

# 二维分岔槽道内非牛顿流体流动的有限元分析\*

苏 铭 德

(清华大学, 1984年11月8日收到)

## 摘 要

本文介绍二维分岔槽道内非牛顿流体流动的有限元分析。采用 Galerkin 法及混合有限元法, 流体看作不可压缩的非牛顿流体, 满足 Oldyord 微分型本构方程。由有限元法形成的非线性代数方程组用连续微分法求解。结果表明有限元法适于分析复杂流场中非牛顿流体的流动。

## 一、引 言

确定分岔管道中的流动, 在血管流体动力学中有很大的意义。Pedley<sup>[1]</sup>就曾描写过这方面的问题。由于问题本身的三维性及流场几何形状的复杂性, 直接研究或计算分析均有较大困难。所以作为模型问题, 人们首先分析二维分岔流道内的流动, 用以获得一些有用的信息。Bramley和Dennis<sup>[2]</sup>用有限差分法对牛顿流体在分岔槽道内的流动进行了分析计算。本文采用有限元的方法, 对二维分岔槽道内的非牛顿流体的流动进行数值计算。这样做的原因是: 血液更接近于非牛顿流体以及有限元方法可以适应形状复杂的流场的数值分析。

## 二、基本方程

图1显示了所要分析的流场的几何形状, 流体从左边流入, 右边流出。由于流场的对称性, 故只画出上半部分。

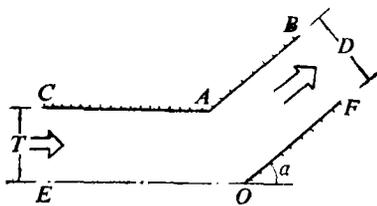


图 1

本文假定流体是不可压缩的, 流场是定常的, 流体的应力-应变率之间的关系满足 Oldyord 微分模型<sup>[3]</sup>。于是基本方程为:

连续方程

$$\operatorname{div} \vec{V} = 0 \quad (2.1)$$

动力学方程

$$\frac{d\vec{V}}{dt} \equiv \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} = \operatorname{Div} \sigma = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \operatorname{Div} \tau \quad (2.2)$$

\* 卞荫贵推荐。

其中  $\sigma = -pI + \tau$ ,  $p$  为静压,  $I$  为单位张量,  $\sigma$  为应力张量,  $\tau$  为切应力张量. 为简单起见, (2.2) 式中  $\sigma$  及  $\tau$  分别应是  $\sigma/\rho$  及  $\tau/\rho$ .

本构方程

$$\tau + \lambda_1 \frac{\mathcal{D}\tau}{\mathcal{D}t} + \mu_0 (\text{tr}\tau) \cdot \mathbf{D} = 2\eta_0 \left[ 1 + \lambda_2 \frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}t} \right] \mathbf{D} \quad (2.3)$$

这里  $\mathcal{D}/\mathcal{D}t$  是 Oldyord 导数, 它与物质导数的关系为

$$\frac{\mathcal{D}\mathbf{A}}{\mathcal{D}t} = \frac{d\mathbf{A}}{dt} - L\mathbf{A} - \mathbf{A}L^T \quad (2.4)$$

其中  $\mathbf{A}$  为求导的张量,

$$L = \left\{ \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right\} \quad (2.5)$$

以及  $D = (L + L^T)/2$ .

在定常情况下, (2.1)、(2.2)、(2.3) 式在直角坐标下的显式为:

连续方程:

$$v_{i,i} = 0 \quad (2.6)$$

动力学方程:

$$v_k v_{i,k} = -\frac{1}{\rho} p_{,i} + \tau_{ik,k} \quad (2.7)$$

本构方程:

$$\begin{aligned} \tau_{ij} + \lambda_1 [v_k \tau_{ij,k} - v_{i,k} \tau_{h,j} - \tau_{ik} v_{j,k}] + \mu_0 \tau_{kk} \cdot \frac{1}{2} (v_{i,j} + v_{j,i}) \\ = \eta_0 [v_{i,j} + v_{j,i} + \lambda_0 (v_k v_{i,jk} + v_k v_{j,ik} - v_{i,k} v_{k,j} - 2v_{i,k} v_{j,k} - v_{k,i} v_{j,k})] \end{aligned} \quad (2.8)$$

这里引用了求和约定, 在二维情况下, 把  $v_1, v_2$  分别记作  $u, v$ . 上述方程写为

连续方程:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.9)$$

动力学方程:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \quad (2.10)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} = 0 \quad (2.11)$$

本构方程:

$$\begin{aligned} \tau_{xx} \left[ 1 + (\mu_0 - 2\lambda_1) \frac{\partial u}{\partial x} \right] + \lambda_1 \left[ u \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + v \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial y} \right] - 2\lambda_1 \frac{\partial u}{\partial y} \tau_{xy} + \mu_0 \frac{\partial u}{\partial x} \tau_{yy} \\ = 2\eta_0 \frac{\partial u}{\partial x} + 2\lambda_2 \eta_0 \left[ u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + v \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 - \frac{\partial u}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\tau_{xx} \left[ \frac{\mu_0}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \lambda_1 \frac{\partial v}{\partial x} \right] + \tau_{yy} \left[ \frac{\mu_0}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \lambda_1 \frac{\partial u}{\partial y} \right]$$

$$\begin{aligned}
 & + \tau_{xy} + \lambda_1 \left[ u \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + v \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right] = \eta_0 \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\
 & + \lambda_2 \eta_0 \left[ \left( u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - 2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} - 2 \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} \right]
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

$$\begin{aligned}
 & \mu_0 \tau_{xx} \frac{\partial v}{\partial x} - 2 \lambda_1 \frac{\partial v}{\partial x} \tau_{xx} + \tau_{yy} \left[ 1 + (\mu_0 - 2 \lambda_1) \frac{\partial v}{\partial y} \right] \\
 & + \lambda_1 \left[ u \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial x} + v \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} \right] = 2 \eta_0 \frac{\partial v}{\partial y} + 2 \lambda_2 \eta_0 \left[ u \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + v \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right. \\
 & \left. - 2 \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 - \frac{\partial v}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right]
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

(2.9)~(2.14)式是本文的出发点。当 $\lambda_1, \lambda_2, \mu_0$ 同时为零时即为牛顿流体。

### 三、边界条件

为了使方程具有确定的解，必须给出边界条件。设边界 $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ ，且 $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = 0$ 。在 $\Gamma_1$ 上给出

$$v_i = v_i(\Gamma_1) \tag{3.1}$$

在 $\Gamma_2$ 上

$$\sigma_n = \sigma_n(\Gamma_2) \tag{3.2}$$

另外在边界 $\Gamma_3 \subset \Gamma$ 上给出

$$\tau_w = \tau_w(\Gamma_3) \tag{3.3}$$

具体地说，在本文中，

$$CA, AB, OF \text{ 上 } u = v = 0 \tag{3.4}$$

在 $CE, BF$ 上假定流动接近Poiseuille流动。故 $CE$ 上 $v = 0, \partial u / \partial x = \partial v / \partial x = 0$ ；在 $BF$ 上，记出口方向为 $x'$ ，在其上的速度分量为 $u'$ ，垂直方向分量为 $v'$ ，并且有 $v' = 0, \partial u' / \partial x' = 0, \partial v' / \partial x' = 0$ 。于是在 $CE$ 上有

$$- \frac{dp}{dx} = \eta_0 \frac{d}{dy} \left[ \frac{du}{dy} \frac{1 + \lambda_2 \mu_0 \left( \frac{du}{dy} \right)^2}{1 + \lambda_1 \mu_0 \left( \frac{du}{dy} \right)^2} \right] \tag{3.5}$$

在 $BF$ 上有类似关系。只要将 $x, y, u$ 分别改为 $x', y', u'$ 即可。

$dp/dx$ 在 $CE$ 处给定，出口处 $dp/dx'$ 则需选用，使得进出口流量相等。

由于 $v = 0, \partial / \partial x = 0, u$ 分布已知，故 $CE$ 及 $BF$ 上的 $\tau_{xx}, \tau_{xy}, \tau_{yy}$ 都已知。

在 $OE$ 上：

$$v = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \text{ 或 } \tau_{xy} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} = 0 \tag{3.6}$$

### 四、数值方法的描述

#### 1. 有限元方程的形成

由于(2.9)~(2.14)方程及其相应的边界条件比较复杂，因此为了形成有限元方程。采

用 Galerkin 法是最为方便的, 为此(2.9)~(2.14)式用以下公式替代:

$$\int_{\Omega} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \delta p d\Omega = 0 \quad (4.1)$$

$$\int_{\Omega} \left[ \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) \delta u - \frac{p}{\rho} \frac{\partial \delta u}{\partial x} + \tau_{xx} \frac{\partial \delta u}{\partial x} + \tau_{xy} \frac{\partial \delta u}{\partial y} \right] d\Omega \\ + \int_{\partial \Omega} \left[ \left( -\frac{p}{\rho} + \tau_{xx} \right) \cos(\hat{n}, \hat{i}_x) + \tau_{xy} \cos(\hat{n}, \hat{i}_y) \right] \delta u d(\partial \Omega) = 0 \quad (4.2)$$

$$\int_{\Omega} \left[ \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) \delta v - \frac{p}{\rho} \frac{\partial \delta v}{\partial x} + \tau_{xy} \frac{\partial \delta v}{\partial x} + \tau_{yy} \frac{\partial \delta v}{\partial y} \right] d\Omega \\ + \int_{\partial \Omega} \left[ \left( -\frac{p}{\rho} + \tau_{yy} \right) \cos(\hat{n}, \hat{i}_y) + \tau_{xy} \cos(\hat{n}, \hat{i}_x) \right] \delta v d(\partial \Omega) = 0 \quad (4.3)$$

$$\int_{\Omega} \left\{ \tau_{xx} \left[ 1 + (\mu_0 - 2\lambda_1) \frac{\partial u}{\partial x} \right] + \lambda_1 \left[ u \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + v \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial y} \right] \right. \\ \left. - 2\lambda_1 \frac{\partial u}{\partial y} \tau_{xx} + \mu_0 \frac{\partial u}{\partial x} \tau_{yy} - 2\eta_0 \frac{\partial u}{\partial x} - 2\lambda_2 \eta_0 \left[ u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + v \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right] \right. \\ \left. - 2 \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - \frac{\partial u}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right\} \delta \tau_{xx} d\Omega = 0 \quad (4.4)$$

$$\int_{\Omega} \left\{ \tau_{xx} \left[ \frac{\mu_0}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \lambda_1 \frac{\partial v}{\partial x} \right] + \tau_{yy} \left[ \frac{\mu_0}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \lambda_1 \frac{\partial u}{\partial y} \right] \right. \\ \left. + \tau_{xy} + \lambda_1 \left[ u \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + v \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right] - \eta_0 \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right. \\ \left. - \lambda_2 \eta_0 \left[ \left( u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - 2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} - 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right] \right\} \\ \cdot \delta \tau_{xy} d\Omega = 0 \quad (4.5)$$

$$\int_{\Omega} \left\{ \mu_0 \frac{\partial v}{\partial x} \tau_{xx} - 2\lambda_1 \frac{\partial v}{\partial x} \tau_{xy} + \tau_{yy} \left[ 1 + (\mu_0 - 2\lambda_1) \frac{\partial v}{\partial y} \right] \right. \\ \left. + \lambda_1 \left[ u \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial x} + v \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} \right] - 2\eta_0 \frac{\partial v}{\partial y} - 2\lambda_2 \eta_0 \left[ u \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + v \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] \right. \\ \left. - 2 \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 - \frac{\partial v}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right\} \delta \tau_{yy} d\Omega = 0 \quad (4.6)$$

设  $p, u, v, \tau_{xx}, \tau_{xy}, \tau_{yy}$  可以写作离散点为参数的函数形式, 即

$$\left. \begin{aligned} p &= \sum_i p_i N_{p_i} & u &= \sum_i u_i N_{u_i} & v &= \sum_i v_i N_{v_i} \\ \tau_{xx} &= \sum_i \tau_{xx_i} N_{\tau_{xx_i}} & \tau_{xy} &= \sum_i \tau_{xy_i} N_{\tau_{xy_i}} & \tau_{yy} &= \sum_i \tau_{yy_i} N_{\tau_{yy_i}} \end{aligned} \right\} \quad (4.7)$$

于是

$$\delta f = \sum_i N_{f_i} \delta f_i \quad (4.8)$$

其中  $f$  为  $p, u, v, \tau_{xx}, \tau_{xy}, \tau_{yy}$ 。将(4.7)、(4.8)代入(4.1)~(4.6)，且计及  $\delta f_i$  的任意性，便可得到  $6 \times n_J$  个方程。其中  $n_J$  为网格节点数。这就形成了有限元的代数方程组。

### 2. 形函数的选用

上述(4.7)、(4.8)式中的  $N_f$  是形函数。对于不同变量采用不同的形函数。由于  $u, v$  在方程中出现比较高阶的导数，故采用二阶形函数。而  $p, \tau_{xx}, \tau_{xy}, \tau_{yy}$  则仍用一阶形函数。与此相适应，不同的变量的离散点是不相同的。 $u, v$  和  $p, \tau_{xx}, \tau_{xy}, \tau_{yy}$  在三角形单元中的离散点如图 2 所示。对于  $u, v$ ，形函数为

$$\left. \begin{aligned} F_i &= \xi_i(2\xi_i - 1) & (i=1, 2, 3) \\ F_4 &= 4\xi_1\xi_2, & F_5 = 4\xi_2\xi_3, & F_6 = 4\xi_3\xi_1 \end{aligned} \right\} \quad (4.9)$$

对于  $p, \tau_{xx}, \tau_{xy}, \tau_{yy}$  的形函数为

$$F_i = \xi_i \quad (i=1, 2, 3)$$

其中  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  为形参， $\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 1$ 。

采用上面不统一的形函数，在 1, 2, 3 点上可以建立  $6 \times 3$  个方程，而在 4, 5, 6 点则建立  $2 \times 3$  个方程。这种构成有限元方程的方法称作混合有限元。

### 3. 非线性方程组的求解

以上所建立的方程是非线性方程组。由于变量个数非常多，并且是高度稀疏的，所以求解是相当困难的。一般采用拟牛顿法，问题在于给出尽量接近真实解的初值。最常用的方法是首先假定流速很小，从而略去高阶量，使方程成为线性化方程，于是可以求得解，再以此为初值求解真正的流场。在将问题线性化后，就不能采用混合元。而单一地采用线性形函数，为了避免这样作，也为了以后计算可以加速，这里引用连续微分的方法<sup>[5]</sup>。具体作法如下：

设所求解的方程为

$$F(x) = 0 \quad (4.10)$$

其中  $F, x$  都是  $n$  维向量。设  $1/h = N$ ，解方程过程为

$$\left. \begin{aligned} x^1 &= x^0 - h[F'(x^0)]^{-1}F(x^0) \\ x^{k+\frac{1}{2}} &= x^k + \frac{1}{2}(x^k - x^{k-1}) \\ x^{k+1} &= x^k - h[F'(x^{k+\frac{1}{2}})]^{-1}F(x^k) \\ x^{k+1} &= x^k - [F'(x^k)]^{-1}F(x^k) \end{aligned} \right\} \quad (k=1, 2, \dots, N)$$

$$(k=N+1, N+2, \dots, N+1)$$

这样做可以放松对初值的选用，加速计算。

## 五、数值结果

记  $Re = \rho u_m T / \mu$ ，其中  $u_m$  为进口最大速度， $T$  为进口通道半宽。又设  $\lambda_1 = 0.15, \lambda_2 = 0.025, \mu_0 = 0.02, \alpha = 45^\circ, d = 0.75, T = 1.0$ ，网格选用如图 3 所示。为了使出口与 Poiseuille 流动相吻合，需要选择  $OE$  和  $OF$  足够长。本文选  $OE = 3, OF = 3.7$ 。这里保证

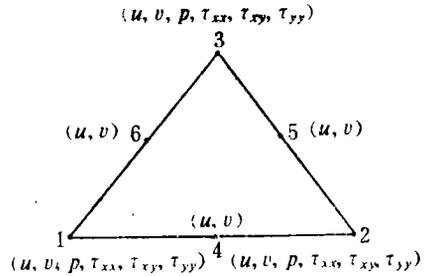


图 2

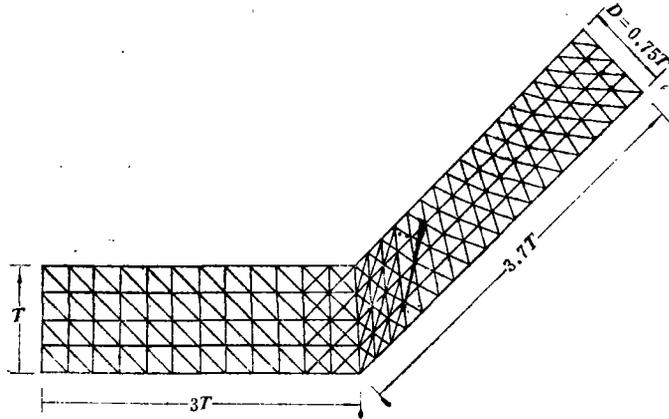


图 3

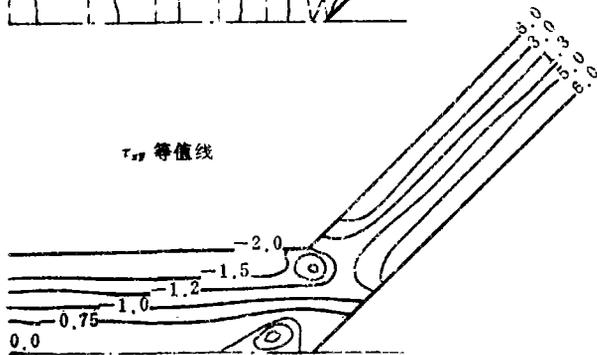
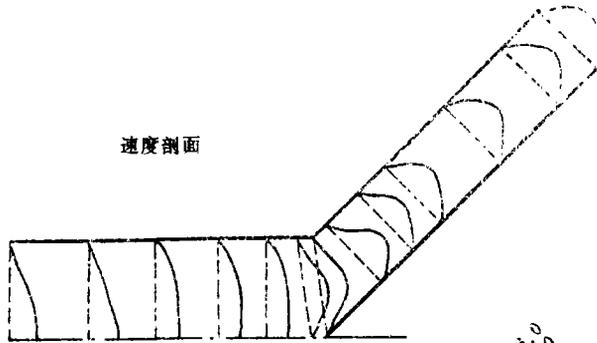
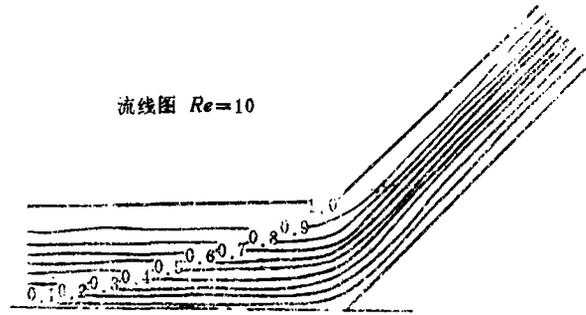


图 4

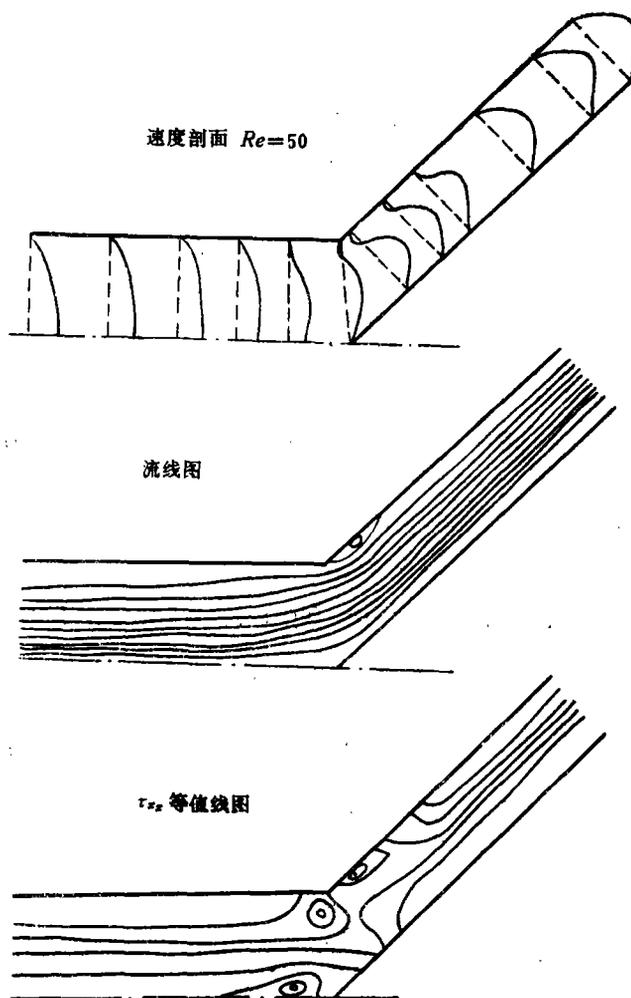


图 5

直槽道部份长是宽的 3 倍以上。由于计算机容量的限制，在纵向用了 61 个点，横向为 9 个点，在拐角处又如图 3 加密了网格点。对于  $[F'(x)]^{-1}$  的计算，考虑到  $F'(x)$  是大型稀疏阵，所以用随机分布稀疏阵求解法求解。

本文给出  $Re=10$ ， $Re=50$  二个结果，对于  $Re=10$  的情况，则用极缓流动的线化方程的解作为初始值。选  $N=10$ ；然后再用牛顿法继续求解。对于  $Re=50$ ，则以  $Re=10$  的解为初始值，再选  $N=10$ ，计算得出比较好的初值，再用牛顿法求解。

由图 4~5 中可以看到解的情况。当  $Re=10$  时无明显回流区， $Re=50$  时则不然。

## 六、结 论

本文表明，用有限元法计算复杂形状流场中的非牛顿流动是可行的。用有限元法，内存比较大，计算时间也相当长，在 M150 机上作一次迭代， $9 \times 61$  个点要用近 20 分钟。在开始阶

段, 寻找初值需要用比较多的计算时间。有限元法的明显优点是对角点不必作特殊的处理。只需将网格点加密。实际上, 在差分计算时, 有人<sup>[2]</sup>对角点作了局部解析解的处理, 对于局部有回流的情况, 这种解析处理并非合理。相对地说, 有限元法计算有较大的适应性。

### 参 考 文 献

- [1] Pedley, T. J., *The Fluid Mechanics of Large Blood Vessels*, Cambridge University Press (1980).
- [2] Bramley, J. S. and S. C. D. Dennis, A numerical treatment of 2-D flow in a branching channel, 第八次国际数值流体力学会议, 亚琛 (1982).
- [3] Perrera, M. G. N. and J. K. Walters, Long-range memory effects in flows involving abrupt changes in geometry, Part I, *J. of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 2 (1977), 49—81.
- [4] Kawahara, Mutsuto and Norio Takeuchi, Mixed finite element method for analysis of viscoelastic fluid flow, *Computer and Fluid*, 5 (1977), 33—45.
- [5] 李庆阳, 用连续微分法解非线性方程组, *数值方法和计算机应用*, 1 (1980), 53.

## Finite Element Analysis of Non-Newtonian Fluid Flow in 2-D Branching Channel

Su Ming-de

(Qinghua University, Beijing)

### Abstract

This paper presents finite element analysis of non-Newtonian fluid flow in 2-D branching channel. The Galerkin method and mixed finite element method are used. Here the fluid is considered as incompressible, non-Newtonian fluid with Oldyord differential-type constitutive equation. The non-linear algebraic equation system which is formulated with finite element method is solved by means of continuous differential method. The results show that finite element method is suitable for the analysis of non-Newtonian fluid flow with complex geometry.