

# 地下水在粘弹性含水层系中 不定常渗流

刘 慈 群

(中国科学院兰州渗流力学研究室, 1985年5月24日收到)

## 摘 要

本文研究了地下水在粘弹性含水层系中不定常渗流动态。在前人工作的基础上导出了新的微分-积分方程组。已知的微分方程组是它的特殊情况。新的线性微分-积分方程组描写了弱压缩流体在粘弹性含水层系中流动。

用Laplace变换的方法求得了微分-积分方程组的解析解。粘弹性增加了含水层系的非均质性, 即具有延迟和补给的性质。数值反演解和解析解符合得较好。它们给出了地下水在这种非均质含水层系中水位变化动态。

1964年, 1973年文[1,2]相继用平均值法研究了有限封闭含水层系层间干扰问题和越流问题。无疑, 这对地下水资源评价和地面沉降的预测等, 是有理论和实际意义的。1969年Neuman等系统地研究了无限含水层系中越流问题, 给出了数学模型、解析解和分析<sup>[3]</sup>。1982年陈钟祥等在更一般的提法下求得了有限封闭含水层系越流问题的精确解<sup>[4]</sup>。1976年Brutsaert等研究了地下水在粘弹性含水层中不定常渗流问题<sup>[5]</sup>, 并给出了近似解。考虑到有些含水层(例如含有粘土质砂土层)具有粘弹性性质, 因此研究地下水在具有粘弹性含水层系中不定常渗流, 显然是有意义的。本文在文[3,5]基础上推广了粘弹性含水层系渗流数学模型, 给出了其解析解、Laplace变换数值反演解以及近似解。据此, 可以预测分析各层水位随空间和时间的变化以及地面沉降等有工程意义的量。

## 一、数 学 模 型

设非均质双层孔隙介质由粘弹性含水层和粘弹性弱透水层所组成, 如图1所示。

设完整井将含水层钻开, 用定流量 $Q_0$ 生产, 这时在含水层中引起水平方向水头下降。从而导致弱透水层中水头下降和越流补给含水层。

根据文[3, 5], 弱压缩液体在粘弹性弱透水层中遵循下述纵向流动线性微分-积分方程

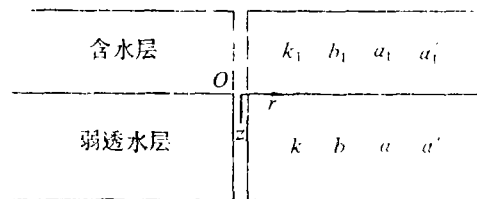


图 1

$$\frac{\partial^2 s}{\partial z^2} = \frac{1}{x} \frac{\partial s}{\partial t} + \frac{c}{x'} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t s(r, z, \tau) \exp[-c(t-\tau)] d\tau \quad (1.1)$$

考虑到含水层渗透性远大于弱透水层, 在粘弹性含水层中水头降遵循下述径向流动微分-积分方程

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial s_1}{\partial r} \right) + \frac{k}{T_1} \frac{\partial s}{\partial z} \Big|_{z=0} = \frac{1}{x_1} \frac{\partial s_1}{\partial t} \\ + \frac{c'_1}{x'_1} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t s_1(r, \tau) \exp[-c_1(t-\tau)] d\tau \end{aligned} \quad (1.2)$$

无穷小半径井在无限含水层系中边值和连结条件是

$$s(r, z, 0) = 0 \quad (1.3)$$

$$s_1(r, 0) = 0 \quad (1.4)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left( r \frac{\partial s_1}{\partial r} \right) = - \frac{Q_0}{2\pi T_1} \quad (1.5)$$

$$s(\infty, z, t) = s_1(\infty, t) = 0 \quad (1.6)$$

$$s(r, 0, t) = s_1(r, t) \quad (1.7)$$

$$s(r, b, t) = 0 \quad (1.8a)$$

或者  $(\partial s / \partial z) |_{z=b} = 0 \quad (1.8b)$

式中:

$$x = \frac{k}{\gamma_w(n\beta + \alpha)}; \quad x' = \frac{k}{\gamma_w \cdot \alpha'}; \quad c = \frac{1}{\alpha' \eta}$$

$s$  是水头降深;  $\alpha$ ,  $\alpha'$  分别是粘弹性土主、次固结的压缩系数;  $\eta$  是土的粘性系数;  $\beta$  是液体的压缩系数;  $\gamma_w$  是液体的重率;  $n$  是介质的孔隙度;  $k$  是介质的渗透系数;  $b$  是介质的厚度;  $T = kb$  是输水系数; 足标 1 表抽水含水层的量; 无足标表弱透水层的量

式 (1.8a) 表等水头的条件, 式 (1.8b) 表不渗透边界条件。

式 (1.1)~(1.8) 组成双层粘弹性系统越流问题的数学模型。类似地可推广到多层的情况。

当  $c = c_1 = 0$  时, 式 (1.1)~(1.8) 简化为已知的双层弹性系统越流问题的数学模型<sup>[2,3]</sup>。

当  $k = 0$  时, 式 (1.2) 简化为已知的均质粘弹性含水层的情形<sup>[5]</sup>。

当  $c_1 = 0$ ,  $c \neq 0$ , 时, 式 (1.1)~(1.8) 简化为抽水含水层是弹性的, 弱渗透层是粘弹性的情形。

总之, 式 (1.1)~(1.8) 概括和发展了地下水在双层含水层系中渗流的数学模型。

记  $\bar{r} = r/L$ ,  $\bar{z} = z/L$ ,  $\bar{t} = x_1 t/L^2$

$$\bar{s} = 2\pi T_1 s / Q_0, \quad \lambda = cL^2/x_1$$

式中:  $L$  为特征长度 (井半径  $r_w$  或封闭边界半径  $r_e$  均可作特征长度)。

则式 (1.1)~(1.8) 化为无因次形式

$$\frac{\partial^2 \bar{s}}{\partial \bar{z}^2} = \frac{x_1}{x} \frac{\partial \bar{s}}{\partial \bar{t}} + \lambda \frac{x_1}{x'} \frac{\partial}{\partial \bar{t}} \int_0^{\bar{t}} \bar{s}(\bar{r}, \bar{z}, \tau) \exp[-\lambda(\bar{t}-\tau)] d\tau \quad (1.9)$$

$$\frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left( \bar{r} \frac{\partial \bar{s}_1}{\partial \bar{r}} \right) + \frac{k}{k_1} \frac{1}{b_1} \frac{\partial \bar{s}}{\partial \bar{z}} \Big|_{\bar{z}=0} = \frac{\partial \bar{s}_1}{\partial \bar{t}} +$$

$$+ \lambda_1 \frac{x_1}{x_1'} \frac{\partial}{\partial \bar{t}} \int_0^{\bar{t}} \bar{s}_1(\bar{r}, \tau) \cdot \exp[-\lambda_1(\bar{t} - \tau)] d\tau \quad (1.10)$$

$$\bar{s}(\bar{r}, \bar{z}, 0) = 0 \quad (1.11)$$

$$\bar{s}_1(\bar{r}, 0) = 0 \quad (1.12)$$

$$\lim_{\bar{r} \rightarrow 0} \left( \bar{r} \frac{\partial \bar{s}_1}{\partial \bar{r}} \right) = -1 \quad (1.13)$$

$$\bar{s}(\infty, \bar{z}, \bar{t}) = \bar{s}_1(\infty, \bar{t}) = 0 \quad (1.14)$$

$$\bar{s}(\bar{r}, 0, \bar{t}) = \bar{s}_1(\bar{r}, \bar{t}) \quad (1.15)$$

$$\bar{s}(\bar{r}, \bar{b}, \bar{t}) = 0 \quad (1.16a)$$

或者

$$(\partial \bar{s} / \partial \bar{z})|_{\bar{z}=\bar{b}} = 0 \quad (1.16b)$$

## 二、解析解和讨论

我们用Laplace变换解问题(1.9)~(1.16)。考虑到初始条件(1.11), (1.12); 上述问题的Laplace变换式为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \bar{z}^2} = \frac{x_1}{x_1'} pu + \lambda \frac{x_1}{x_1'} p \frac{u}{p + \lambda} = \xi^2(p)u \quad (2.1)$$

$$\frac{1}{\bar{r}} \frac{d}{d\bar{r}} \left( \bar{r} \frac{du_1}{d\bar{r}} \right) + \frac{k}{k_1} \frac{1}{\bar{b}} \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} \Big|_{\bar{z}=0} = pu_1 + \lambda_1 \frac{x_1}{x_1'} \frac{p}{p + \lambda_1} u_1 = \xi_1^2(p)u_1 \quad (2.2)$$

$$\lim_{\bar{r} \rightarrow 0} \left( \bar{r} \frac{du_1}{d\bar{r}} \right) = -\frac{1}{p} \quad (2.3)$$

$$u(\infty, \bar{z}, p) = 0 \quad (2.4)$$

$$u_1(\infty, p) = 0 \quad (2.5)$$

$$u(\bar{r}, 0, p) = u_1(\bar{r}, p) \quad (2.6)$$

$$u(\bar{r}, \bar{b}, p) = 0 \quad (2.7a)$$

或

$$(\partial u / \partial \bar{z})|_{\bar{z}=\bar{b}} = 0 \quad (2.7b)$$

式中

$$u = \int_0^{\infty} \bar{s} \cdot \exp[-p\bar{t}] d\bar{t}$$

考虑到条件(2.4)~(2.7), 常微分方程式(2.1)的解是

$$u(\bar{r}, \bar{z}, p) = u_1(\bar{r}, p) \operatorname{sh} \xi(\bar{b} - \bar{z}) / \operatorname{sh} \xi \bar{b} \quad (2.8a)$$

或者

$$u(\bar{r}, \bar{z}, p) = u_1(\bar{r}, p) \operatorname{ch} \xi(\bar{b} - \bar{z}) / \operatorname{ch} \xi \bar{b} \quad (2.8b)$$

式中:  $\operatorname{sh}(\cdot)$ ,  $\operatorname{ch}(\cdot)$ 分别是双曲正弦和双曲余弦函数。

将式(2.8)代入式(2.2), 考虑到条件(2.3), 得常微分方程式(2.2)的解为

$$u_1(\bar{r}, p) = \frac{1}{p} K_0(\psi(p)\bar{r}) \quad (2.9)$$

$$\psi(p) = \left[ \xi_1^2 + \frac{k}{k_1} \frac{\xi}{\bar{b}_1} \cdot \operatorname{cth} \xi \bar{b} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.10a)$$

或者

$$\psi(p) = \left[ \xi_1^2 + \frac{k}{k_1} \frac{\xi}{\bar{b}_1} \cdot \operatorname{th} \xi \bar{b} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.10b)$$

式中:  $K_0(\cdot)$  为零阶变形第二类贝塞尔函数;  $\text{th}(\cdot)$ ,  $\text{cth}(\cdot)$  分别为双曲正切和双曲余切函数.

已知恒等式

$$K_0(\psi(p)\bar{r}) = \int_0^\infty \frac{\rho J_0(\rho\bar{r})}{\psi^2(p) + \rho^2} d\rho \quad (2.11)$$

式中:  $J_0(\cdot)$  是零阶第一类贝塞尔函数.

将式(2.11)代入式(2.9)得水位降深的Laplace变换映象函数

$$u_1(\bar{r}, p) = \frac{1}{p} \int_0^\infty \frac{\rho \cdot J_0(\rho\bar{r})}{\psi^2(p) + \rho^2} d\rho \quad (2.12)$$

根据Laplace变换反演定理, 从上式得抽水含水层中水位降深函数

$$s_1(\bar{r}, \bar{t}) = \int_0^\infty q(\rho, \bar{t}) \cdot \rho \cdot J_0(\rho\bar{r}) d\rho \quad (2.13a)$$

$$q(\rho, \bar{t}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\tau-i\infty}^{\tau+i\infty} \frac{\exp[p\bar{t}]-1}{p} \cdot \frac{dp}{\psi^2(p) + \rho^2} \quad (2.13b)$$

函数 $\psi^2(p)$ 是广义多项式之比, 式(2.13b)的线积分等于函数

$$f(p) = 1/(\psi^2(p) + \rho^2) \quad (2.14)$$

的极点的留数的 $2\pi i$ 倍.

令式(2.14)中分母等于零, 得求极点方程

$$\psi^2(p) + \rho^2 = 0 \quad (2.15)$$

式(2.15)一般有几个大小不同的负根 $-\sigma_i^2$  ( $\sigma_1 < \sigma_2 < \dots < \sigma_n$ ), 从而得

$$q(\rho, \bar{t}) = \sum_{i=1}^n \frac{1 - \exp[-\sigma_i^2 \bar{t}]}{\sigma_i^2 \cdot \psi^2(\sigma_i)} \quad (2.16)$$

式中:  $\psi^2(\sigma_i) = \left. \frac{d\psi^2}{dp} \right|_{p=-\sigma_i^2}$

1. 当 $k=0$ 时, 式(2.15)简化为均质粘弹性含水层的情形<sup>[5]</sup>:

$$p \left( 1 + \frac{\lambda_1 x_1 / x_1'}{p + \lambda_1} \right) + \rho^2 = 0 \quad (2.15)'$$

其极点是二次方程的二个根

$$\sigma_i^2 = \frac{a_1 + (-1)^i \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2}$$

式中:  $a_1 = \left( 1 + \frac{x_1}{x_1'} \right) \lambda_1 + \rho^2$ ,  $a_2 = \lambda_1 \rho^2$

式(2.16)中  $\psi^2 = 1 + \frac{\lambda_1 x_1 / x_1'}{\lambda_1 - \sigma_i^2} + \frac{\lambda_1 x_1 / x_1' \sigma_i^2}{(\lambda_1 - \sigma_i^2)^2}$

2. 当 $\lambda = \lambda_1 = 0$ 时, 式(2.15)简化为双层弹性含水层的情形<sup>[3]</sup>:

$$p + \frac{k}{k_1 \bar{b}_1} \sqrt{\frac{x_1}{x}} p \cdot \text{cth} \left( \sqrt{\frac{x_1}{x}} p \bar{b} \right) + \rho^2 = 0 \quad (2.15)''$$

其极点是下述超越方程无穷多个根

$$\frac{k}{k_1 \bar{b}_1} \sqrt{\frac{x_1}{x}} \sigma_i \text{ctg} \left( \sqrt{\frac{x_1}{x}} \sigma_i \bar{b} \right) = \sigma_i^2 - \rho^2$$

式(2.16)中  $\psi^2 = 1 - \frac{1}{2} \frac{k}{k_1 \bar{b}_1} \sqrt{\frac{x_1}{x}} \frac{1}{\sigma_i \bar{b}} \operatorname{cth} \left( \sqrt{\frac{x_1}{x}} \sigma_i \bar{b} \right) + \frac{1}{2} \frac{k \bar{b}}{k_1 \bar{b}_1} \operatorname{csch}^2 \left( \sqrt{\frac{x_1}{x}} \sigma_i \bar{b} \right)$

3. 当  $\xi \rightarrow 0$  时, 从式(2.10a)知式(2.15)简化为有越流粘弹性含水层的情形<sup>[6]</sup>:

$$p \left( 1 + \frac{\lambda_1 x_1 / x_1'}{p + \lambda_1} \right) + \frac{k}{k_1 \bar{b}_1 \bar{b}} + \rho^2 = 0 \tag{2.15}''''$$

当  $p \rightarrow 0$  时, 从式(3.15)'''得稳定解

$$\bar{s}_i(\bar{r}) = \int_0^\infty \frac{\rho \cdot J_0(\rho \bar{r})}{\rho^2 + \frac{k}{k_1 \bar{b}_1 \bar{b}}} d\rho = K_0 \left( \sqrt{\frac{k}{k_1 \bar{b}_1 \bar{b}}} \bar{r} \right) \tag{2.17}$$

在稳定流情况下, 含水层的粘弹性影响已经消失. 理应如此.

### 三、对比计算

下面用本文获得的解析解式(2.13)~(2.16), 式(2.8)~(2.9)的Laplace变换数值反演解<sup>[7]</sup>, 以及近似解

$$\bar{s}(\bar{r}, \bar{t}) \approx pu |_{z=1/2z} \tag{3.1}$$

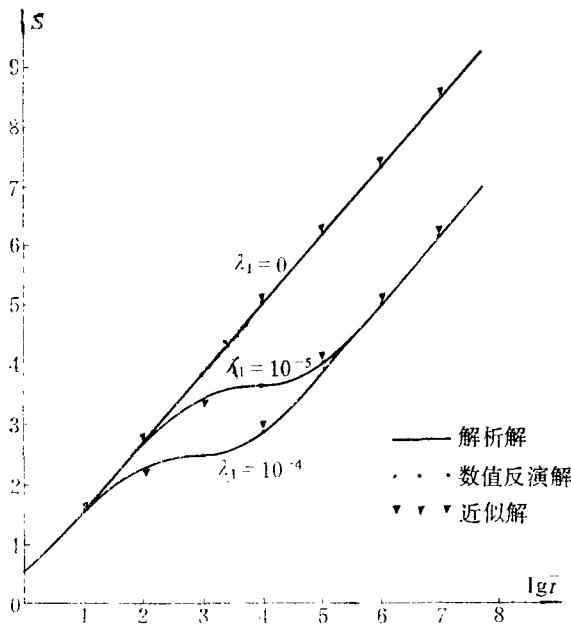


图2 在粘弹性含水层中水位降深与时间的关系

对粘弹性含水层 ( $x_1/x_1' = 10^2$ ,  $k=0$ ) 和粘弹性二层含水层系 ( $x_1/x_1' = x/x' = 10^2$ ,  $k/k_1 \bar{b}_1 = 10^{-4}$ ) 进行计算, 井中无因次水位变化如图2、图3所示

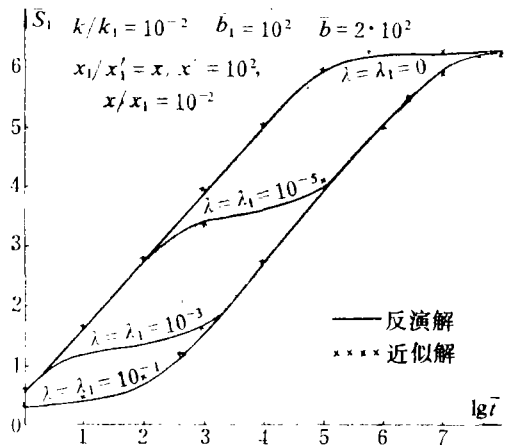


图3 在粘弹性含水层系中水位降深与时间关系

数值反演解、近似解与解析解的结果符合得较好. 粘弹性的影响 ( $\lambda \neq 0$ ) 使水位变化有平缓段出现, 它类似双重介质或有滞后重力排水的情形. 弱渗透含水层的影响使井中水位后期下降得缓慢一些.

### 四、小结

1. 本文求得了粘弹性二层含水层系地下水不定常渗流的解析解. 用类似的方法可以推

广到多层含水层系的情形。

2. 粘弹性二层含水层系Laplace变换数值反演解、近似解与解析解的结果符合得较好。因此,对更复杂的多层含水层系的情形,可直接用数值反演解或近似解进行工程计算。

3. 含水层粘弹性性质类似双重介质或有滞后的重力排水的作用。了解了各层的水位变化规律,很容易计算各层的沉降量。

### 参 考 文 献

- [ 1 ] 刘慈群, 具有弱渗透夹层的有限封闭油层中不定常渗流, 中国科学院兰州地质研究所流力学集刊 (1964)。
- [ 2 ] 刘慈群, 饱水土层的一维压密问题, 力学学报, 3 (1977), 191—194。
- [ 3 ] Neuman, S. P. and P. A. Witherspoon, Theory of flow in a confined two-aquifer System, *Water Resource Res.*, 5, 4 (1969), 803—816。
- [ 4 ] 陈钟祥等, 有限封闭含水层系越流问题的精确解, 力学学报, 2 (1982), 129—143。
- [ 5 ] Brutsaert, W. et al, Pumping of aquifer with viscoelastic properties, 102, Hy11 (1976), 1663—1676。
- [ 6 ] Corapcioglu, M. Y., Mathematical modelling of leaky aquifers with rheological properties, *Proc. of the Anaheim Symposium*, Dec. (1976), 191—200。
- [ 7 ] Stehfest, H., Algorithm 368, numerical inversion of Laplace transforms, D-5, *Commun. ACM.*, 13, 1 (1970), 47—49。

## Nonsteady Flow of Groundwater in Aquifer System with Viscoelastic Properties

Liu Ci-qun

(Lanzhou Research Division of Flow Through Porous Media, Academia  
Sinica of China, Lanzhou)

### Abstract

The transient flow behavior of groundwater in aquifer-aquitard system with viscoelastic properties is studied. On the basis of previous works (Hantush, Neuman, Brutsaert, Corapcioglu), the new partial differential-integral equations are derived. The well-known equations (Hantush, Brutsaert) are the special cases of the new equations. The new equations describe the flow of a slightly compressible ground water in layers with viscoelastic properties.

Analytical solutions of the partial differential-integral equations are obtained by using the method of Laplace transform. The viscoelastic properties enhance the heterogeneities of elastic aquifer system which have delay and feed qualities. The agreements between the numerical inversion results of Laplace transform and the analytical solutions are good. The formulae predict the transient flow behavior of groundwater in this heterogeneous layers.