应用数学和力学，第7卷第10期（1986年10月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

# Toupin–Бердичевский定理不能作为圣维南原理的数学表达*

赵 建 中

（云南大学，1985年7月21日收到）

**摘 要**

本文对Toupin–Бердичевский定理的条件和结论进行了考查，从而说明并以实例演示该定理不能作为弹性力学圣维南原理的数学表达.

## 一、弹性力学中圣维南（Saint-Venant）原理的一般性陈述

Boussinesq陈述[1]：

施于弹性体上的任意平衡力系，如果其作用点限于某个给定的球内，那么该平衡力系在任意一个与载荷的距离远远大于球半径的点上所产生的形变是可以忽略的.

Love进而表述为[2]：

根据这个原理，由施于弹体表面某一小部份的平衡力系在距离远大于该部份的线度的地方产生的应变是可以忽略的.

## 二、Toupin–Бердичевский定理[3][4]（以下简称T–Б定理）

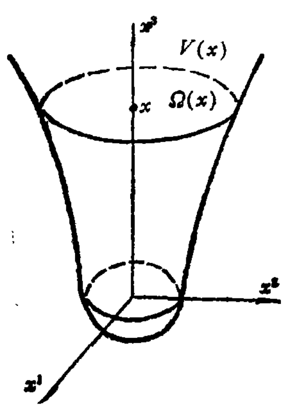

图 1

许多著名学者曾致力于寻求圣维南原理的严格的数学表述和证明，其中R. A. Toupin和B. Л. Бердичевский的工作可表达为一个一般性的定理[4][6]：

设弹性体（图1）为$V$，$x^3\leqslant 0$作用着平衡力系，$x^3>0$无外载，应变能密度为$U$，记

$$\left.\begin{aligned}V(x)&=\{(x^1,x^2,x^3)\,|_{x^3\geqslant x},\ (x^1,x^2,x^3,)\in V\}\\ \Omega(x)&=\{(x^1,x^2,x^3)\,|_{x^3=x},\ (x^1,x^2,x^3)\in V\}\end{aligned}\right\}\tag{2.1}$$

设$\Omega(x)$对任意$x$有界，记

$$E(x)=\int_{V(x)}U\,dx^1dx^2dx^3\tag{2.2}$$

* 郭仲衡推荐.

则 $$E(x)\leqslant E(0)\exp\left(-\int_0^x \gamma(t)dt\right) \tag{2.3}$$

其中 $$\gamma(x)=\inf_{p'}\left(\int_{\Omega(x)} U_p dx^1dx^2 \Big/ \int_{V(x)} U_p dx^1dx^2dx^3\right) \tag{2.4}$$

这里下确界对所有可能的平衡力系$p'$来取。

有作者认为用数学形式描述圣维南原理的目标大体上已经由T-Б定理达到，一些作者把这个定理作为圣维南原理的数学表达推广到固体力学的其他领域[5]。然而，这种认识是一个误解。

## 三、T-Б定理不能作为圣维南原理的数学表达

T-Б定理不能表达圣维南原理，理由如次：

(1) 就其条件而言，作者[4]虽然按照 Boussinesq 和 Love 陈述的要求提出了一个弹性力学边值问题，但是在推导（或证明）T-Б定理的过程中原则上没有必要涉及弹性力学问题的基本方程和边界条件。因此，所得到的定理是一个过于普遍的规律。它不仅和弹性力学问题的边界条件无关，甚至和固体的物理性质（本构关系）及变形几何规律无关。这样一个事实说明T-Б定理和圣维南原理没有特殊的联系，而且也是该定理能够"推广"到固体力学的其他领域[5](如非线性弹性力学，粘弹体，极微弹性 体 力学)的本质的原因。

(2) 就其结论而言，T-Б定理表达的是连续体中应变能随所考虑的贮能体积而变化的规律。它不是应变能密度随距离衰减的描述，从而也就不能给出应变（或应力）随距离衰减的规律。贮能 $E(x)$ 发生衰减的决定因素在于$V(x)$的体积发生随距离$x$的衰减。可见T-Б定理与圣维南原理在物理意义上没有共同之处。

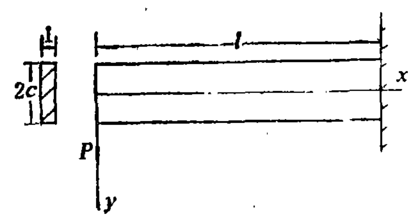


图 2

**例** 端面受载的悬臂梁问题（图2）的解为[6]

$$\sigma_x=-\frac{Pxy}{I},\quad \sigma_y=0,\quad \tau_{xy}=-\frac{P}{I}\frac{1}{2}(c^2-y^2)\qquad (0\leqslant x\leqslant l,\ |y|\leqslant c) \tag{3.1}$$

式中 $$I=\frac{2}{3}c^3 \tag{3.2}$$

今采取 $$\gamma_1(x)=\int_{\Omega(x)} Udy \Big/ \int_{V(x)} Udxdy \tag{3.3}$$

对(2.3)式取等号。这样讨论对定理的物理意义不产生实质性的影响。于是，对悬臂梁问题有

$$U=\frac{1}{2E}(\sigma_x^2+\sigma_y^2)-\frac{\mu}{E}\sigma_x\sigma_y+\frac{\tau_{xy}^2}{2G}=\frac{P^2}{2EI^2}x^2y^2+\frac{P^2}{8GI^2}(c^2-y^2)^2 \tag{3.4}$$

式中$E$为杨氏模量并和应变能$E(x)$相区别，$G$为剪切模量，$\mu$为泊松比。

$$E(x)=\int_{V(x)} Udxdy=\frac{P^2}{6EI}(l^3-x^3)+\frac{P^2c^2}{5GI}(l-x) \tag{3.5}$$

$$\gamma_1(x)=\left(\frac{P^2}{2EI}x^2+\frac{P^2}{5GI}c^2\right)\Big/\left[\frac{P^2}{6EI}(l^3-x^3)+\frac{P^2c^2}{5GI}(l-x)\right] \tag{3.6}$$

$$\frac{dE(x)}{dx}=-\frac{P^2}{2EI}x^2-\frac{P^2}{5GI}c^2=-\gamma_1(x)E(x) \tag{3.7}$$

从而
$$E(x)=E(0)\exp\left(-\int_0^x \gamma_1(t)dt\right) \tag{3.8}$$

(3.8)式表明T-Б定理意义下的“能量衰减规律”对悬臂梁问题成立，然而该问题的应变能密度$U$和应力分量$\sigma_x$的绝对值却是随$x$递增的。此例并且表明，试图借助T-Б定理和公式[3][5]

$$|e|^2\leqslant K\frac{E(x,R)}{v} \tag{3.9}$$

（式中$v$为球$S(x,R)$的体积，$E(x,R)$为球的应变能，$K$为常数）对应变$e$进行逐点估计而得到应变随距离衰减的作法是没有希望的。

圣维南原理关心的是弹体内无限远处的形变，T-Б定理似乎能在这一方面有所成功。然而，定理中

$$\lim_{x\to\infty}V(x) \tag{3.10}$$

的意义是没有明确的。即便从(2.3)式有可能得到

$$\lim_{x\to\infty}E(x)=0 \tag{3.11}$$

由(3.11)也不能得到无限远处形变可以忽略的结论。如对无限长悬臂梁（$l\to\infty$）问题，由(3.5)式采取

$$\lim_{x\to\infty}E(x)=\lim_{\substack{x\to l\\ l\to\infty}}E(x)=\lim_{l\to\infty}E(l)=0 \tag{3.12}$$

然而

$$\lim_{x\to\infty}|\sigma_x|=\infty \qquad (y\neq 0) \tag{3.13}$$

$$\lim_{x\to\infty}U=\infty \qquad (y\neq 0) \tag{3.14}$$

对(3.12)式的可能的解释是：柱体远端面的贮能是可以忽略的。而这一结果对问题毫无意义。

文献[4]认为圣维南原理的本质在于$\gamma$取非零值且不过份小，并把圣维南原理的证明转化为对$\gamma$取值作足够好的估计。作者的这种观点必然要引出一个新的实质性的问题：$\gamma$取非零值并且不过份小是否为弹体中应变能密度随距离发生衰减的充分条件？由于T-Б定理的物理意义及由此而决定的定理的普适性，该定理没有对圣维南原理的表达和证明取得实质性的进展。

## 参 考 文 献


[1] Boussinesq, M. J., *Application des Potentiels*, Gauthier-Villars, Paris (1885).

[2] Love, A. E. H., *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, 4th ed., The University Press, Cambridge (1927).

[3] Toupin, R. A., Saint-Venant's principle, *Arch. Rational Mech. and Analysis*, **18**, 2 (1965), 83—96.

[4] Бердичевский В.Л., К доказательству принципа Сен-Венана для тел произвольной формы, *ПММ*, **38** (1974), 851—864.

[5] 王敏中，圣维南原理发展简介，力学与实践，**2**，4 (1980)，72—73.

[6] Timoshenko, S. P. and J. N. Goodier, *Theory of Elasticity*, 3rd ed., McGraw-Hill Book Company, New York, 41—42.

# Toupin-Berdichevskii Theorem Can't Be Considered as a Mathematical Expression of Saint-Venant's Principle

Zhao Jian-zhong

(*Yunnan University, Kunming*)

**Abstract**

In this paper the condition and the conclusion of Toupin-Berdichevskii Theorem is examined, whereby it is explained and demonstrated with an example that the theorem can't be considered as a mathematical expression of Saint-Venant's Principle in Elasticity.