_1}{z_1 + 1} \right] \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 + \\ & \left[\frac{z_2}{2} - \frac{z_1}{2} - \frac{c_2^2}{v^2} \frac{2z_2}{z_2 + 1} - \frac{c_1^2 - 2c_2^2}{v^2} \frac{2z_1}{z_1 + 1} \right] \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_1, \quad (18a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} = & -\frac{1}{\rho^2} \left[\frac{2(z_1 + z_2)}{(z_2 - 1)(z_1 + 1)} \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_1 + \frac{2(z_1 + z_2)}{(z_1 - 1)(z_2 + 1)} \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_2 + \right. \\ & \left. \frac{4z_2}{(z_2 - 1)(z_1 + 1)} \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_3 \right], \quad (18b) \end{aligned}$$

其中 $z_j (j = 1, 2)$ 是函数 $g_j(z) = v^2 z^2 + 2(2c_j^2 - v^2)z + v^2$ 在单位圆内的零点, 即有 $|z_j| < 1$.

为了得到 \mathbf{Z} (或 \mathbf{Z}^*), 需要计算 \mathbf{Q}^{-1} 和 $\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{S}$ 的表达式, 结果如下:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}^{-1} = & -\rho^2 \left[\frac{(z_2 - 1)(z_1 + 1)}{2(z_1 + z_2)} \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_1 + \frac{(z_1 - 1)(z_2 + 1)}{2(z_1 + z_2)} \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_2 + \right. \\ & \left. \frac{(z_2 - 1)(z_1 + 1)}{4z_2} \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_3 \right], \quad (19) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{S} = & -\rho^2 \left[\frac{(z_2 - 1)(z_1 + 1)}{2(z_1 + z_2)} \left(\frac{z_2}{2} - \frac{z_1}{2} - \frac{c_2^2}{v^2} \frac{2z_2}{z_2 - 1} - \frac{c_1^2 - 2c_2^2}{v^2} \frac{2z_1}{z_1 + 1} \right) \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 + \right. \\ & \left. \frac{(z_1 - 1)(z_2 + 1)}{2(z_1 + z_2)} \left(\frac{z_2}{2} - \frac{z_1}{2} - \frac{c_2^2}{v^2} \frac{2z_2}{z_2 + 1} - \frac{c_1^2 - 2c_2^2}{v^2} \frac{2z_1}{z_1 - 1} \right) \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_1 \right]. \quad (20) \end{aligned}$$

由(14)可以得到用 z_j 表示的表面阻抗张量 \mathbf{Z} (或 \mathbf{Z}^*)。 z_j 和复波速 v 之间的关系由附录(A6)式给出。 接下来, 将把问题转化为求解关于 z_j 的方程。

3 问题求解

表面波解可表示为下列 Stroh 形式的位移场:

$$\mathbf{u} = \sum_{\alpha=1}^n \mathbf{A}_\alpha E_\alpha \exp[ik(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{x} + p_\alpha \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{x} - vt)], \quad (21)$$

其中 k 为正实数, p_α 的虚部必须为负, 以确保上述位移场能够表示所有振幅随 $\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{x} \rightarrow \infty$ 时按指数衰减的简谐波。 法向为 \mathbf{e}_2 平面上的面力可以写为

$$\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{e}_2 = -ik \sum_{\alpha=1}^n \mathbf{L}_\alpha E_\alpha \exp[ik(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{x} + p_\alpha \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{x} - vt)]. \quad (22)$$

界面 $\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{x} = 0$ 上的位移和面力的幅值为

$$\mathbf{U} = \sum_{\alpha=1}^n \mathbf{A}_\alpha E_\alpha, \quad \mathbf{T} = -ik \sum_{\alpha=1}^n \mathbf{L}_\alpha E_\alpha. \quad (23)$$

由(13)式所给出的 L_a 和 A_a 的关系可知

$$T = kZ^* U \tag{24}$$

由边界条件(1)可知 $U \cdot e_2 = 0$, 即

$$U = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_3, \tag{25}$$

其中 β_1 和 β_2 是未知常数. 由边界条件(2)得

$$[kZ^* \cdot (\beta_1 e_1 + \beta_2 e_3)] \cdot (e_1 - f_k e_2) = 0, \tag{26}$$

再考虑(14b), (19)和(20), 得

$$if_k = \frac{z_2(z_1 + 1)}{z_2^2 - z_1}, \quad |z_j| < 1. \tag{27}$$

联合(27)和(A7), 我们可以得到一个4次方程:

$$az_2^4 + bz_2^3 + cz_2^2 + bz_2 + a = 0, \tag{28}$$

其中

$$\begin{cases} a = k + if_k^{-1}; & b = -(1 + f_k^{-2}) + 2i(2k - 1)f_k^{-1}; \\ c = 2f_k^{-2}(1 - 2k) + 2(1 - k). \end{cases} \tag{29}$$

通过解方程(28)求得 z_2 , 再由

$$z_1 = z_2 \frac{z_2 + if_k^{-1}}{1 - if_k^{-1}z_2} \tag{30}$$

解得 z_1 . 至此, 原问题转化为在单位圆中寻找复系数方程(28)的根. 复波速可以由下式计算得到:

$$v = \pm \frac{2c_2}{\sqrt{2 - (z_2 + z_2^{-1})}} \text{ 或 } v = \pm \frac{2c_1}{\sqrt{2 - (z_1 + z_1^{-1})}}. \tag{31}$$

4 结果和讨论

本节将对方程(28)进行详细的讨论并且给出波速 v 存在的显示判据. 从方程(28)可以发现: 如果 z 是(28)的根, 则 $1/z$ 也是(28)的根. 当 $|z_2| \neq 1$ 时, 我们称 $1/z$ 是根 z 的“伴随根”, 并称一对根 $(z, 1/z)$ 为“伴随根对”. 方程(28)的根只有3种情况: (A) 两对根(即4个根)都在单位圆上, $|z_2| = 1$; (B) 一个根在单位圆内, 它的伴随根在单位圆外, 剩下的一对根在单位圆上; (C) 两个根在单位圆内, 它们的伴随根在单位圆外.

令 $z_2 = e^{i\theta}$, 其中 θ 可以是复数. 于是可将(28)化为

$$2[\operatorname{Re}(a) \cos 2\theta - \operatorname{Im}(a) \sin 2\theta] + 2[\operatorname{Re}(b) \cos \theta - \operatorname{Im}(b) \sin \theta] + c = 0 \tag{32}$$

引入 $x = \sin \theta = (z_2 - z_2^{-1})/2i$, 可进一步将其化为一个实系数4次方程:

$$a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = 0, \tag{33}$$

其中

$$\begin{aligned} a_0 &= 4(k^2 + f_k^{-2}), & a_1 &= 4f_k^{-1}(f_k^{-2} + 4k^2 + 1 - 2k), \\ a_2 &= (f_k^{-2} + 1)^2 + 4k(6f_k^{-2} - 5f_k^{-2} - 1), \\ a_3 &= -8f_k^{-3}(f_k^2 + 2 - 2k), & a_4 &= -4f_k^{-4}(f_k^2 + 1 - k). \end{aligned}$$

相应于情况(A)、(B)或(C), 方程(33)可能有4个实根、两个实根加一对共轭复根或两对共轭复根.

首先, 对于实际的弹性材料, Poisson 比 $\nu = (0, 1/2]$, 因而容易证明由4个根的乘积所得

到的 a_4/a_0 是负数。所以, 方程(33)不可能有两对共轭根, 即情况(C)不可能。情况(A)和(B)则由方程(33)的判别式^[11]:

$$\Delta = 4 \left[\frac{a_2^2}{3} - a_1 a_3 + 4 a_0 a_4 \right]^3 - 27 \left[\frac{2 a_2^3}{27} + a_0 a_3^2 + a_1^2 a_4 - \frac{a_1 a_2 a_3}{3} - \frac{8 a_0 a_2 a_4}{3} \right]^2 \quad (34)$$

来区分。 $\Delta \geq 0$ 时导致情况(A), 反之, $\Delta < 0$ 时导致情况(B)。图 2 显示了在参数 (v, f_k) 平面上的这两种情况。

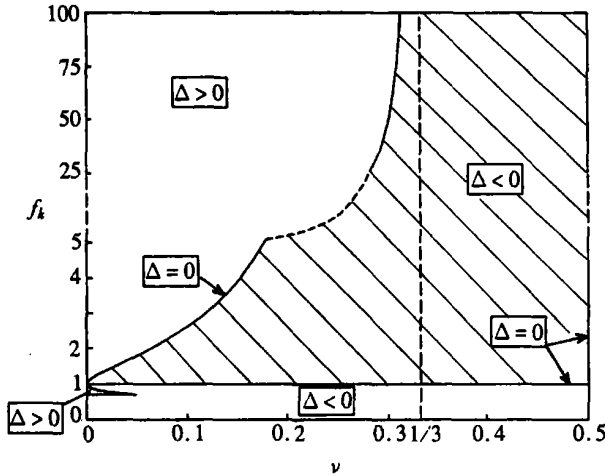


图 2 参数 (v, f_k) 平面上波速 v 存在的区域

其次, 利用(30)来计算 z_1 。数值实验表明, 当摩擦系数 $f_k < 1$ 时, 对于 $|z_2| < 1$, 总有 $|z_1| \geq 1$ 。

根据以上分析, 可得到结论: 当且仅当 $\Delta < 0$ 并且 $f_k > 1$ 时, 方程(30)和(33)在单位圆内有唯一一对根 (z_1, z_2) (即复波速 v 存在), 如图 2 中阴影区域所示。

最后, 我们来考查复波速 v 的实部与虚部之间的关系。为此, 就情况(B)中考虑方程(33)的根与系数的关系:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -a_1/a_0 < 0, \quad (35a)$$

$$x_1 x_2 (x_3 + x_4) + x_3 x_4 (x_1 + x_2) = -a_3/a_0 > 0, \quad (35b)$$

$$x_1 x_2 x_3 x_4 = a_4/a_0 < 0, \quad (35c)$$

其中 x_1, x_2 是(33)的两个实根, x_3, x_4 是(33)的一对共轭复根。由上述关系容易证明: (i) 因为 $x_3 x_4 > 0$, 故有 $x_1 x_2 < 0$; (ii) 无论 $x_1 + x_2$ 正负, $x_3 + x_4 < 0$ (即, $\text{Re}(x_3)$ 或 $\text{Re}(x_4) < 0$) 总成立。由该结果, 能够进一步证明: 当 z_2 是方程(28)的一个不在单位圆上的根时, 必定有 $\text{Im}(z_2) < 0$ 。再根据方程(31), 可以得到结论 $\text{Im}(v) \cdot \text{Re}(v) > 0$ 。也就是说, 沿 e_1 反向(即 V 的方向)传播的滑移波的幅值, 随时间呈指数衰减; 反之, 沿 e_1 正向即(V 的反向)传播的滑移波的幅值, 随时间呈指数增长。这种振幅逐渐增大的界面滑移波将导致自激震荡式的动态失稳, 文献[2, 3]对此做了详细的讨论。值得注意的是, 当这种波引起的局部的动态扰动速度大于稳态滑移速度 V 时, 失稳将导致界面发生黏着——滑移式的运动。这种行为值得做进一步研究。

5 总 结

本文发展了一种新的方法, 用以研究弹性半空间和刚性平面间界面滑移波的动力失稳问

题。这种新方法与 Martins 等学者所使用的方法^[3]完全不同。这种方法建立在 Stroh 公式和表面阻抗张量理论的基础上。而问题本身被转化为寻找复系数多项式在单位圆内的零点问题,并且得到了滑移波失稳条件的显式表达式。这一新方法的优势之一就是可被直接用于解决各向异性问题。

本文中的方法可以被直接推广运用于求解两个相异弹性半空间之间类似的界面滑移波失稳问题。此问题可以化为在单位圆内寻找一个高于 4 次的多项式零点。虽然关于界面滑移波失稳条件的显式表达式可能很难获得,但是可以很容易地用数值计算来研究失稳的特性。

附 录

观察(17a, b)发现,在 S 和 Q 的积分表达中包含了以下四类积分:

$$I_1 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{c_j^2 - v^2 \sin^2 \varphi} d\varphi, \quad I_2 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos^2 \varphi}{c_j^2 - v^2 \sin^2 \varphi} d\varphi,$$

$$I_3 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sin^2 \varphi}{c_j^2 - v^2 \sin^2 \varphi} d\varphi, \quad I_4 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sin^2 \varphi \cos^2 \varphi}{c_j^2 - v^2 \sin^2 \varphi} d\varphi.$$

首先来计算积分 I_1 。利用留数定理,积分 I_1 可以写为

$$I_1 = \oint_{\|z\|=1} \frac{-2idz}{v^2 z^2 + 2(c_j^2 - v^2)z + v^2} = \oint_{\|z\|=1} \frac{-2idz}{g_j(z)} = \oint_{\|z\|=1} f_j(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1} \text{Res}[f_j(z), z_{jk}], \quad (A1)$$

其中 $\text{Res}[\]$ 表示留数; z_{jk} 是函数 $f_j(z)$ 的奇点,即函数 $g_j(z)$ 在单位圆内的零点。函数 $g_j(z)$ 的零点可以表示为

$$z_{j1} = \frac{-1 + \sqrt{1 - v^2/c_j^2}}{1 + \sqrt{1 - v^2/c_j^2}}, \quad z_{j2} = \frac{1 + \sqrt{1 - v^2/c_j^2}}{-1 + \sqrt{1 - v^2/c_j^2}}, \quad (A2)$$

它们之间有关系

$$z_{j1} \times z_{j2} = 1; \quad z_{j1} + z_{j2} = 2[1 - 2(c_j/v)^2]. \quad (A3)$$

由上述可以看出,除非 v 是一个大于等于 c_j 的实数,否则总有一个零点在单位圆内,另一个在单位圆外。在特殊情况下,即 $v \geq c_j$ 时,两个零点将同时落在单位圆上。而当 $0 \leq v < c_2 = \hat{v}$ 或者 v 是一个虚部非零的复数时,总有单位圆内的零点,并用 z_j 来表示($|z_j| < 1$)。因此,得到

$$I_1 = \frac{4\pi}{v^2} \frac{z_j}{z_j^2 - 1}, \quad |z_j| < 1. \quad (A4)$$

用相似方法,可以得到

$$I_2 = \frac{2\pi}{v^2} \frac{z_j}{z_j^2 - 1}; \quad I_3 = \frac{2\pi}{v^2} \frac{z_j}{z_j + 1}; \quad I_4 = -\frac{\pi}{2v^2} z_j, \quad |z_j| < 1. \quad (A5)$$

根据(A2),可得

$$\frac{c_j^2}{v^2} = -\frac{(1 - z_j)^2}{4z_j}, \quad j = 1, 2. \quad (A6)$$

再由上式便可导出关系式:

$$\frac{(1 - z_2)^2 z_1}{(1 - z_1)^2 z_2} = \frac{c_2^2}{c_1^2} = \frac{1 - 2\nu}{2(1 - \nu)} = \kappa, \quad (A7)$$

其中 $\nu \in (0, 1/2]$ 是 Poisson 比。

[参 考 文 献]

- [1] 汪越胜, 于桂兰, 章梓茂, 等. 复杂界面(界面层)条件下的弹性波传播问题研究综述[J]. 力学进展, 2000, 30(3): 378—390.
- [2] Adams G G. Self-excited oscillations of two elastic half-spaces sliding with a constant coefficient of

- friction[J]. ASME Journal of Applied Mechanics, 1995, **62**(4): 867—872.
- [3] Martins J A C, Guimarães J, Faria L O. Dynamic surface solutions in linear elasticity and viscoelasticity with frictional boundary conditions[J]. ASME Journal of Vibration and Acoustics, 1995, **117**(4): 445—451.
- [4] Simões F M F, Martins J A C. Instability and ill-posedness in some friction problems[J]. International Journal of Engineering Science, 1998, **36**(11): 1265—1293.
- [5] Ranjith K, Rice I R. Slip dynamics at an interface between dissimilar materials[J]. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 2001, **49**(2): 341—361.
- [6] Chadwick P, Smith G D. Foundations of the theory of surface waves in anisotropic elastic materials[J]. Advances in Applied Mechanics, 1977, **17**: 303—376.
- [7] Barnett D M, Lothe J. Free surface(Rayleigh) waves in anisotropic elastic half-spaces: the surface impedance method[J]. Proc R Soc Lond, Ser A, 1985, **402**: 135—152.
- [8] Barnett D M, Lothe J, et al. Considerations of existence of interfacial(Stoneley) waves in bonded anisotropic elastic half-spaces[J]. Proc Roy Soc London, Ser A, 1985, **402**: 153—166.
- [9] Barnett D M, Gavazza S D, Lothe J. Slip waves along the interface between two anisotropic elastic half-spaces in sliding contact[J]. Proc Roy Soc London, Ser A, 1988, **415**: 389—419.
- [10] Stroh A N. Steady state problems in anisotropic elasticity[J]. J Math Phys, 1962, **41**(1): 77—103.
- [11] 王竹溪, 郭敦仁. 特殊函数概论[M]. 北京: 北京大学出版社, 2000.

Analysis of Dynamic Instability of Interfacial Slip Waves Based on the Surface Impedance Tensor

LI Nan¹, WANG Yue_sheng¹, YU Gui_lan²

(1. Institute of Engineering Mechanics, Beijing Jiaotong University,
Beijing 100044, P. R. China;

2. Department of Civil Engineering, Beijing Jiaotong University,
Beijing 100044, P. R. China)

Abstract: A new method relying on the Stroh formalism and the theory of the surface impedance tensor was developed to investigate the dynamic instability of interfacial slip waves. The concept of the surface impedance tensor was extended to the case where the wave speed is of a complex value, and the boundary conditions at the frictionally contacting interface were expressed by the surface impedance tensor. Then the boundary value problem was transformed to searching for zeroes of a complex polynomial in the unit circle. As an example, the steady frictional sliding of an elastic half-space in contact with a rigid flat surface was considered in details. A quartic complex characteristic equation was derived and its solution behavior in the unit circle was discussed. An explicit expression for the instability condition of the interfacial slip waves was presented.

Key words: frictional contact; slip wave; instability; Stroh formalism; surface impedance tensor