

有限超空泡机翼的研究*

连 广 昌

(金陵职业大学, 1986年2月2日收到)

摘 要

我们把在机翼上方建立了人为的空泡低压区的机翼称为“空泡机翼”。本文利用推广了的Blasius定理和保角映射,研究了在空泡上方具有喷流的空泡机翼的机翼绕流问题,并给出了机翼的举力和推力公式。

很多文章([1]~[6])就运动引起的二维全空泡或局部空泡水翼进行了研究。这里,我们试图把水翼问题延拓到一般机翼,对在机翼上方建立了人为的空泡低压区的机翼进行了研究。为了叙述的方便,我们暂时把它称做“空泡机翼”。由于物理模型上我们略去了空泡结构的详细分析,并使空泡处于空泡尾流及空泡消失区之前,因而采用了有限超空泡模型,在“整个空泡的空泡压力是均匀的”假设基础上,用调整空泡压力的办法来对实际空泡流动给出合适的描述,因而使问题大为简化。同时,由于一般在分析“附壁射流”时常假定“不考虑低压涡旋区的低压所引起的流速增大”,因此,这里我们作“有限空泡的存在对射流源影响很小”的假定是合理的。由此可见,在上述二假定之下,有限超空泡机翼把射流问题与机翼绕流问题及空泡理论(或自由流理论)结合了起来,因而问题就比较复杂了。

一、有限超空泡机翼的定性分析

有射流源的有限超空泡机翼中空泡的形成可以认为是射流作用的结果:射流排除了环境介质对机翼上方空泡区域的直接作用,在机翼上方空穴处形成低压涡旋区,从而使机翼上、下方产生较大的压力差。因此,关键在于低压涡旋区能否形成,空泡区域中压强的降低是否显著。

我们把空泡机翼的横向分隔成若干区间,这样空穴本身便通过射流与外界环境分隔开来,空泡本身形成了一个封闭区域。

从文献[7]、[8]中知,一般从管道喷出的射流是紊流射流,射流的初始段有一段定速核心气流,而射流主体段压强和周围环境介质的压强相同。由此可见,空穴的低压涡旋区要求处于射流的初始段范围内,否则就可能出现文献[9]提出的反压强,使空泡处的压力降低不够显著。文献[6]讨论了一般情况下有限空泡的各种模型。各种模型表明,有限空泡的空泡

* 钱伟长推荐。

消失点前面是一个具有定速自由流线的低压空泡区域，空泡消失点后面是一个尾流结构，它实际上是一种紊流流动。消失区流动结构的细节对周围介质流动影响不大，因而在一次理论中往往略去了尾流因素。因此，只要空穴的尺度不超过空泡消失点和射流初始段，就有可能使空穴处形成空泡密闭，就可以期望形成显著的低压涡旋区。

有限空泡机翼中，由于不使空泡尾流出现，再加上喷流的反冲力，因此，可以断言，这种机翼的推力和举力必然比一般机翼剖面的推力和举力大大地增加，因而升阻比大为提高。

由于我们这里采用了“空泡压力是均匀的”假设，因此略去了空泡结构本身的精细分析。（一般空泡结构的详细讨论要用文献[5]采用的方法，最后归结到一个积分方程上来进行研究。）实际上正如文献[10]所研究的，低压涡旋区的压力分布和空穴的形状有关，从文献[10]计算出的理论和实验结果上看，低压涡旋区范围内侧壁的压力分布可以有

$$\frac{P_{\infty} - P}{P_K - P_{\infty}} \leq 0.15$$

这里 P_K 为源压， P 为空泡压强。由此可见，只要空泡压强 $P = 0.9P_{\infty}$ 。（对空泡平均而言是可以达到的），射流源的压强 $P_K \geq (5/3)P_{\infty}$ ，就可以使上述不等式成立。从文献[10]知，涡旋区长度和喷嘴宽度之比约为13，对长1m，宽10cm的矩形喷管的喷口，若低压涡旋区的长度取喷口宽度的10倍，只要空泡平均压强比机翼下方降低10%，则这种1m长，1m宽的空泡机翼就可以期望产生一吨的升力。

综上所述，各种迹象表明，只要空泡密闭，射流具有一定的喷射速度，选取适当的空泡尺度，空泡中低压涡旋区必然形成。由于空泡低压区的存在，喷流的反冲力，可以期望有限超空泡机翼获得较大的升力和推力。当然，进一步提高升力，必须深入考虑喷管和空泡形状的选择，这就需要讨论一个最佳值问题。

二、具有喷源的有限超空泡机翼

为了讨论的方便，不失一般性，我们考虑形如图1的儒-查机翼（包括虚线部分）。机翼上部挖去部分形成一个空穴； K_1C 和 K_2D 构成射流喷管； DEF 为一条自由流线，它和机翼壁形成空泡低压区。对这种具有源流的有限超空泡机翼，我们做如下的讨论。

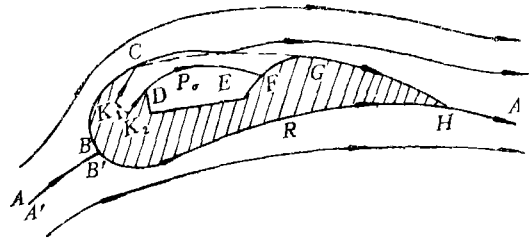


图1 z-平面

1. 基本变换

假设源流 K 处的流体流量是 Q ，源流 K 处的流体流动速度 q_K 及速度势 φ_K 处处相同，因此射流源 K 处可以使用一条等势线使机翼封闭。不失一般性，假设驻点 B （或 B' ）的速度势为零，通过驻点的来流流线 ψ 是不连续的，这点并不影响实际流动在来流流线上的连续性，因此有 W -平面上的图形^[13]。我们把 W -平面的右边看成是多角形的内部，利用希瓦兹-克里斯托夫公式，把多角形内部变换到 W_1 -平面的上半平面，这变换为

$$W = A \int \frac{W_1^2 - 1}{\sqrt{(W_1 - W_{1K1})(W_1 - W_{1K2})}} dW_1 + B$$

$$= A \left(\frac{W_1}{2} + \frac{3(W_{1K_1} + W_{1K_2})}{4} \right) \sqrt{(W_1 - W_{1K_1})(W_1 - W_{1K_2})} + \frac{Q}{\pi} \ln \left(\sqrt{(W_1 - W_{1K_1})} (W_1 - W_{1K_2}) + W_1 - \frac{W_{1K_1} + W_{1K_2}}{2} \right) + B \quad (2.1)$$

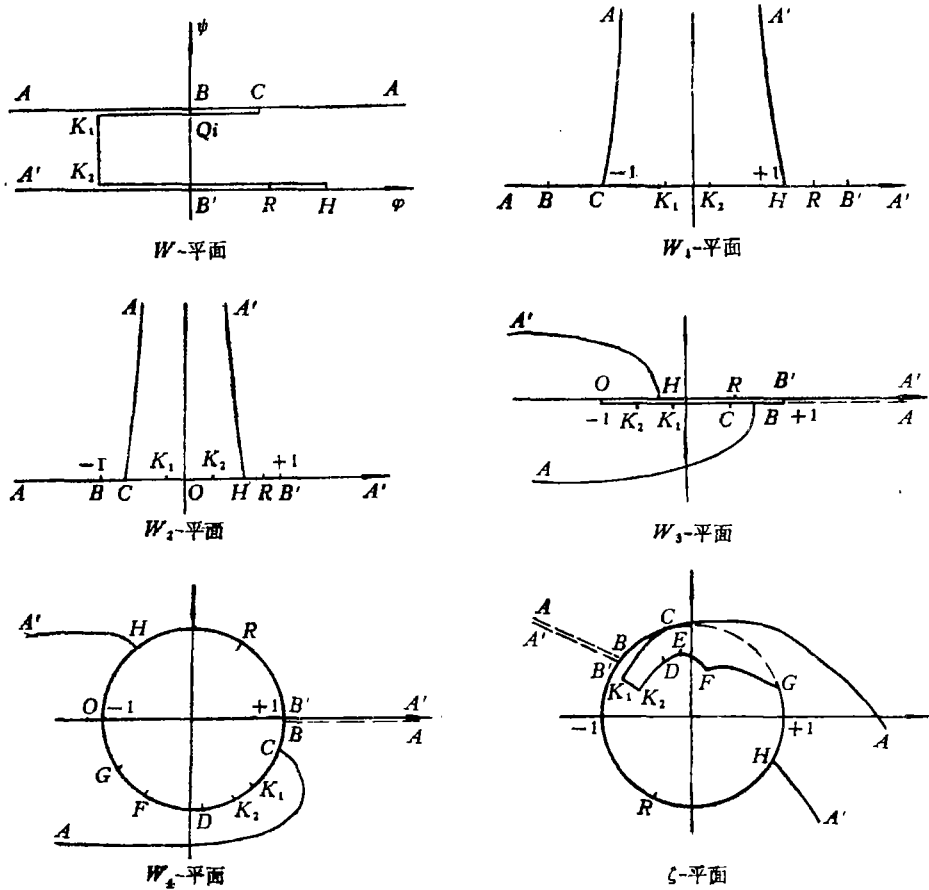


图2 基本变换

这里

$$A = \frac{8Q}{\pi} \frac{1}{3(W_{1K_1})^2 + 2W_{1K_1}W_{1K_2} + 3(W_{1K_2})^2 - 8}$$

$$B = \varphi_K - \frac{Q}{\pi} \ln \frac{W_{1K_2} - W_{1K_1}}{2}$$

对(2.1)式考虑C, H点。由于 $-2 < W_{1K_1} + W_{1K_2} < 2$, 分开实、虚部, 则有 W_{1K_1}, W_{1K_2} 作为 $(\pi/Q)(\varphi_H - \varphi_K)$, $(\pi/Q)(\varphi_O - \varphi_K)$ 的两个方程。同理, 对(2.1)式考虑B, B'点也可以得到 $W_{1B}, W_{1B'}$ 关于 $\pi\varphi_K/Q, W_{1K_1}, W_{1K_2}$ 的两个方程。对这四个方程经过适当的运算, 我们可以得到:

$$\frac{\pi\varphi_O}{Q} = 2\sqrt{(1+W_{1K_1})(1+W_{1K_2})} \frac{3W_{1K_1} + 3W_{1K_2} - 2}{3(W_{1K_1})^2 + 2W_{1K_1}W_{1K_2} + 3(W_{1K_2})^2 - 8}$$

$$\begin{aligned}
& + \ln \left(\frac{W_{1K_1} + W_{1K_2} + 2}{2} - \sqrt{(1 + W_{1K_1})(1 + W_{1K_2})} \right) \\
& - 2\sqrt{(W_{1B} - W_{1K_1})(W_{1B} - W_{1K_2})} \frac{2W_{1B} + 3W_{1K_1} + 3W_{1K_2}}{3(W_{1K_1})^2 + 2W_{1K_1}W_{1K_2} + 3(W_{1K_2})^2 - 8} \\
& - \ln \left(\frac{W_{1K_1} + W_{1K_2}}{2} - W_{1B} - \sqrt{(W_{1B} - W_{1K_1})(W_{1B} - W_{1K_2})} \right) \quad (2.2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\pi\varphi_H}{Q} & = 2\sqrt{(1 - W_{1K_1})(1 - W_{1K_2})} \frac{3W_{1K_1} + 3W_{1K_2} + 2}{3(W_{1K_1})^2 + 2W_{1K_1}W_{1K_2} + 3(W_{1K_2})^2 - 8} \\
& + \ln \left(\sqrt{(1 - W_{1K_1})(1 - W_{1K_2})} - \frac{W_{1K_1} + W_{1K_2} - 2}{2} \right. \\
& \left. - 2\sqrt{(W_{1B} - W_{1K_1})(W_{1B} - W_{1K_2})} \frac{2W_{1B} + 3W_{1K_1} + 3W_{1K_2}}{3(W_{1K_1})^2 + 2W_{1K_1}W_{1K_2} + 3(W_{1K_2})^2 - 8} \right. \\
& \left. - \ln \left(\frac{W_{1K_1} + W_{1K_2}}{2} - W_{1B} - \sqrt{(W_{1B} - W_{1K_1})(W_{1B} - W_{1K_2})} \right) \right) \quad (2.3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\pi\varphi_K}{Q} & = -2\sqrt{(W_{1B} - W_{1K_1})(W_{1B} - W_{1K_2})} \frac{2W_{1B} + 3W_{1K_1} + 3W_{1K_2}}{3(W_{1K_1})^2 + 2W_{1K_1}W_{1K_2} + 3(W_{1K_2})^2 - 8} \\
& - \ln \left(\frac{W_{1K_1} + W_{1K_2}}{2} - W_{1B} - \sqrt{(W_{1B} - W_{1K_1})(W_{1B} - W_{1K_2})} \right) \\
& + \ln \frac{W_{1K_2} - W_{1K_1}}{2} \quad (2.4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 2\sqrt{(W_{1B'} - W_{1K_1})(W_{1B'} - W_{1K_2})} \frac{2W_{1B'} + 3W_{1K_1} + 3W_{1K_2}}{3(W_{1K_1})^2 + 2W_{1K_1}W_{1K_2} + 3(W_{1K_2})^2 - 8} \\
& - 2\sqrt{(W_{1B} - W_{1K_1})(W_{1B} - W_{1K_2})} \frac{2W_{1B} + 3W_{1K_1} + 3W_{1K_2}}{3(W_{1K_1})^2 + 2W_{1K_1}W_{1K_2} + 3(W_{1K_2})^2 - 8} \\
& + \ln \left(\sqrt{(W_{1B'} - W_{1K_1})(W_{1B'} - W_{1K_2})} + W_{1B'} - \frac{W_{1K_1} + W_{1K_2}}{2} \right) \\
& - \ln \left(\frac{W_{1K_1} + W_{1K_2}}{2} - W_{1B} - \sqrt{(W_{1B} - W_{1K_1})(W_{1B} - W_{1K_2})} \right) = 0 \quad (2.5)
\end{aligned}$$

(2.5) 式给出了关于 W_{1B} , $W_{1B'}$, W_{1K_1} , W_{1K_2} 之间的一个函数关系式。从 (2.2), (2.3), (2.4) 式可知, $\pi\varphi_C/Q$, $\pi\varphi_H/Q$, $\pi\varphi_K/Q$ 的值完全为 W_1 -平面上的 W_{1B} (或 $W_{1B'}$), W_{1K_1} , W_{1K_2} 的值所完全决定。

作变换

$$W_2 = \frac{2W_1 - W_{1B} - W_{1B'}}{W_{1B'} - W_{1B}} \quad (2.6)$$

把 B , B' 点分别变到 W_2 -平面上的 (-1) , $(+1)$ 上, W_2 -平面上的 O 点为 W_1 -平面上的 $W_{10} = (W_{1B} + W_{1B'})/2$ 。再作变换

$$W_3 = 2W_2^2 - 1 = 2 \left(\frac{2W_1 - W_{1B} - W_{1B'}}{W_{1B'} - W_{1B}} \right)^2 - 1 \quad (2.7)$$

$$\text{或} \quad W_1 = \frac{W_{1B} + W_{1B'}}{2} + \frac{W_{1B'} - W_{1B}}{2^{\frac{3}{2}}} \sqrt{W_3 + 1} \quad (2.7)'$$

把 W_2 -平面的上半平面变成除裂缝 $(-1, +1)$ 外的 W_3 全平面上。这时 W_3 -平面的 B, B' 点在 $(+1)$ 处重合； O 点变成 (-1) 。 AB 和 $A'B'$ 的完全重合意味着在流动场中通过 AB （或 $A'B'$ ）各物理量是完全连续的。因此，我们可以认为 W_3 -平面是除裂缝 $[-1, +1]$ 外，全平面上各物理量都连续；这裂缝由机翼表面和喷流源处的等势线及空泡部分的自由流线所组成。

作儒柯夫斯基变换

$$W_3 = \frac{1}{2} \left(W_4 + \frac{1}{W_4} \right) \quad (2.8)$$

$$\text{或} \quad W_4 = W_3 + \sqrt{W_3^2 - 1} \quad (2.8)'$$

（这里开方是复数开方，为双值），把 W_3 除裂缝外的全平面变成 W_4 -平面的单位圆外部，这时 AB （或 $A'B'$ ）仍在正实轴上。

综合上述各个变换，(2.7)或可以改写成

$$W_1 = \frac{W_{1B} + W_{1B'}}{2} + \frac{W_{1B'} - W_{1B}}{4} \left(\sqrt{W_4} + \frac{1}{\sqrt{W_4}} \right) \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} \text{或} \quad W_4 = & 2 \left(\frac{2W_1 - W_{1B'} - W_{1B}}{W_{1B'} - W_{1B}} \right)^2 \\ & + \frac{4(2W_1 - W_{1B'} - W_{1B}) \sqrt{(W_1 - W_{1B})(W_1 - W_{1B'})}}{(W_{1B'} - W_{1B})^2} - 1 \end{aligned} \quad (2.9)'$$

从这里可求出 W_4 -平面的 C, D, H, K_1, K_2 点的 Q 值。

从流体力学中知，利用变换

$$z = \frac{c_1}{2} \left(\xi - \xi_0 + \frac{c_2^2}{\xi - \xi_0} \right) \quad (2.10)$$

$$\text{或} \quad \xi = \xi_0 + \frac{z}{c_1} + \frac{\sqrt{z^2 - c_1^2 c_2^2}}{c_1} \quad (2.10)'$$

可以把儒-查机翼剖面变成 ξ -平面上的单位圆¹⁾。这里 c_1, c_2 为正实数， ξ_0 为复常数；对具体的给定机翼而言，这些常数都是已知的。由于空穴和喷管的存在， ξ -平面实际上仍然是一个单位圆缺。为了把 ξ -平面的单位圆缺变成 W_4 -平面的单位圆，我们必须借助于近似圆变成单位圆的近似保角变换。

引入近似保角变换

$$\xi = \exp[i\beta_0] W_4 \left(1 - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 + W_4 \exp[-it]}{1 - W_4 \exp[-it]} \delta(t) dt \right) \quad (2.11)$$

这里 β_0 是实常数，是无空穴时 ξ -平面上 B 点的幅角。 $\xi = r \exp[i\beta]$ ， $r = 1 - \delta(\beta)$ ， $\delta(\beta)$ 为 ξ -平面上的分段连续函数。对具体的给定机翼，除 $\widehat{K_1 K_2}$ ， \widehat{DEF} 段的 $\delta(\beta)$ 待定外，其它各部分的 $\delta(\beta)$ 已知。通过(2.11)式，我们还可以算出 D 点在各平面上的值。

对于机翼剖面的轮廓线，它在 W_4 -平面上表示成单位圆周，令 $W_4 = \exp[i\theta]$ ，(2.11)式便可以写成

1) 对一般机翼剖面，存在有变换 $\xi = f(z)$ ，把机翼剖面变为 ξ -平面上的单位圆。

$$\begin{aligned}\theta &= \beta - \beta_0 + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{ctg} \frac{\theta-t}{2} \delta(t) dt \\ &\approx \beta - \beta_0 + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{ctg} \frac{\beta - \beta_0 - t}{2} \delta(t) dt\end{aligned}\quad (2.12)$$

右边的积分是一个小量，而且很可能是一个反常积分。(2.12)式我们可以从 ξ -平面上 B, C, G, H 等已知点的值求出 W_1 -平面上单位圆周上对应点的值。

对 C, H 两点考虑到(2.9)、(2.12)两式以及一级近似，我们可以得到

$$W_{1B} = \frac{\Psi_1 + \Psi_2 + 2}{\Psi_1 - \Psi_2} \quad (2.13)$$

$$W_{1B'} = \frac{\Psi_1 + \Psi_2 - 2}{\Psi_1 - \Psi_2} \quad (2.14)$$

这里

$$\Psi_1(\beta_0, \beta_C) = \cos(\beta_C - \beta_0) - \frac{1}{2\pi} \sin(\beta_C - \beta_0) \int_0^{2\pi} \operatorname{ctg} \frac{\beta_C - \beta_0 - t}{2} \delta(t) dt$$

$$\Psi_2(\beta_0, \beta_H) = \cos(\beta_H - \beta_0) - \frac{1}{2\pi} \sin(\beta_H - \beta_0) \int_0^{2\pi} \operatorname{ctg} \frac{\beta_H - \beta_0 - t}{2} \delta(t) dt$$

由于 β_C, β_H 已知，考虑到(2.5)式，可以知道 β_0 是 W_{1K_1}, W_{1K_2} 的函数，因而各个转换平面上的量仅仅是未知数 W_{1K_1}, W_{1K_2} 的函数。

对前驻点 B ，从(2.12)式我们可以解得

$$\beta_B \approx \beta_0 + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{ctg} \frac{t}{2} \delta(t) dt \quad (2.15)$$

可见，对空泡机翼而言， β_B 是 β_0 加上空泡修正数而构成的。从(2.15)式可以找出机翼上前驻点 B 的位置。

综上所述，只要 W_{1K_1}, W_{1K_2} 的值确定，各平面间的转换也便完全确定，从而使保角变换封闭。为了确定 W_{1K_1}, W_{1K_2} 的值，我们必须作进一步讨论。

2. 复势

复势的函数关系式 $W = W(W_1)$ 事实上已经从(2.1)、(2.9)式直接得到。为了使物理意义更为明确，我们这里利用希瓦兹公式推导积分形式的复势函数关系式。

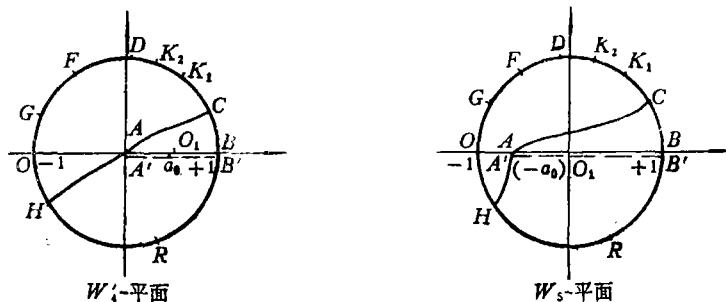


图 3

令

$$W'_4 = \frac{1}{W_4} \quad (2.16a)$$

从而引进 W'_4 -平面。由于 $\varphi_A = \infty$, A 点变成了 W'_4 -平面的坐标原点, 所以必须再作变换

$$W_5 = \frac{W'_4 - a_0}{1 - a_0 W'_4} \quad (2.16)$$

这里 $O_1(a_0, 0)$ 为 AB 上的任意一点, a_0 为待定常数。于是 (2.16) 式又把 A 点变到 $(-a_0, 0)$, 并且用 W_5 的单位圆内部表示了流动区域。

考虑函数 $-iW = \psi - i\varphi$, 利用希瓦兹公式, 用已知的实部值 $\psi(\theta_5)$ 把复势 W 在 W_5 -平面的单位圆内部表示出来, 则有

$$W = \frac{i}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi(t) \frac{\exp[it] + W_5}{\exp[it] - W_5} dt + \varphi(O_1)$$

这里

$\varphi(O_1) = W_{|W_5|=1/a_0}$, $\psi(\theta_5)$ 是分段连续函数,

$$\psi(\theta_5) = \begin{cases} 0, & \text{在 } B'H \text{ 和 } K_2H \text{ 上} \\ \psi_K(\theta_5), & \text{在 } K_1K_2 \text{ 上} \\ Q, & \text{在 } BC \text{ 和 } CK_1 \text{ 上} \end{cases}$$

$$\theta_5 = \arctg \left[-\frac{2a_0 \sin\theta(1 - a_0 \cos\theta)}{1 - 2a_0 \cos\theta + a_0^2 \cos 2\theta} \right] - \theta \quad (2.16)'$$

或

$$\theta = \arctg \left[\frac{2a_0 \sin\theta_5(1 + a_0 \cos\theta_5)}{1 + 2a_0 \cos\theta_5 + a_0^2 \cos 2\theta_5} \right] - \theta_5$$

因而, 希瓦兹公式又可以写成

$$W = -\frac{Q}{\pi} \ln \frac{\exp \left[i \frac{\theta_{5K_1}}{2} \right] (W_5 - 1)}{W_5 - \exp[i\theta_{5K_1}]} + \frac{i}{2\pi} \int_{\theta_{5K_1}}^{\theta_{5K_2}} \psi_K(t) \frac{\exp[it] + W_5}{\exp[it] - W_5} dt + \varphi(O_1) \quad (2.17)$$

由此可见, 复势 W 的分布不仅取决于源流强度 Q , 而且和射流源 K 处的流线分布函数 $\psi_K(\theta_5)$ 有关。对点源喷射, (2.17) 式积分项消失, 复势 W 仅为射流源强度 Q 的函数。

当 W_5 在单位圆周上取值时, (2.17) 式可以写成

$$W = -\frac{Q}{\pi} \ln \frac{\sin(\theta_5/2)}{\sin((\theta_5 - \theta_{5K_1})/2)} - \frac{1}{2\pi} \int_{\theta_{5K_1}}^{\theta_{5K_2}} \psi_K(t) \operatorname{ctg} \frac{\theta_5 - t}{2} dt + \varphi(O_1) \quad (2.17)'$$

(2.17)' 式右边的积分当 θ_5 在射流源 K_1K_2 上取值时, 便成为一个反常积分。

为了在 (2.17) 式和 (2.17)' 式给出 $\psi_K(\theta_5)$, 我们考虑 (2.1)、(2.9) 式便有

$$\psi_K(\theta_5) = \frac{Q}{\pi} \left(b_0 + b_1 \cos \frac{\theta}{2} \right) \sqrt{\left(b_2 + \cos \frac{\theta}{2} \right) \left(b_3 - \cos \frac{\theta}{2} \right)} + \frac{Q}{\pi} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\sqrt{\left(b_2 + \cos \frac{\theta}{2} \right) \left(b_3 - \cos \frac{\theta}{2} \right)}}{b_4 + \cos \frac{\theta}{2}} \quad (2.18)$$

这里

$$\begin{aligned}
 b_0 &= (W_{1B'} - W_{1B}) \frac{W_{1B'} + W_{1B} + 3W_{1K_1} + 3W_{1K_2}}{3(W_{1K_1})^2 + 2W_{1K_1}W_{1K_2} + 3(W_{1K_2})^2} - 8 \\
 b_1 &= \frac{(W_{1B'} - W_{1B})^2}{3(W_{1K_1})^2 + 2W_{1K_1}W_{1K_2} + 3(W_{1K_2})^2} - 8; \quad b_2 = \frac{W_{1B'} + W_{1B} - 2W_{1K_1}}{W_{1B'} - W_{1B}} \\
 b_3 &= \frac{2W_{1K_2} - W_{1B'} - W_{1B}}{W_{1B'} - W_{1B}}; \quad b_4 = \frac{W_{1B'} + W_{1B} - W_{1K_1} - W_{1K_2}}{W_{1B'} - W_{1B}}
 \end{aligned}$$

$b_0 \sim b_4$ 仅仅是 W_{1K_1} 和 W_{1K_2} 的函数。

(2.17) 式和 (2.17)' 式中常数项 $\varphi(O_1)$ 的确定, 可以用 $W_{1O} = (W_{1B} + W_{1B'})/2$ 代入 (2.1) 式, 找出 W -平面上的 O 点值; 再令 $W_6 = -1$, 从 (2.17) 式或 (2.17)' 式决定 $\varphi(O_1)$ 。因而从 (2.1) 式、(2.9) 式又可以找出 a_0 值的大小。

3. 复速度

考虑变量

$$\Omega = \log\left(U \frac{dz}{dW}\right) = \log \frac{U}{q} + i\alpha \tag{2.19}$$

这里 U 是有限空泡自由流线的速度, α 是流体流动方向的倾斜角。射流源 K_1K_2 和自由流线 DEF 上的速度是一个常数, 所以 (2.19) 式 Ω 的实部是一个常数。由于机翼表面的倾斜角 α_0 已知, 这里 α_0 为绕机翼表面顺时针方向运行时的倾斜角度, $0 \leq \alpha_0 < 2\pi$, 所以机翼表面流体流动方向的倾斜角

$$\alpha = \begin{cases} \alpha_0, & \text{对 } BC, K_2D, FH \text{ 段} \\ \alpha_0 - \pi, & \text{对 } CK_1, B'H \text{ 段} \end{cases}$$

因此, 我们可以利用凯尔狄什-谢多夫公式考虑混合边值问题。

考虑变换

$$W_4 = \frac{aW' + 1}{bW' + 1} \tag{2.20}$$

这里

$$a = W_{4E} \frac{W_{4H} - 1}{W_{4H} - W_{4B}}, \quad b = \frac{W_{4H} - 1}{W_{4H} - W_{4B}}$$

E 为自由流线 DF 上的某一特定点。(2.20) 式把 W_4 -平面上的单位圆外部变成 W' -平面的上半平面; B 点 (或 B' 点) 变成 W' -平面的坐标原点, E 点变成无穷远点, H 点变到 (-1) , A 点变到 $(-1/b)$ 。

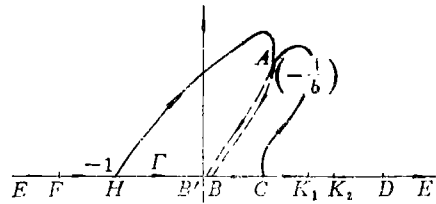


图 4 W' -平面

我们在 W' -平面上对变量 $i\Omega = -a + \log(U/q)$ 考虑混合边值问题。这时混合边值问题所要求的条件完全满足, 因此凯尔狄什-谢多夫公式为

$$\begin{aligned}
 \Omega(W') &= \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{W' - W'_F}{W' - W'_{K_1}}} \sqrt{\frac{W' - W'_{K_2}}{W' - W'_D}} \left[\left(\int_{W'_F}^{W'_{K_1}} + \int_{W'_{K_2}}^{W'_D} \right) \frac{\alpha_0(t)}{t - W'} \right. \\
 &\quad \left. \cdot \sqrt{\frac{t - W'_{K_1}}{t - W'_F}} \sqrt{\frac{t - W'_D}{t - W'_{K_2}}} dt - \pi \left(\int_{W'_F}^0 + \int_{W'_C}^{W'_{K_1}} \right) \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \cdot \sqrt{\frac{t-W'_{K_1}}{t-W'_F}} \sqrt{\frac{t-W'_D}{t-W'_{K_2}}} \frac{dt}{t-W'} - i \log \frac{U}{q_K} \\ & \cdot \left[\int_{W'_{K_1}}^{W'_{K_2}} \sqrt{\frac{t-W'_{K_1}}{t-W'_F}} \sqrt{\frac{t-W'_D}{t-W'_{K_2}}} \frac{dt}{t-W'} + i\alpha_E \pi \right] \end{aligned} \quad (2.21)$$

由于 W'_{K_1} 和 W'_D 两点 $\Omega(W')$ 的有限性, 因此对于 (2.21) 式必须附加两个条件, 这些条件经过适当的运算, 可得到

$$\begin{aligned} & \int_{W'_F}^{W'_{K_1}} \frac{\alpha_0(t) dt}{\sqrt{(W'_{K_1}-t)(W'_{K_2}-t)(t-W'_F)(W'_D-t)}} \\ & - \int_{W'_{K_2}}^{W'_D} \frac{\alpha_0(t) dt}{\sqrt{(t-W'_{K_1})(t-W'_{K_2})(t-W'_F)(W'_D-t)}} \\ & - \pi \int_{W'_H}^0 \frac{dt}{\sqrt{(W'_{K_1}-t)(W'_{K_2}-t)(t-W'_F)(W'_D-t)}} \\ & - \pi \int_{W'_C}^{W'_{K_1}} \frac{dt}{\sqrt{(W'_{K_1}-t)(W'_{K_2}-t)(t-W'_F)(W'_D-t)}} \\ & + \log \frac{U}{q_K} \int_{W'_{K_1}}^{W'_{K_2}} \frac{dt}{\sqrt{(t-W'_{K_1})(W'_{K_2}-t)(t-W'_F)(W'_D-t)}} = 0 \quad (2.22) \\ \alpha_E \pi = & \int_{W'_F}^{W'_{K_1}} \frac{(W'_{K_1}-t)\alpha_0(t) dt}{\sqrt{(W'_{K_1}-t)(W'_{K_2}-t)(t-W'_F)(W'_D-t)}} \\ & + \int_{W'_{K_2}}^{W'_D} \frac{(t-W'_{K_1})\alpha_0(t) dt}{\sqrt{(t-W'_{K_1})(t-W'_{K_2})(t-W'_F)(W'_D-t)}} \\ & - \pi \int_{W'_H}^0 \frac{(W'_{K_1}-t) dt}{\sqrt{(W'_{K_1}-t)(W'_{K_2}-t)(t-W'_F)(W'_D-t)}} \\ & - \pi \int_{W'_C}^{W'_{K_1}} \frac{(W'_{K_1}-t) dt}{\sqrt{(W'_{K_1}-t)(W'_{K_2}-t)(t-W'_F)(W'_D-t)}} \\ & - \log \frac{U}{q_K} \int_{W'_{K_1}}^{W'_{K_2}} \frac{(t-W'_{K_1}) dt}{\sqrt{(t-W'_{K_1})(W'_{K_2}-t)(t-W'_F)(W'_D-t)}} \quad (2.23) \end{aligned}$$

(2.22) 式是 W'_F 关于 W_{4E} 的隐函数关系式; (2.23) 式给出 α_E 作为 W'_F 和 W_{4E} 的函数。只要确定 W_{4E} 的值, 变换 (2.20) 便完全确定。为此, 我们先考虑自由流线方程。

对自由流线 DEF , $\Omega = i\alpha$, 因而从 (2.21) 式我们可以推得

$$\begin{aligned} \alpha(W') = & \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{W'-W'_F}{W'-W'_{K_1}}} \sqrt{\frac{W'-W'_{K_2}}{W'-W'_D}} \left[\int_{W'_F}^{W'_{K_1}} \frac{\alpha_0(t)}{t-W'} \sqrt{\frac{W'_{K_1}-t}{t-W'_F}} \sqrt{\frac{t-W'_D}{t-W'_{K_2}}} dt \right. \\ & + \int_{W'_{K_2}}^{W'_D} \frac{\alpha_0(t)}{t-W'} \sqrt{\frac{t-W'_{K_1}}{t-W'_F}} \sqrt{\frac{W'_D-t}{t-W'_{K_2}}} dt \\ & \left. - \pi \left(\int_{W'_H}^0 + \int_{W'_C}^{W'_{K_1}} \right) \sqrt{\frac{W'_{K_1}-t}{t-W'_F}} \sqrt{\frac{t-W'_D}{t-W'_{K_2}}} \frac{dt}{t-W'} \right] \end{aligned}$$

$$-\log \frac{U}{q_K} \int_{W'_{K_1}}^{W'_{K_2}} \sqrt{\frac{t-W'_{K_1}}{t-W'_F}} \sqrt{\frac{t-W'_D}{t-W'_{K_2}}} \frac{dt}{t-W'} + \alpha_E \pi \quad (2.24)$$

这里 $W'_D \leq W' \leq W'_F$ 。由(2.19)式知, $dW/dz = U \exp[-\Omega]$, 所以自由流是

$$z - z_D = \frac{1}{U} \int_{W_D}^W \exp[i\alpha] dW \quad (2.25)$$

对于小攻角喷管, 或 $\alpha_0|_D$ 较小时, 略去 α 的二阶以上小量, 我们可以得到

$$x - x_D = \frac{1}{U} (W - W_D) - \frac{1}{2U} \int_{W_D}^W \alpha^2 dW, \quad y - y_D = \frac{1}{U} \int_{W_D}^W \alpha dW \quad (2.25)$$

把(2.24)式代入(2.25)'式, 便得到略去二阶以上小量的自由流线方程。

为了确定 W_{4E} 的值, 可以从(2.25)式令 $W = W_E$, $z = z_E$ 给出积分关系式

$$z_E - z_D = \frac{1}{U} \int_{W_D}^{W_E} \exp[i\alpha] dW \quad (2.25a)$$

从(2.25a)式(或(2.25)'式), 结合(2.1)、(2.9)、(2.10)、(2.11)式, 用叠代法可以解出 W_E 的近似值, 再从(2.25a)式(或(2.25)'式)得到 z_E , 从而得到 W_{4E} 的值。

很明显, (2.25)式的函数表达式也给出了射流源 K 处源流的等势线方程。由于 $K_1 K_2$ 的范围很小, α_K 的变化不大, 因此 α_K 可以近似看成是一个常数, 因而 Ω_K 是一个复常数, 所以射流源 K 处等势线方程是

$$z - z_{K_1} = \frac{1}{q_K} \exp[i\alpha_K] (W - W_{K_1}) = \frac{i\psi}{q_K} \exp[i\alpha_K] \quad (0 \leq \psi \leq Q) \quad (2.26)$$

或 $y - y_{K_1} = -\text{ctg} \alpha_K (x - x_{K_1})$

因此等势线近似为一条直线, 特别是对 K_2 点, 有

$$z_{K_2} - z_{K_1} = \frac{Q}{q_K} i \exp[i\alpha_{K_1}]$$

所以

$$\frac{Q}{q_K} = |z_{K_2} - z_{K_1}|$$

从(2.25)'和(2.26)式可以求得 ζ -平面上自由流线 DEF 和射流源 $K_1 K_2$ 处的 $\delta(t)$ 的函数关系式。

对(2.21)式令 $W' = -1/b$, 因此无穷远处的未扰动流有

$$\begin{aligned} \log \frac{U}{q_\infty} + i\alpha_\infty &= \frac{1}{\pi} \sqrt{1+bW'_F} \sqrt{1+bW'_{K_2}} \\ &\cdot \left[\left(\int_{W'_F}^{W'_{K_1}} + \int_{W'_{K_2}}^{W'_D} \right) \frac{b\alpha_0(t)}{1+bt} \sqrt{\frac{t-W'_{K_1}}{t-W'_F}} \sqrt{\frac{t-W'_D}{t-W'_{K_2}}} dt \right. \\ &- \pi b \left(\int_{W'_H}^0 + \int_{W'_C}^{W'_{K_1}} \right) \sqrt{\frac{t-W'_{K_1}}{t-W'_F}} \sqrt{\frac{t-W'_D}{t-W'_{K_2}}} \frac{dt}{1+bt} \\ &\left. - i \log \frac{U}{q_K} \int_{W'_{K_1}}^{W'_{K_2}} \sqrt{\frac{t-W'_{K_1}}{t-W'_F}} \sqrt{\frac{t-W'_D}{t-W'_{K_2}}} \frac{bdt}{1+bt} + i\alpha_E \pi \right] \quad (2.27) \end{aligned}$$

把(2.27)式分成实部和虚部两式, 再考虑到(2.5)、(2.13)、(2.14)式, 可以求出 W_{1K_1} , W_{1K_2} 的值, 从而使问题的参数个数和方程个数相同, 问题便完全封闭。

至于自由流线 DEF 上流体流动速度 U 和射流源 K 的喷流速度 q_K 的确定可以用贝努利方程

$$P_K + \frac{1}{2} q_K^2 = P_\sigma + \frac{1}{2} U^2 = P_\infty + \frac{1}{2} q_\infty^2$$

求得, 因此有

$$\frac{U}{q_\infty} = (1 + \sigma)^{\frac{1}{2}} \quad (2.28)$$

$$\frac{q_K}{q_\infty} = (1 + \sigma')^{\frac{1}{2}} \quad (2.29)$$

这里

$$\sigma = \frac{P_\infty - P_\sigma}{q_\infty^2 / 2}$$

是空穴处的空泡数,

$$\sigma' = \frac{P_\infty - P_K}{q_\infty^2 / 2}$$

P_σ 是空泡底压, P_K 是射流源源压.

可以用人为地略微改变 P_σ 值的办法, 使问题的描述更接近于真实流动.

可以证明, 这种类型的空泡机翼封闭条件将自动满足(见《附录一》).

4. 边界条件的讨论

考虑到角点 C 和分流点 H 在流动角度上的不连续性, 我们有

$$\alpha_0(t_H) |_{B'H} - \pi - \alpha_0(t_H) |_{FH} = \tau_H$$

$$\alpha_0(t_C) |_{K1C} - \pi - \alpha_0(t_C) |_{BC} = \tau_C$$

从(2.19)式可以推得 C, H 两点沿实轴的左右极限之差为

$$\Omega_{H+0} - \Omega_{H-0} = i\tau_H, \quad \Omega_{C+0} - \Omega_{C-0} = i\tau_C \quad (2.30)$$

可以证明, (2.21)式满足边界条件(2.30)式. 为了证明这点, 我们首先引进一个引理.

引理 若 l 是在曲线 L 上具有端点 a, b 的若当曲线段, $\varphi(t) \in H_0$ 类, 则哥西积分

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_l \frac{\varphi(t) dt}{t-z}$$

图 5

在哥西主值意义下有

$$\lim_{z \in l, z \rightarrow b} \Psi(z) - \lim_{z \in L-l, z \rightarrow b} \Psi(z) = -\frac{1}{2} \varphi(b) \quad (2.31)$$

证 $z \in L-l$ 时, $\Psi(z)$ 为连续函数, 有

$$\lim_{z \rightarrow b} \Psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_l \frac{\varphi(t) dt}{t-b}$$

而当 $z \in l$ 时, 有

$$\lim_{z \rightarrow b} \Psi(z) = \frac{1}{2} \varphi(b) + \frac{1}{2\pi i} \int_l \frac{\varphi(t) dt}{t-b}$$

上述两式之差即为(2.31)式. 证毕.

文献[11]中又指出, 若 $\varphi(z) \in H_0$ 类, C 为 l 的内点, 并且是第一类间断点, 则哥西积分可以表示成

$$\Psi(z) = \frac{\varphi(C+0) - \varphi(C-0)}{2\pi i} \log \frac{1}{z-C} + \Psi_0(z) \quad (2.32)$$

这里 $\Psi_0(z)$ 是一个连续函数。

考虑到上述结论和引理, (2.21) 式在实轴上对 H 点取左右极限, 在哥西主值意义下有

$$\begin{aligned} \Omega_{H+0} - \Omega_{H-0} &= -\frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{W'_H - \overline{W'_P}}{W'_H - W'_{K_1}}} \sqrt{\frac{W'_H - W'_{K_2}}{W'_H - \overline{W'_D}}} \\ &\cdot \left[(\tau_H + \pi) \sqrt{\frac{W'_H - W'_{K_1}}{W'_H - \overline{W'_P}}} \sqrt{\frac{W'_H - \overline{W'_D}}{W'_H - W'_{K_2}}} \log(-1) \right. \\ &\left. - \pi^2 i \sqrt{\frac{W'_H - W'_{K_1}}{W'_H - \overline{W'_P}}} \sqrt{\frac{W'_H - \overline{W'_D}}{W'_H - W'_{K_2}}} = i\tau_H \right] \end{aligned}$$

所以(2.30)式 H 点的边界条件满足。同理可证, 对 C 点也满足(2.30)式。由此可知, 凯尔狄什-谢多夫公式(2.21)式在 C, H 点自动满足角点的边界条件。

由于我们有“整个空泡的空泡压力是均匀的”假设, 因此 F 点不能认为是驻点, F 点的边界条件只能是“自由流线在 F 点平滑地与壁相接”。这种假设是合理的, 因为有限空泡模型略去了空泡消失区和尾流结构的精细描述, 它在一级近似下是正确的。实际问题在这种假设下所引起的误差可以用调节空泡压力的办法来给出适当的描述。

5. 无穷远点的精细结构分析

各个转换平面上无穷远点 A 附近的描述可以通过在各个保角变换上取极限得到。在变换(2.1)式中, 令 $W_1 \rightarrow \infty$, 我们可以得到

$$W \approx \frac{A}{2} W_1^2 + \frac{Q}{\pi} \ln(2W_1) + B \quad (2.1)'$$

同理, 在变换(2.9)中, 令 $W_4 \rightarrow \infty$, 也可以得到

$$W_1 \approx \frac{W_{1B'} - W_{1B}}{4} \sqrt{W_4} \quad (2.9)'$$

因此在无穷远点附近我们有

$$W \approx \frac{(W_{1B'} - W_{1B})^2 A}{32} W_4 + \frac{Q}{2\pi} \ln W_4 + \frac{Q}{\pi} \ln \frac{W_{1B'} - W_{1B}}{2} + B$$

在曲线 CA 上, 由于 $W = \varphi + iQ$, $W_4 = \rho \exp[i\theta]$, 因而代入上式, 分开虚、实部, 我们可以得到

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{32Q}{(W_{1B'} - W_{1B})^2 A} \frac{1 - \theta/2\pi}{\sin \theta} \\ \varphi &= Q \frac{1 - \theta/2\pi}{\operatorname{tg} \theta} + \frac{Q}{2\pi} \ln \frac{1 - \theta/2\pi}{-\sin \theta} \\ &\quad + \frac{Q}{2\pi} \ln \frac{-32Q}{(W_{1B'} - W_{1B})^2 A} + \frac{Q}{\pi} \ln \frac{W_{1B'} - W_{1B}}{2} + B \end{aligned}$$

由于 $A < 0$, 所以从第一式得到 $\sin \theta < 0$ 。又因为 $\varphi \rightarrow \infty$, 因此在无穷远附近 $\operatorname{tg} \theta > 0$, $\operatorname{tg} \theta \rightarrow 0$, 因而必然 $\theta \rightarrow \pi + 0$ 。

同理, 在 HA' 曲线上, $W = \varphi$, $W_4 = \rho \exp[i\theta]$, 同样有

$$\rho = \frac{32Q}{(W_{1B'} - W_{1B})^2 A} \frac{-\theta/2\pi}{\sin \theta},$$

$$\varphi = -\frac{Q\theta}{2\pi \operatorname{tg} \theta} + \frac{Q}{2\pi} \ln \frac{\theta}{2\pi \sin \theta}$$

$$+ \frac{Q}{2\pi} \ln \frac{-32Q}{(W_{1B'} - W_{1B})^2 A} + \frac{Q}{\pi} \ln \frac{W_{1B'} - W_{1B}}{2} + B$$

第一式可以得到 $\sin \theta > 0$ 。从 $\varphi \rightarrow +\infty$ ，第二式可以看出在无穷远处附近 $\operatorname{tg} \theta < 0$ ， $\operatorname{tg} \theta \rightarrow 0$ ，因而必然有 $\theta \rightarrow \pi - 0$ 。

综上所述，在 W_4 -平面上曲线 CA 和 HA' 在无穷远点附近的幅角趋近于 π 。从而我们也可以推出图 2 其它平面上无穷远处曲线的性状。

在 (2.20) 式中对 $W_4 \rightarrow \infty$ 时的情形展开，可以得到 W' -平面上无穷远处附近的精细结构状况，我们有

$$W' - \left(-\frac{1}{b}\right) \approx -\frac{(W_{4B} - W_{4H})(W_{4B} - 1)}{W_{4B} - 1} \frac{1}{W_4} \quad (2.20)'$$

由此可见， W' -平面上曲线 BA (或 $B'A$) 在 A 点平滑地分裂成 HA 和 CA 两条支线，因此 W' -平面上的 A 点是一个奇异点。

6. Blasius 定理的推广 举力和推力

为了讨论这里所研究的机翼举力和推力，我们必须首先把 Blasius 定理进行推广。Blasius 定理的推导是对 $\psi = \text{const}$ 进行的；对等势线和等压线的情形，在《附录二》中进行了推广；对 $\varphi = \text{const}$ 时，有

$$X - iY = -\frac{1}{2} i \rho \exp[-i\alpha_\infty] \int_C \frac{dW}{dz} dW \quad (2.33)$$

对 $P = \text{const}$ 时，Blasius 定理可以简化成

$$X - iY = -iP \exp[-i\alpha_\infty] \bar{z} |_0 \quad (2.34)$$

我们现在考虑 W' -平面的上半平面。 W' -平面上的实轴含有自由流线和喷流源的等势线，它们又都是等压线 (射流源 K 处根据假定是等压的)。因此我们在推导举力、推力和升力矩时必须利用 (2.33) 及 (2.34) 式。由 (2.17) 式及 (2.20) 式知

$$dW = \frac{Q}{\pi} \left[\frac{W'_{K_1}}{W'(W' - W'_{K_1})} + \int_{W'_{K_1}}^{W'_{K_2}} \frac{\psi_K(t)}{(t - W')^2} dt \right] dW' \quad (2.35)$$

这里

$$\psi_K(t) = \frac{(W_{1B'} - W_{1B})^2}{4\pi(3(W_{1K_1})^2 + 2W_{1K_1}W_{1K_2} + 3(W_{1K_2})^2 - 8)}$$

$$\cdot \left[\frac{(a+b)t+2}{(at+1)^{\frac{1}{2}}(bt+1)^{\frac{1}{2}}} + \frac{2W_{1B} + 2W_{1B'} + 6W_{1K_1} + 6W_{1K_2}}{W_{1B'} - W_{1B}} \right]$$

$$\cdot \left[\frac{(a+b)t+2}{(at+1)^{\frac{1}{2}}(bt+1)^{\frac{1}{2}}} - \frac{(a+b)W'_{K_1} + 2}{(aW'_{K_1} + 1)^{\frac{1}{2}}(bW'_{K_1} + 1)^{\frac{1}{2}}} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\cdot \left[\frac{(a+b)W'_{K_2} + 2}{(aW'_{K_2} + 1)^{\frac{1}{2}}(bW'_{K_2} + 1)^{\frac{1}{2}}} - \frac{(a+b)t+2}{(at+1)^{\frac{1}{2}}(bt+1)^{\frac{1}{2}}} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$+ \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \left\{ \frac{\left[\frac{(a+b)t+2}{(at+1)^{\frac{1}{2}}(bt+1)^{\frac{1}{2}}} - \frac{(a+b)W'_{k_1}+2}{(aW'_{k_1}+1)^{\frac{1}{2}}(bW'_{k_1}+1)^{\frac{1}{2}}} \right]^{\frac{1}{2}}}{(a+b)t+2 - \frac{(a+b)W'_{k_1}+2}{2(aW'_{k_1}+1)^{\frac{1}{2}}(bW'_{k_1}+1)^{\frac{1}{2}}} - \frac{(a+b)W'_{k_2}+2}{2(aW'_{k_2}+1)^{\frac{1}{2}}(bW'_{k_2}+1)^{\frac{1}{2}}}} \right. \\ \left. \cdot \left[\frac{(a+b)W'_{k_2}+2}{(aW'_{k_2}+1)^{\frac{1}{2}}(bW'_{k_2}+1)^{\frac{1}{2}}} - \frac{(a+b)t+2}{(at+1)^{\frac{1}{2}}(bt+1)^{\frac{1}{2}}} \right]^{\frac{1}{2}} \right\}$$

对于机翼的举力和推力这时有

$$X-iY = \frac{1}{2} i\rho U \exp[-i\alpha_{\infty}] \int_{\Gamma-K_1K_2} \exp[-\Omega(W')] dW \\ - \frac{1}{2} i\rho U \exp[-i\alpha_{\infty}] \int_{K_1K_2} \exp[-\Omega(W')] dW \quad (2.36)$$

Γ 是 W' -平面的实轴。考虑到 K_1K_2 既是等势线，又是等压线； DEF 既是自由流线也是等压线，因此，从(2.34)式我们有

$$X-iY = \frac{1}{2} i\rho U \exp[-i\alpha_{\infty}] \left(\int_{W'_F}^{W'_{K_1}} + \int_{W'_{K_2}}^{W'_D} \right) \exp[-\Omega(W')] dW \\ - iP_{\sigma} \exp[-i\alpha_{\infty}] (\bar{z}_F - \bar{z}_D) - iP_K \exp[-i\alpha_{\infty}] (\bar{z}_{K_2} - \bar{z}_{K_1}) \quad (2.37)$$

由于我们假设了“不考虑低压涡旋区的低压所引起的流速增大”，因此可以认为喷管内部管壁的压力分布对升力和阻力的贡献很小，因而可以忽略不计，因此(2.37)式可以写成

$$X-iY \approx \frac{1}{2} i\rho U \exp[-i\alpha_{\infty}] \int_{W'_F}^{W'_C} \exp[-\Omega(W')] dW \\ - iP_{\sigma} \exp[-i\alpha_{\infty}] (\bar{z}_F - \bar{z}_D) - iP_K \exp[-i\alpha_{\infty}] (\bar{z}_{K_2} - \bar{z}_{K_1}) \\ = \frac{1}{2\pi} i\rho U Q \exp[-i\alpha_{\infty}] W'_{K_1} \int_{W'_F}^{W'_C} \frac{\exp[-\Omega(W')]}{W'(\overline{W'} - W'_{K_1})} dW' \\ - iP_{\sigma} \exp[-i\alpha_{\infty}] (\bar{z}_F - \bar{z}_D) \\ + \frac{1}{2\pi} i\rho U Q \exp[-i\alpha_{\infty}] \int_{W'_{K_1}}^{W'_{K_2}} \psi_K(t) dt \int_{W'_F}^{W'_C} \frac{\exp[-\Omega(W')]}{(W'-t)^2} dW' \\ - iP_K \exp[-i\alpha_{\infty}] (\bar{z}_{K_2} - \bar{z}_{K_1}) \quad (2.37a)$$

(2.37a) 式的第一个积分的被积函数在 $W'=0$ 处是一个幅角具有跳跃的第一类间断点，因而积分区间应该分成两个区间进行积分；第三项是一个已经交换了积分顺序的二重积分。由此可见，(2.37a) 式的第一、二两项给出了空泡低压区的存在对机翼升力和推力的影响，第三、四项给出了喷流的作用对机翼推力和升力影响。显然，在 Z 平面上有两种可能性：

其一： Z_{K_2} 在 Z_{K_1} (或 Z_F 在 Z_D) 的右下方 [见图 6a]，这时， $-iP_K(Z_{K_2} - Z_{K_1})$ (或 $-iP_{\sigma}(Z_F - Z_D)$) 的实部为正值，虚部为负值。因此喷流 (或空泡) 的存在增加了阻力而提高了升力。

其二： Z_{K_2} 在 Z_{K_1} (或 Z_F 在 Z_D) 的右上方 [见图 6b]，这时 $-iP_K(Z_{K_2} - Z_{K_1})$ (或 $-iP_{\sigma}(Z_F - Z_D)$) 的实、虚部都为负数，即喷流 (或空泡) 的存在对机翼既产生了推力，又提高了升力。

由此可见，一般情况下空泡和喷流的存在总是提高了机翼的升力，而且在一定条件下 (Z_{K_2} [或 Z_F] 在 Z_{K_1} [或 Z_D] 的右上方时)，空泡和喷流的存在既可以提高了升力，又对机翼产

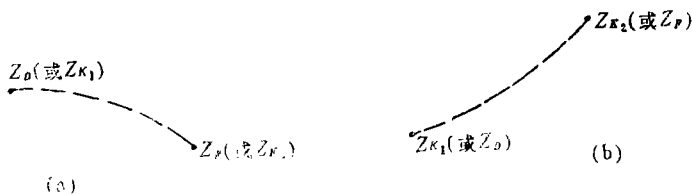


图 6

生了推力。

从(2.10)、(2.11)、(2.20)式我们可以得到 $z=z(W')$ 的表达式, 因此我们又可以得到关于 z -平面上对于坐标原点的上升力矩。

$$\begin{aligned}
 M \approx \operatorname{Re} \left\{ -\frac{1}{2\pi} \rho U Q W'_{K1} \exp[-i\alpha_\infty] \int_{W'_P}^{W'_C} \frac{z(W') \exp[-\Omega(W')]}{W'(W'-W'_{K1})} dW' \right. \\
 + P_\sigma \exp[-i\alpha_\infty] \int_{z_D}^{z_P} z dz - \frac{1}{2\pi} \rho U Q \exp[-i\alpha_\infty] \\
 \cdot \int_{W'_{K1}}^{W'_{K2}} \psi_K(t) dt \int_{W'_P}^{W'_C} \frac{z(W') \exp[-\Omega(W')]}{(W'-t)^2} dW' \\
 \left. + P_K \exp[-i\alpha_\infty] \int_{z_{K1}}^{z_{K2}} z dz \right\} \quad (2.38)
 \end{aligned}$$

这里(2.38)式的第一、二项给出了空泡低压区的存在对上升力矩的影响; 第三、四项给出了喷流的存在对上升力矩的作用。

三、结 束 语

1957年 L. C. Woods 在文献[14]中指出了机翼理论中需要处理的三个问题: 多孔机翼, 机翼上的有限气泡, 机翼中高速气流的喷射。而后者 L. C. Woods 在文献[13]中仅对机翼内部的点源喷射进行了研究。本文则处理了机翼上有空泡、机翼内有高速气流喷射的一般机翼绕流问题, 而且机翼内部的射流源具有任意宽度。

为了在不破坏原机翼(无空穴时)的气动力性能的情况下, 更好地提高升力和推力, 这里还在选取空穴位置和喷管形状的最佳问题, 有待进一步研究。

《附录一》 封闭条件

考虑机翼剖面周线和自由流线及射流源 K 处的等势线组成的闭路 C 所满足的封闭条件:

$$\oint_C dz = 0, \quad \text{即} \quad \oint_C \frac{dz}{d\xi} \frac{d\xi}{dW_4} dW_4 = 0$$

把(2.10)、(2.11)式代入封闭条件, 取一级近似(即 $\delta(t)$ 的一次项), 则封闭条件可以化为

$$\begin{aligned}
 \oint_C \left\{ \frac{c_2^2 \exp[i\beta_0] W_4}{(\exp[i\beta_0] W_4 - \zeta_0)^3} \int_0^{2\pi} \frac{1 + W_4 \exp[-it]}{1 - W_4 \exp[-it]} \delta(t) dt \right. \\
 \left. + \left[1 - \frac{c_2^2}{(\exp[i\beta_0] W_4 - \zeta_0)^2} \right] \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{1 + W_4 \exp[-it]}{1 - W_4 \exp[-it]} \delta(t) dt \right\} dW_4 = 0
 \end{aligned}$$

$$+ \int_0^{2\pi} \frac{W_4 \exp[-it]}{(1 - W_4 \exp[-it])^2} \delta(t) dt \Big] dW_4 = 0$$

交换积分顺序, 先对 W_4 进行积分. 可以证明, 无论 $|\xi_0| \geq 1$, 还是 $|\xi_0| < 1$, 交换积分顺序后都有

$$\int_0^{2\pi} \exp[it] \left[1 - \frac{c^2}{(\exp[i(t+\beta_0)] - \xi_0)^2} \right] \delta(t) dt \oint_C \frac{dW_4}{(W_4 - \exp[it])^2} = 0$$

由于左边对 W_4 积分恒为零, 所以我们可以断言: 对于我们的问题中所考虑的机翼剖面, 机翼剖面的封闭条件自动满足.

《附录二》 Blasius 定理的推广

Blasius 定理是对流线 $\psi = \text{const}$ 的情形推出的. 若闭回路是等势线 $\varphi = \text{const}$ 或等压线 $P = \text{const}$ 的情形, 就必须对 Blasius 定理进行推广.

对于机翼剖面, 一般可以找出下列各式:

$$(1) \quad d(X - iY) = -iPdz; \quad (2) \quad dM = \text{Re}Pzdz; \quad (3) \quad P = A - \frac{1}{2}\rho q^2$$

对闭路积分, 不失一般性, 可以令 $A = 0$, 则

$$P = -\frac{1}{2}\rho q^2 = -\frac{1}{2}\rho \frac{dW}{dz} \frac{d\bar{W}}{dz}$$

(见文献[12]). 对于流线 $\psi = \text{const}$ 的情形, $dW = d\bar{W}$, 因此可以推出 Blasius 定理:

$$d(X - iY) = \frac{1}{2}i\rho \left(\frac{dW}{dz} \right)^2 dz; \quad dM = \text{Re} \left[-\frac{1}{2}\rho z \left(\frac{dW}{dz} \right)^2 dz \right] \quad (\text{I})$$

下面我们进行推广, 讨论等势线和等压线的情形.

(1) 回路上 $\varphi = \text{const}$ 时的情形. 这时有 $dW = -d\bar{W}$, 因此, 对应于 (I) 式, 我们有

$$d(X - iY) = -\frac{1}{2}i\rho \left(\frac{dW}{dz} \right)^2 dz; \quad dM = \text{Re} \left[\frac{1}{2}\rho z \left(\frac{dW}{dz} \right)^2 dz \right] \quad (\text{II})$$

(2) 回路上 $P = \text{const}$ 时的情形. 这时直接有

$$d(X - iY) = -iPdz; \quad dM = P \text{Re}(zdz) \quad (\text{III})$$

对 $P = \text{const}$ 的封闭回路, 有 $X - iY = 0$; 只有当回路不封闭时, 等压线对举力和推力才有贡献. 等压线的情形也包括自由流线的情形, 因此 (III) 式对空泡边界的自由流线段也成立.

(3) 当封闭回路分别由上述各种情形的曲线段所组成时, (I), (II), (III) 式分别在对应的线段上成立.

参 考 文 献

- [1] Wu, T. Yao-Tsu, The free streamline theory of two-dimensional fully cavitating hydrofoil, *J. Math. and Phys.*, **35**, 3, Oct. (1956), 236—265.
- [2] Wu, T. Yao-Tsu and D. P. Wang, An approximate numerical scheme for the theory of cavity flows past obstacles of arbitrary profile, *Transactions of the ASME*, series D, *Journal of Basic Engineering*, **86**, 3, Sept. (1964), 556—560.
- [3] Wu, T. Yao-Tsu and D. P. Wang, A wake model for free streamline flow theory, Part 2, Cavity flows past obstacle of arbitrary profile, *J. Fluid Mech.*, **18**, 1, Jan. (1964).
- [4] Larock, Bruce E. and Robert L. Street, A nonlinear theory for a full cavitating hydrofoil in a transverse gravity field, *J. Fluid Mech.*, **29**, 2 (1967), 317—336.
- [5] Красовский Ю. П., Mathematical problem of hydrodynamics with free boundary, *ПМТФ*, 4 (1963), 3—16.
- [6] Tulin, M. P., Supercavitating flows—small perturbation theory, *J. Ship Research*, **7**, 3 (1964), 16—37.
- [7] 阿勃拉莫维奇, 《实用气体动力学》, Ch. 6, §4, 高等教育出版社 (1955).
- [8] 赵学端, 《水力学及空气动力学》, 上海科学技术出版社 (1959).
- [9] Macagno, Enzo O. and Tin Han Hung, Computational and experimental study of a captive annular eddy, *J. Fluid Mech.*, **28**, 2 (1967), 43—64.
- [10] 科技参考, 射流技术, 附壁射流, 2 (1973).
- [11] Бекья Н. П., 《奇异积分方程组及某些边值问题》, Ch. 2, §12, 上海科学技术出版社 (1963).
- [12] Milne-Thomson, L. M., *Theoretical Hydrodynamics*, London, Macmillan Co. (1960), 168.
- [13] Woods, L. C., On the theory of source flow from aerofoils, *Q. J. Mech. and Appl. Math.*, **9**, Dec. (1956), 441—456.
- [14] Woods, L. C., Generalized aerofoil theory, *Proc. Roy. Soc. A.*, **238**, 1214 (1957).

The Studies of Finite Supercavitating Airfoil

Lian Guang-chang

(The Jinling Vocational College, Nanjing)

Abstract

An aerofoil above which is built the artificial cavity low pressure region is called "cavitating airfoil". By using generalised Blasius's theorem and conformal transformation, this paper investigates the problem of the flow past the aerofoil of cavitating airfoil with the jetstream above cavitation, and gives the formulae of the lift and thrust.