应用数学和力学，第7卷第11期（1986年11月）
Applied Mathematics and Mechanics
应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

关于概率内积空间*

张石生

（四川大学数学系，1985年9月18日收到）

摘要

本文给出概率内积空间以一新的定义．借助于这一定义，在本文中建立了概率内积空间的Schwarz不等式、收敛性定理及正交性的概念．并讨论了概率内积空间与概率赋范空间的关系等．

一、引言

概率度量空间和概率赋范空间的理论和应用的研究是随机泛函分析理论及应用研究中之一新的重要课题．随着这一理论的发展，最近在引文[1，3，4]中引进了概率内积空间的概念，并进而建立了与之相适应的某些理论．但是如何才能给出概率内积空间以一合理的卓有成效的定义，至今仍然是一个未解决的重大问题．

本文的目的是试图解决上述问题．在本文二节中，我们给出概率内积空间以一新的定义，并证明通常的内积空间为其特例．为了说明本文所给出的定义的合理性，我们在三节中特与通常的内积空间作了比较和评注．另外，我们还在四～六节中建立了概率内积空间的Schwarz不等式和正交性概念，并讨论了与概率赋范空间的关系等．

二、概率内积空间的定义和例子

本文以下处处记$R=(-\infty, \infty)$，$R^+=[0, \infty)$．用$\mathscr{D}$表一切左连续的分布函数的集合，$\mathscr{D}^+=\{F\in\mathscr{D}: F(0)=0\}$．并记

$$H(t)=\begin{cases}1 & (t>0)\\ 0 & (t\leqslant 0)\end{cases}$$

函数Δ：$[0,1]\times[0,1]\to[0,1]$称为t-范数，如果对一切$a, b, c, d\in[0,1]$，下面的条件被满足：

$(\Delta\text{-}1)$ $\Delta(a,1)=a$；

$(\Delta\text{-}2)$ $\Delta(a,b)=\Delta(b,a)$；

$(\Delta\text{-}3)$ 当$c\geqslant a, d\geqslant b$时，$\Delta(c,d)\geqslant\Delta(a,b)$；

$(\Delta\text{-}4)$ $\Delta(a,\Delta(b,c))=\Delta(\Delta(a,b),c)$．

* 中国科学院科学基金资助的课题．

称 t-范数$\Delta_1 \geqslant \Delta_2$，如果$\Delta_1(a\ b) \geqslant \Delta_2(a,b)$，$\forall a,b \in [0,1]$。以后我们用$\Delta_m$表一特殊的$t$-范数，其定义为：

$$\Delta_m(a,b)=\max\{a+b-1,0\} \qquad (\forall a,b \in [0,1])$$

定义 1 称三元组$(F,\ \mathscr{F},\ \Delta)$为概率内积空间，如果$E$是一实线性空间，$\Delta$是一$t$-范数，$\mathscr{F}$是$E\times E\to\mathscr{D}$的映象且满足下面的条件（以下处处记$\mathscr{F}(x,y)=F_{x,y}$。又$F_{x,y}(t)$表$F_{x,y}$在$t\in R$的值）：

$$\text{(PI-1)} \qquad F_{x,x}(0)=0;$$

$$\text{(PI-2)} \qquad F_{x,y}=F_{y,x};$$

$$\text{(PI-3)} \qquad F_{x,x}(t)=H(t),\ \forall t\in R \Leftrightarrow x=\theta;$$

$$\text{(PI-4)} \qquad F_{\alpha x,y}(t)=\begin{cases} F_{x,y}\left(\dfrac{t}{\alpha}\right) & (\alpha>0) \\ H(t) & (\alpha=0) \\ 1-F_{x,y}\left(\dfrac{t}{\alpha}+\right) & (\alpha<0)\end{cases}$$

其中α是任一实数。又$F_{x,y}(t/\alpha+)$表$F_{x,y}$在t/α处的右极限；

$$\text{(PI-5)} \qquad F_{x+y,z}(t)=\sup_{\substack{s+r=t\\ s,r\in R}} \Delta(F_{x,z}(s),F_{y,z}(r)) \qquad (t\in R).$$

例子：设E是实内积空间，现定义映象$\mathscr{F}$：$E\times E\to\mathscr{D}$如下：

$$F_{x,y}(t)=H(t-(x,y)) \tag{2.1}$$

下证$(E,\mathscr{F},\Delta)$是一概率内积空间，其中Δ是一t-范数。

事实上，条件(PI-1)～(PI-3)显然满足。另对任一$\alpha\in R$，当$\alpha>0$时有

$$F_{\alpha x,y}(t)=H(\alpha(t/\alpha-(x,y)))=H(t/\alpha-(x,y))=F_{x,y}(t/\alpha)$$

当$\alpha=0$时，有$F_{\alpha x,y}(t)=H(t)$；当$\alpha<0$时有

$$F_{\alpha x,y}(t)=H\left(-\alpha\left(-\frac{t}{\alpha}+(x,y)\right)\right)=H\left(-\frac{t}{\alpha}+(x,y)\right)=1-F_{x,y}\left(\frac{t}{\alpha}+\right)$$

故条件(PI-4)成立。

当$t>(x+y,z)$时，对任意的t_1，$t_2\in R$，其满足$t_1+t_2=t$，且$t_1>(x,z)$，$t_2>(y,z)$。于是有

$$\begin{aligned}1=H(t-(x+y,z))=F_{x+y,z}(t)&=\Delta(H(t_1-(x,z)),\ H(t_2-(y,z)))\\ &=\sup_{\substack{s+r=t\\ s,r\in R}}\Delta(F_{x,z}(s),F_{y,z}(r))\end{aligned}$$

当$t\leqslant(x+y,z)$时，对任意的s，$r\in R$，$s+r=t$，无论$s>(x,z)$（故$r<(y,z)$）或$s\leqslant(x,z)$，都有

$$F_{x+y,z}(t)=H(t-(x+y,z))=0=\sup_{\substack{s+r=r\\ s,r\in R}}\Delta(H(s-(x,z)),\ H(r-(y,z)))$$

故条件(PI-5)成立。结论得证。

三、评注与比较

设$(E,\mathscr{F},\Delta)$是一概率内积空间。令$\mathscr{E}$为$\mathscr{F}$的值域，即

$$\mathscr{E}=\{F_{x,y}\in\mathscr{D}：\ x,y\in E\}$$

对任意固定的$z\in E$，令

$$\mathscr{E}_z=\{F_{x,z}\in\mathscr{D}:\ x\in E\}$$

现在$\mathscr{E}_z$中依下面的方式引进元素的加法和数乘：

$$\alpha\circ F_{x,z}=F_{\alpha x,z},\quad F_{x,z}\oplus F_{y,z}=F_{x+y,z} \tag{3.1}$$

于是有下面的结果。

命题 1 设$(E,\mathscr{F},\Delta)$是具连续t-范数Δ的概率内积空间。则集合$\mathscr{E}_z$依（3.1）中的运算构成线性空间，而且$\mathscr{E}_z$是E的同态象。

证 由概率内积空间的定义易知$\mathscr{E}_z$对(3.1)中的运算是封闭的，而且有

（i） $F_{x,z}\oplus F_{y,z}=F_{y,z}\oplus F_{x,z}$;

（ii） $(F_{x,z}\oplus F_{y,z})\oplus F_{u,z}=F_{x,z}\oplus(F_{y,z}\oplus F_{u,z})$;

（iii） $\mathscr{E}_z$中有零元素$F_{\theta,z}=H$，且

$$F_{x,z}\oplus F_{\theta,z}=F_{\theta,z}\oplus F_{x,z}=F_{x,z};$$

（iv） 对每一元$F_{x,z}\in\mathscr{E}_z$有逆元$F_{-x,z}\in\mathscr{E}_z$，使得

$$F_{x,z}\oplus F_{-x,z}=H.$$

（v） $(\alpha\beta)\circ F_{x,z}=\alpha\circ(\beta\circ F_{x,z})$;

（vi） $\alpha\circ(F_{x,z}\oplus F_{y,z})=\alpha\circ F_{x,z}\oplus\alpha\circ F_{y,z}$;

（vii） $(\alpha+\beta)\circ F_{x,z}=\alpha\circ F_{x,z}\oplus\beta\circ F_{x,z}$;

（viii） $1\circ F_{x,z}=F_{x,z}$;

（ix） $0\circ F_{x,z}=H$.

因而得证$\mathscr{E}_z$，$z\in E$是一线性空间。令

$$\psi:\ x\mapsto F_{x,z}$$

易知对任意的$\alpha,\beta\in R$，$x,y\in E$有

$$\psi(\alpha x+\beta y)=\alpha\circ\psi(x)\oplus\beta\circ\psi(y)$$

故$\mathscr{E}_z$，$z\in E$是E的同态象。命题得证。

现在$\mathscr{E}$中按下面的方式引入偏序"$\leqslant$"：设F，$G\in\mathscr{E}$，则$F\leqslant G$当而且仅当$F(t)\geqslant G(t)$，$\forall t\in R$，若记

$$\langle x,y\rangle=F_{x,y}\qquad(x,y\in E)$$

于是由条件(PI-1)～(PI-5)和命题 1 有

（i） $\langle x,y\rangle=\langle y,x\rangle\qquad(\forall x,y\in E)$;

（ii） $\langle x,x\rangle\geqslant H$，又$\langle x,x\rangle=H\Leftrightarrow x=\theta$.

（iii） $\langle\alpha x,y\rangle=\alpha\circ\langle x,y\rangle$;

（iv） $\langle x+y,z\rangle=\langle x,z\rangle\oplus\langle y,z\rangle$.

故我们这里所定义的概率内积与通常的内积是极为协调一致。

四、概率内积空间的Schwarz不等式

定理 1 设$(E,\mathscr{F},\Delta)$是一概率内积空间。设Δ满足条件：$\Delta(t,t)\geqslant t$，$\forall t\in[0,1]$。则对任意的$u,v\in E$，和任意的$t>0$，$s>0$，有

$$F_{u,v}(ts+)\geqslant\Delta(F_{u,u}(t^2),\ F_{v,v}(s^2)) \tag{4.1}$$

（以后称(4.1)式为概率内积空间中的 Schwarz 不等式）。

证　令$\alpha=-s/t$，于是$\alpha t+s=0$。令$a=F_{u,u}(s^2)$，$b=F_{\alpha v,u}(\alpha ts)$，$c=F_{\alpha v,\alpha v}(\alpha^2t^2)$。于是由条件(PI-1)和(PI-5)有

$$
\begin{aligned}
0&=F_{u+\alpha v,u+\alpha v}((\alpha t+s)^2)\geqslant\Delta(\Delta(a,b),\ \Delta(b,c))\\
&=\Delta(a,\Delta(\Delta(b,b),c))\geqslant\Delta(a,\Delta(b,c))
\end{aligned}
\tag{4.2}
$$

另由$\Delta(t,t)\geqslant t$，$\forall t\in[0,1]$，易于推出$\Delta\geqslant\Delta_m$。其次有

$$c=F_{\alpha v,\alpha v}(\alpha^2t^2)=1-F_{v,\alpha v}(\alpha t^2+)=F_{v,v}(t^2)$$

$$b=F_{\alpha v,u}(\alpha ts)=1-F_{v,u}(ts+)$$

于是由（4.2）即得

$$
\begin{aligned}
0&\geqslant\Delta(F_{u,u}(s^2),\ \Delta(1-F_{v,u}(ts+),F_{v,v}(t^2)))\\
&=\Delta(\Delta(F_{u,u}(s^2),\ F_{v,v}(t^2)),\ 1-F_{v,u}(ts+))\\
&(\text{因}\Delta\geqslant\Delta_m)\geqslant\Delta(F_{u,u}(s^2),\ F_{v,v}(t^2))+1-F_{v,u}(ts+)-1
\end{aligned}
$$

故有
$$F_{u,v}(ts+)\geqslant\Delta(F_{u,u}(s^2),\ F_{v,v}(t^2))$$

定理得证。

五、Menger概率内积空间及其拓扑

定义 2　设$(E,\mathscr{F},\Delta)$是一概率内积空间，其中Δ是连续的并满足条件$\Delta(t,t)\geqslant t$，$\forall t\in[0,1]$的t-范数。再设对任意的$t>0$，$s>0$，下面的不等式成立：

$$F_{u,v}(ts)\geqslant\Delta(F_{u,u}(t^2),\ F_{v,v}(s^2))\qquad(\forall u,v\in E)\tag{5.1}$$

则称$(E,\mathscr{F},\Delta)$为 Menger 概率内积空间。

定义 3　(E,f,Δ)称为概率赋范空间，如果E是一实线性空间，Δ是一t-范数，f是$E\to\mathscr{D}$的映象（以下记$f(x)=f_x$）且满足条件：

(PN-1) $f_x(t)=H(t)$，$\forall t\in R$当而且仅当$x=\theta$；

(PN-2) $f_x(0)=0$；

(PN-3) 对一切$\alpha\in R$，$\alpha\neq0$，有

$$f_{\alpha x}(t)=f_x(t/|\alpha|)\qquad(\forall t>0);$$

(PN-4) $f_{x+y}(t_1+t_2)\geqslant\Delta(f_x(t_1),\ f_y(t_2))$（$\forall t_1,t_2>0$，$x,y\in E$）.

定理 2　设$(E,\mathscr{F},\Delta)$是一 Menger 概率内积空间，则它是概率赋范空间。

证　借助于映象$\mathscr{F}$，定义映象f：$E\to\mathscr{D}$如下：

$$f_x(t)=\begin{cases}0&(t\leqslant0)\\F_{x,x}(t^2)&(t>0)\end{cases}\tag{5.2}$$

下证由（5.2）式定义的f满足条件(PN-1)～(PN-4)。

事实上，条件(PN-1)～(PN-3)分别由条件(PI-3)(PI-1)和(PI-4)得出。对任意给定的$x,y\in E$，$t_1>0$，$t_2>0$，令$a=F_{x,x}(t_1^2)$，$b=F_{x,y}(t_1t_2)$，$c=F_{y,y}(t_2^2)$。于是由(PI-5)知

$$
\begin{aligned}
f_{x+y}(t_1+t_2)&=F_{x+y,x+y}((t_1+t_2)^2)\\
&\geqslant\Delta(\Delta(a,b),\ \Delta(b,c))=\Delta(a,\Delta(c,\Delta(b,b)))\\
&\geqslant\Delta(a,\Delta(c,b))=\Delta(\Delta(a,c),b)\quad(\text{由}(5.1))\\
&\geqslant\Delta(\Delta(a,c),\Delta(a,c))\geqslant\Delta(a,c)\\
&=\Delta(f_x(t_1),\ f_y(t_2))
\end{aligned}
$$

定理证毕。

因 Menger 概率内积空间是概率赋范空间，因而它是由邻域系$\{U_p(\varepsilon,\lambda),\ p\in E,\ \varepsilon>0,\ \lambda>0\}$所导出的拓扑$\mathscr{T}$的 Hausdorff 拓扑空间[3]，且

$$U_p(\varepsilon,\lambda)=\{x\in E:\ f_{x-p}(\varepsilon)>1-\lambda\}$$

故$(E,\mathscr{F},\Delta)$中的点列$\{x_n\}$称为$\mathscr{T}$-收敛于 x，如果对任给的 $\varepsilon>0$，$\lambda>0$，存在 $N=N(\varepsilon,\lambda)$，当$n\geqslant N$时有

$$f_{x_n-x}(\varepsilon)>1-\lambda$$

其中 f 由（5.2）定义。

定理 3 设$(E,\mathscr{F},\Delta)$是一 Menger 概率内积空间，则对任意的序列$\{u_n\}\subset E$，当 $u_n\xrightarrow{\mathscr{T}}\theta$时，对任一$v\in E$和任给的 $\varepsilon>0$，$\lambda>0$，存在 $N=N(\varepsilon,\lambda)$，当 $n\geqslant N$时有

$$F_{u_n,v}(\varepsilon)>1-\lambda$$

证 由于 $\Delta(a,1)=a$，$a\in[0,1]$ 且Δ 连续，故对任给的 $\varepsilon>0$，$\lambda>0$，存在 $a,b\in(0,1)$，使得

$$\Delta(1-a,\ 1-b)>1-\lambda \tag{5.3}$$

又因$F_{v,v}(t^2)$是一分布函数，故存在 $t_0>0$，使得

$$F_{v,v}(t_0^2)>1-b$$

又因$u_n\xrightarrow{\mathscr{T}}\theta$，于是对满足（5.3）式的 a 和ε/t_0，存在 n_0，当 $n\geqslant n_0$ 时，有

$$F_{u_n,u_n}((\varepsilon/t_0)^2)>1-a$$

于是由（5.1）即得

$$\begin{aligned}F_{u_n,v}(\varepsilon)&=F_{u_n,v}(\varepsilon/t_0\cdot t_0)\geqslant\Delta(F_{u_n,u_n}(\varepsilon/t_0)^2,\ F_{v,v}(t_0^2))\\&\geqslant\Delta(1-a,\ 1-b)>1-\lambda\qquad(v\in E)\end{aligned}$$

定理 4 设$(E,\mathscr{F},\Delta)$是一 Menger 概率内积空间，且满足条件：

$$F_{x+y,z}(t)\leqslant\Delta^*(F_{x,z}(r),\ F_{y,z}(s))\qquad(\forall t\in R;\ x,y,z\in E) \tag{5.4}$$

其中 $t=r+s$，Δ^*是Δ的共轭范数，即

$$\Delta^*(a,b)=1-\Delta(1-a,\ 1-b)\qquad(\forall a,b\in[0,1])$$

再设$u_n\xrightarrow{\mathscr{T}}u_0\in E$，则对任一$v\in E$有

(i) $\liminf\limits_{n\to\infty}F_{u_n,v}(t)\geqslant F_{u_0,v}(t)\quad(t\in R)$

(ii) 若 t 是 $F_{u_0,v}$的连续点，则有

$$\lim_{n\to\infty}F_{u_n,v}(t)=F_{u_0,v}(t)$$

证 因Δ连续，且$\Delta(a,1)=a\quad(a\in[0,1])$，故对任一$\varepsilon>0$，存在$\lambda>0$，使得

$$\Delta(1-\lambda,\ F_{u_0,v}(t-\varepsilon))>F_{u_0,v}(t-\varepsilon)-\varepsilon$$

而且当$\varepsilon\searrow0$时，有$\lambda\searrow0$。另因 $u_n\xrightarrow{\mathscr{T}}u_0$，即 $u_n-u_0\xrightarrow{\mathscr{T}}\theta$。故由定理 3，对任给的 $\varepsilon>0$和满足前式的$\lambda>0$，存在 n_0，当 $n\geqslant n_0$ 时有

$$F_{u_0-u_n,v}(\varepsilon+)\geqslant F_{u_0-u_n,v}(\varepsilon)>1-\lambda \tag{5.5}$$

因而有

$$\begin{aligned}F_{u_n,v}(t)&\geqslant\Delta(F_{u_n-u_0,v}(\varepsilon),\ F_{u_0,v}(t-\varepsilon))\\&\geqslant\Delta(1-\lambda,\ F_{u_0,v}(t-\varepsilon))>F_{u_0,v}(t-\varepsilon)-\varepsilon\qquad(\forall n\geqslant n_0)\end{aligned} \tag{5.6}$$

另由条件（5.4）有

$$F_{u_n,v}(t)=F_{u_n-u_0+u_0,v}(t)\leqslant 1-\varDelta(1-F_{u_n-u_0,v}(-\varepsilon),\ 1-F_{u_0,v}(t+\varepsilon))$$
$$=1-\varDelta(F_{u_0-u_n,v}(\varepsilon+),\ 1-F_{u_0,v}(t+\varepsilon)) \qquad (5.7)$$

因$(E,\mathscr{F},\varDelta)$是Menger概率内积空间,故$\varDelta$满足条件$\varDelta(t,t)\geqslant t$ $(\forall t\in[0,1])$,因而有$\varDelta\geqslant\varDelta_m$。于是由(5.7)

$$F_{u_n,v}(t)\leqslant 1-(F_{u_0-u_n,v}(\varepsilon+)+1-F_{u_0,v}(t+\varepsilon)-1$$
$$=1-(F_{u_0-u_n,v}(\varepsilon+)-F_{u_0,v}(t+\varepsilon))$$

注意到(5.5)和(5.6),由上式即得

$$F_{u_0,v}(t-\varepsilon)-\varepsilon<F_{u_n,v}(t)<\lambda+F_{u_0,v}(t+\varepsilon)$$

故有

$$\operatorname{lin}_{n\to\infty}\inf F_{u_n,v}(t)\geqslant F_{u_0,v}(t-\varepsilon)-\varepsilon$$

$$\operatorname{lin}_{n\to\infty}\sup F_{u_n,v}(t)\leqslant F_{u_0,v}(t+\varepsilon)+\lambda$$

于上两式中让$\varepsilon\searrow 0$,故也$\lambda\searrow 0$,即得

$$\operatorname{lin}_{n\to\infty}\inf F_{u_n,v}(t)\geqslant F_{u_0,v}(t) \qquad (t\in R)$$

$$\operatorname{lin}_{n\to\infty}\sup F_{u_n,v}(t)\leqslant F_{u_0,v}(t+) \qquad (t\in R)$$

若t是$F_{u_0,v}$的连续点,由上两式即得结论(ii)。

定理证毕。

六、正 交 性

定义 4 设$(E,\mathscr{F},\varDelta)$是一概率内积空间,$u,v\in(E,\mathscr{F},\varDelta)$。称$u,v$是正交的,如果$F_{u,v}(t)=H(t)$ $(\forall t\in R)$。并记为$u\perp v$。

定理 5 概率内积空间$(E,\mathscr{F},\varDelta)$上的正交性,具有如下性质:

(i) $\theta\perp u$, $\forall u\in E$;

(ii) $u\perp v$, 则 $v\perp u$;

(iii) $u\perp u$, 则 $u=\theta$;

(iv) $u\perp u_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$, 则 $u\perp\sum_{i=1}^{n}u_i$;

(v) 若 $u\perp v$, 则对任一 $\alpha\in R$, $u\perp\alpha v$;

(vi) 若$(E,\mathscr{F},\varDelta)$是一Menger概率内积空间,且满足条件(5.4)。再设$u_n\xrightarrow{\mathscr{T}}u$, $v\perp u_n$ $(u=1,2,\cdots)$,而且$F_{u,v}$是一连续的分布函数,则$v\perp u$。

证 结论(i)~(iii)由条件(PI-4),(PI-2)和(PI-3)直接可得。另因

$$F_{u,\sum_{i=1}^{n}u_i}(t)=(F_{u,u_1}\oplus F_{u,u_2}\oplus\cdots\oplus F_{u,u_n})(t)$$
$$=(H\oplus H\oplus\cdots\oplus H)(t)=H(t)$$

故性质(iv)得证。

若$u\perp v$,则对一切$\alpha\in R$,当$\alpha>0$时有

$$F_{u,av}(t)=F_{u,a}(t/a)=H(t/a)=H(t) \quad (\forall t\in R)$$

当 $a=0$ 时，显然有

$$F_{u,av}(t)=H(t) \quad (\forall t\in R)$$

当 $a<0$ 时，有

$$F_{u,av}(t)=1-F_{u,v}\left(\frac{t}{a}+\right)=1-H\left(\frac{t}{a}+\right)$$

$$=\begin{cases}0 & (\text{当 } t\leqslant 0)\\ 1 & (\text{当 } t>0)\end{cases}=H(t) \quad (\forall t\in R)$$

故性质(v)得证。

下证性质(vi)也成立。事实上，因 $v\perp u_n(n=1,2,\cdots)$，且 $F_{u,v}$ 是连续的分布函数，故由定理4(ii)得知

$$H(t)=\lim_{n\to\infty}F_{u_n,v}(t)=F_{u,v}(t) \quad (\forall t\in R)$$

即 $u\perp v$。定理得证。

参考文献

[1] 张石生，概率内积空间中映象的不动点定理，应用数学和力学，**6**，1 (1985)，67—74.

[2] Dumitrescu, C., Un produit scalaire probabiliste, *Rev. Roumania Math. Pure et Appl.*, **26**, 3 (1981), 399—404.

[3] Schweizer, B. and A. Sklar, *Probabilistic Metric Spaces*, North-Holland, New york, Amsterdam, Oxford (1983).

[4] 游兆永、朱林户，概率内积空间，科学通报，8 (1983)，456—459.

On the Probabilistic Inner Product Spaces

Zhang Shi-sheng

(*Department of Mathematics, Sichuan University, Chengdu*)

Abstract

In this paper a new definition for probabilistic inner product spaces is given. By virtue of this definition, some convergence theorems, Schwarz inequality and the orthogonal concept for probabilistic inner product spaces have been established and introduced. Moreover, the relationship between this kind of spaces and probabilistic normed spaces has been considered also.