

关于弹性半无限体表面的稳定性*

曹 光 中

(华东工程学院, 1985年3月13日收到)

摘 要

本文综合报道有关弹性半无限体表面稳定性的若干工作。对于不可压缩弹性半无限体, 概述在双向受载下自由表面的失稳分析, 给出失稳的临界条件。对于可压缩弹性材料情况, 分析了由标准材料组成的半无限体的表面轴对称失稳, 得到失稳临界参数对于材料参数的依赖关系。

一、引 言

所谓弹性半无限体表面的失稳或屈曲, 是指在载荷或变形达到某些临界值下, 该半无限体表面可能不再保持通常的平面形状。研究半无限体, 或者更一般的层-半无限体组合的表面稳定性, 除本身的理论意义外, 还在一定程度上同诸如地质构造的褶皱、地壳的屈曲(与地震发生相关)和史前的造山运动^[1]等的探讨有关, 已经引起相当的注意。

早在三十年代, Biot利用独创的“增量变形理论”, 开创性地对 Mooney 型弹性半无限体作过表面失稳分析(详见1965年出版的专著[2])。1973年, Brunelle^[1]对于可压缩弹性半无限体和可压缩弹性基础上的弹性层, 应用Novozhilov在[3]中为叠加在大变形上的小变形导出的场方程, 讨论了同样的问题。1980年, Dorris 和 Nemat-Nasser^[4]将半无限体的表面稳定性处理为层-半无限体组合的相应问题的一种极限情形, 考察了弹性或弹塑性的层和半无限体的不同组合情况。

在上述文献中, 问题的处理途径虽各不相同, 但主要限于平面应变或平面增量变形情况的研讨。本文拟介绍近年来我们在这方面的一些工作, 其中, 第三节的主要内容未曾发表过。对于不可压缩弹性半无限体, 应用“小变形叠加大变形上”的分析方法, 分别考察了在平行于自由表面的两个互相垂直方向上, 该类半无限体承受相同均匀压缩下的表面轴对称和非轴对称失稳问题^[5,6], 以及双向承受不同均匀载荷下的表面失稳问题^[7], 得到各自的失稳临界条件。对于Mooney型弹性半无限体, [7]中导出的临界主伸缩比(critical principal stretch ratios)关系与文献[2]完全一致, 并且作为特殊情形, 概括了[5,6]中得到的结果, 特别是确定和讨论了双向临界载荷之间的相互关系。对于可压缩弹性半无限体, 分析了由标准材料(standard material)组成的半无限体的表面轴对称失稳问题, 利用参数摄动和分离变量的方法求得失稳临界参数同材料参数之间的依赖关系。标准材料是线弹性材料的直接推

* 钱伟长推荐。

广, 具有一定的典型性。对于以标准材料为其特殊情形的谐和材料, (harmonic material), 其半无限体表面平面应变失稳的临界条件, 在[8]中用复变函数方法分析若干谐和弹性体的失稳问题时一并得到, 且与其中某些形体的失稳条件完全相同。在上述这些工作中, 都假定弹性半无限体在表面失稳前的变形是有限的, 且不计体力的作用。

二、不可压缩弹性半无限体表面的失稳

继上面已经提到的Biot的奠基性工作, 笔者^[5]首先考察了不可压缩弹性半无限体在轴对称受压下的表面轴对称失稳问题, 对于Mooney型弹性半无限体, 得到自由表面轴对称失稳时沿压缩方向的临界伸缩比

$$\lambda_c = 0.666 \quad (2.1)$$

而平面应变失稳下的相应值是0.544^[2]。

在[6]中, 吴建衡和笔者又进一步讨论了不可压缩弹性半无限体在轴对称受压下的表面失稳问题, 变形不限于轴对称的, 得到自由表面失稳的临界条件为

$$\lambda^3 \frac{b(\lambda) + a(\lambda)\lambda^6}{\beta(\lambda)} + \lambda^6 + 2\lambda^3 - 1 = 0 \quad (2.2)$$

其中 $a(\lambda)$, $b(\lambda)$ 和 $\beta(\lambda)$ 为与材料特性有关的函数, λ 为沿压缩方向的伸缩比。对于Mooney型半无限体, (2.2)变成

$$\lambda^9 + \lambda^6 + 3\lambda^3 - 1 = 0 \quad (2.3)$$

解出的临界伸缩比值同(2.1)。不同于[5]中的分离变量处理, 这里应用的是三维调和函数解法。

对于更为一般的情形, 即不可压缩弹性半无限体在平行于表面的两个互相垂直方向上承受不同均匀载荷下自由表面的失稳问题, 其分析和讨论概述如下(详见[7])。

设 Z_i 和 z_i ($i=1, 2, 3$)分别为弹性体内任一点在变形前后的直角坐标。在均匀变形状态附近的变形可表示为一变换 $z_i = \lambda_i Z_i + u_i(Z_1, Z_2, Z_3)$ (不求和), 其中 λ_i 为主伸缩比, u_i 及其导数 $u_{i,j}$ (下标中的逗号标记对其后相应变形前坐标的求导运算) 与有限均匀变形相比可视为小量。略去二阶及二阶以上小量, 由Piola应力平衡方程(无体力)和不可压缩性条件得到 u_i 和 \dot{p} (增量静水压力) 应满足的线性偏微分方程组

$$A(\lambda_1)u_{1,11} + B(\lambda_3)u_{1,22} + B(\lambda_2)u_{1,33} + C(\lambda_3)u_{2,21} + C(\lambda_2)u_{3,31} - \lambda_2\lambda_3\dot{p}_{,1} = 0 \quad (2.4)$$

$$B(\lambda_3)u_{2,11} + A(\lambda_2)u_{2,22} + B(\lambda_1)u_{2,33} + C(\lambda_3)u_{1,12} + C(\lambda_1)u_{3,32} - \lambda_3\lambda_1\dot{p}_{,2} = 0 \quad (Z_3 > 0) \quad (2.5)$$

$$B(\lambda_2)u_{3,11} + B(\lambda_1)u_{3,22} + A(\lambda_3)u_{3,33} + C(\lambda_2)u_{1,13} + C(\lambda_1)u_{2,23} - \lambda_1\lambda_2\dot{p}_{,3} = 0 \quad (2.6)$$

$$\lambda_2\lambda_3u_{1,1} + \lambda_3\lambda_1u_{2,2} + \lambda_1\lambda_2u_{3,3} = 0 \quad (2.7)$$

在半无限体的表面, u_i 和 \dot{p} 应满足无载荷的边界条件

$$B(\lambda_2)u_{1,3} + (\lambda_2\dot{p} - 2\lambda_3\lambda_1W_2)u_{3,1} = 0 \quad (2.8)$$

$$B(\lambda_1)u_{2,3} + (\lambda_1\dot{p} - 2\lambda_2\lambda_3W_2)u_{3,2} = 0 \quad (Z_3 = 0) \quad (2.9)$$

$$[D(\lambda_2) - \lambda_2\dot{p}]u_{1,1} + [D(\lambda_1) - \lambda_1\dot{p}]u_{2,2} + A(\lambda_3)u_{3,3} - \lambda_1\lambda_2\dot{p} = 0 \quad (2.10)$$

这里, 函数 $A(\lambda)$, $B(\lambda)$, $C(\lambda)$ 和 $D(\lambda)$ 以及 W_2 都与材料特性和均匀变形状态有关, \dot{p} 为均匀

变形下的静水压力。

所谓不可压缩弹性半无限体表面的失稳问题，就是方程组(2.4)~(2.7)连同边界条件(2.8)~(2.10)，在什么条件下存在非平凡解的特征值问题。

引进函数 $\phi = \phi(Z_1, Z_3)$ ， $\psi = \psi(Z_2, Z_3)$

令

$$u_1 = \lambda_1 \phi, \quad u_2 = \lambda_2 \psi, \quad u_3 = -\lambda_3 (\phi_{,1} + \psi_{,2}) \tag{2.11}$$

不可压缩性条件(2.7)自然满足。代(2.11)入(2.4)~(2.6)并消去 \dot{p} ，得 ϕ 和 ψ 分别满足的方程为

$$\begin{aligned} \phi_{,3333} + a(\lambda_2, \lambda_3)\phi_{,3311} + \lambda_2^2 \lambda_3^4 \phi_{,1111} &= 0 \\ \psi_{,3333} + a(\lambda_1, \lambda_3)\psi_{,3322} + \lambda_1^2 \lambda_3^4 \psi_{,2222} &= 0 \end{aligned}$$

其中

$$a(\lambda_\alpha, \lambda_\beta) = \frac{A(\lambda_\alpha^{-1} \lambda_\beta^{-1}) - 2\lambda_\alpha \lambda_\beta^2 C(\lambda_\alpha) + \lambda_\alpha^2 \lambda_\beta^4 A(\lambda_\beta)}{B(\lambda_\alpha)}$$

以

$$\phi = \frac{1}{I_1^2} \exp[k_1 l_1 Z_3] \sin l_1 Z_1, \quad \psi = \frac{1}{I_2^2} \exp[k_2 l_2 Z_3] \sin l_2 Z_2$$

的形式求解此特征值问题，得自由表面可能失稳的临界条件为

$$\begin{aligned} \lambda_\alpha^2 A(\lambda_\alpha) + \lambda_\beta^2 A(\lambda_\beta) - 2\lambda_\alpha \lambda_\beta C(\lambda_{3-\alpha}) \\ + \lambda_\beta (\lambda_\alpha + 2\lambda_\beta - \lambda_{3-\alpha} \lambda_\beta^3) B(\lambda_{3-\alpha}) = 0 \quad (\alpha=1 \text{ 或 } 2) \end{aligned} \tag{2.12}$$

在双向承受相同均匀压缩的特殊情形下， $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ ， $\lambda_3 = \lambda^{-2}$ ，条件(2.12)即变为(2.2)。

对于Mooney型弹性半无限体，应变能密度 W 是 I_1 和 I_2 （左Cauchy-Green变形张量的第一和第二不变量）的线性函数，由(2.12)可确定自由表面失稳的临界主伸缩比应满足关系式

$$\lambda_{1c}^2 \lambda_{2c} = 0.296 \quad \text{或} \quad \lambda_{1c} \lambda_{2c}^2 = 0.296$$

这同Biot的结果^[2]完全一致。在平面应变、单向压缩和双向受相同压缩三种特殊情形下，自由表面失稳时沿压缩方向的临界伸缩比分别为0.544、0.444和0.666，同文献[2]、[5]、[6]中的结果吻合。

通过计算，得到表面失稳的无量纲临界载荷参数

$$\begin{aligned} t_{1c} &= -1.825\zeta \lambda_{1c}^{-2} - 20.889\lambda_{1c}^2 \\ t_{2c} &= (\zeta + \lambda_{1c}^2)(0.175\lambda_{1c}^{-2} - 22.889\lambda_{1c}^2) \end{aligned}$$

这里， $t_{1c} = T_{1c}/W_1$ ； $t_{2c} = T_{2c}/W_1$ ； $\zeta = W_2/W_1$ ； $W_\alpha = \partial W / \partial I_\alpha$ ； T_{1c} 、 T_{2c} 为临界Cauchy应力。 t_{1c} 和 t_{2c} 的相互关系如图1所示。由图1可见，至少对于Mooney型弹性半无限体，即使在一个方向上受若干拉载的情况下，只要垂直方向上的压载适当，同样可能出现表面失稳现象。

还要指出，由于失稳临界条件与 l_1 、 l_2 无关，

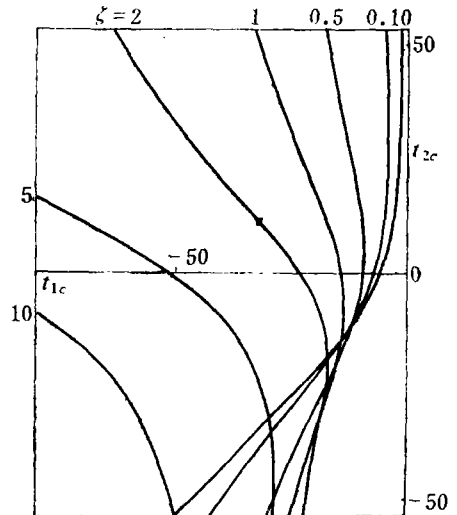


图 1

所有波长都可在解中出现。根据问题的齐次线性因而可叠加性, 在临界载荷下失稳的自由表面可能呈现任意的柱面形状^[2]。对于双向受相同压缩的临界情况, 自由表面的失稳形状有可能是任何一对母线互相垂直的柱面的叠合。

三、可压缩弹性半无限体表面的失稳

对于可压缩弹性半无限体, 将以标准材料 (standard material) 组成的半无限体为典型, 考察自由表面的轴对称失稳问题。

我们将直接引用 Sensenig 在文献[9]中关于有限变形标准弹性体平衡状态分叉的摄动问题的表述。为节省篇幅和便于查考, 符号标记亦尽量采取该文献中所用的。

对于标准弹性材料, 应变能密度

$$W = \frac{\lambda}{2} s_1^2 + \mu s_2 \quad (3.1)$$

其中, s_i ($i=1, 2$) 分别为应变张量特征值的 i 次幂之和, λ 和 μ 为两常量 (当它们是 Lamé 常数时, W 即为经典应变能密度)。

按[9], 在曲线坐标 θ_i ($i=1, 2, 3$)下, 应力与变形之间的关系为

$$Q_{ij} = (\lambda s_1 - 2\mu) C_{ij} + 2\mu P_{ij} \quad (3.2)$$

不计体力的平衡方程可表为

$$2\mu P^{ij}|_j + (\lambda s_1 - 2\mu) C^{ij}|_j + \lambda C^{ij} \frac{\partial s_1}{\partial \theta_j} = 0 \quad (3.3)$$

其中

$$s_1 = C^{ij} P_{ij} - 3 \quad (3.4)$$

这里, Q_{ij}, C_{ij}, P_{ij} 分别为 Piola 应力、转动和变形梯度张量的 θ -分量 (曲线坐标分量), $P_{ij} = u_i|_j$, u_i 为变形后任一质点的位置矢量的 θ -分量, $|_j$ 标记对 θ_j 的协变导数。

假定失稳问题的屈曲解可表示成某一参数 $\delta \geq 0$ 的函数, 当 $\delta=0$ 时它对应于代表通常平衡状态的简单解, 在 $\delta > 0$ 下则不同于该简单解而从简单解中“分叉”出来。再假定依赖于参数 δ 的诸量在 $\delta=0$ 处均存在关于 δ 的导数。对于任一量 A , 约定用 \dot{A} 和 \dot{A} 分别标记该量及其对 δ 的导数在 $\delta=0$ 的值。对于标准弹性体, \dot{Q}^{ij} 的表达式和 \dot{u}^i 所满足的方程分别为

$$\dot{Q}^{ij} = (\lambda \dot{s}_1 - 2\mu) \dot{C}^{ij} + \lambda \dot{s}_1 \dot{C}^{ij} + 2\mu \dot{P}^{ij} \quad (3.5)$$

$$2\mu \dot{P}^{ij}|_j + (\lambda \dot{s}_1 - 2\mu) \dot{C}^{ij}|_j + \lambda \frac{\partial \dot{s}_1}{\partial \theta_j} \dot{C}^{ij} + \lambda \frac{\partial s_1}{\partial \theta_j} \dot{C}^{ij} + \lambda \dot{s}_1 \dot{C}^{ij}|_j = 0 \quad (3.6)$$

对于表面失稳的轴对称问题, 宜用柱坐标

$$\theta_1 = r, \theta_2 = \theta, \theta_3 = z \quad (3.7)$$

设变形前任一质点的直角坐标为 x_1, x_2, x_3 , 由坐标变换

$$x_1 = r \cos \theta, x_2 = r \sin \theta, x_3 = z \quad (3.8)$$

得度量张量

$$[g_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

对于弹性半无限体 ($z \leq 0$) 由自由表面失稳的轴对称问题, 边界条件可表述为,

1. 表面自由, 或者说, 不受任何外力作用, 即

$$Q^{i3} = 0, \quad i=1, 2, 3, \quad \text{当 } z=0 \text{ 时} \quad (3.10)$$

2. 侧面只受径向均匀压缩, 即

$$Q^{21} = Q^{31} = 0, \quad \text{当 } r \rightarrow \infty \text{ 时} \quad (3.11)$$

3. 无穷远处的位移与均匀变形状态一致, 即

$$u^1 \sim \lambda_1 r, \quad u^3 \sim \lambda_3 z, \quad \text{当 } \sqrt{r^2 + z^2} \rightarrow \infty \text{ 时} \quad (3.12)$$

这里, λ_1 和 λ_3 分别为径向和轴向的伸缩比.

首先, 寻求对应于均匀变形状态的简单解

$$u^1 = \lambda_1 r, \quad u^2 = 0, \quad u^3 = \lambda_3 z \quad (3.13)$$

不难验证, (3.13) 满足平衡方程 (3.3). 由 (3.2) 知 $[Q^{ij}]$ 呈对角形, 且

$$\left. \begin{aligned} Q^{11} &= 2(\lambda + \mu)\lambda_1 + \lambda\lambda_3 - 3\lambda - 2\mu \\ Q^{22} &= \frac{1}{r^2} Q^{11} \\ Q^{33} &= 2\lambda\lambda_1 + (\lambda + 2\mu)\lambda_3 - 3\lambda - 2\mu \end{aligned} \right\} \quad (3.14)$$

代(3.14)入边界条件(3.10), 得

$$\lambda_3 = \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu} - \frac{2\lambda}{\lambda + 2\mu}, \quad \lambda_1 = \frac{1 + \nu}{1 - \nu} - \frac{2\nu}{1 - \nu} \lambda_3 \quad (3.15)$$

这里, ν 为相当于Poisson比的常量.

设 T 为 (母线平行于 z 轴的) 任一圆柱侧面单位变形后面积上的正压力值, 则可算得

$$T = \frac{2\mu(3\lambda + 2\mu)(1 - \lambda_1)}{(\lambda + 2\mu)\lambda_1\lambda_3} = \frac{E(1 - \lambda_1)}{\lambda_1(1 + \nu - 2\nu\lambda_1)} \quad (3.16)$$

其中常量 E 相当于Young氏模量.

我们的主要目标是寻求轴对称的屈曲解, 即令

$$u^1 = u^1(r, z, \delta) = \lambda_1 r + V^1, \quad u^2 = 0, \quad u^3 = u^3(r, z, \delta) = \lambda_3 z + V^3 \quad (3.17)$$

其中, $\lambda_1, \lambda_3, V^1$ 和 V^3 均依赖于参数 δ . 将(3.17)对 δ 求导并在 $\delta=0$ 处取值, 得

$$\dot{u}^1 = \dot{\lambda}_1 r + \dot{V}^1, \quad \dot{u}^3 = \dot{\lambda}_3 z + \dot{V}^3 \quad (3.18)$$

代入(3.6), 经过协变求导等运算, 可得 \dot{V}^1 和 \dot{V}^3 应满足的方程组

$$\left. \begin{aligned} (A+B) \frac{\partial^2 \dot{V}^1}{\partial r^2} + A \frac{\partial^2 \dot{V}^1}{\partial z^2} + B \frac{\partial^2 \dot{V}^3}{\partial z \partial r} \\ + (A+B) \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{V}^1}{\partial r} - (A+B) \frac{1}{r^2} \dot{V}^1 = 0 \\ A \frac{\partial^2 \dot{V}^3}{\partial r^2} + (A+B) \frac{\partial^2 \dot{V}^3}{\partial z^2} + B \frac{\partial^2 \dot{V}^1}{\partial z \partial r} \\ + B \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{V}^1}{\partial z} + A \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{V}^3}{\partial r} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.19)$$

其中

$$A = 2\mu \frac{\dot{\lambda}_1}{\lambda_1 + \dot{\lambda}_3}, \quad B = \lambda + 2\mu \frac{\dot{\lambda}_3}{\lambda_1 + \dot{\lambda}_3} \quad (3.20)$$

设 \dot{V}^1 和 \dot{V}^3 可分离变量, 即表

$$\dot{V}^1 = \alpha(r)a(z), \quad \dot{V}^3 = \beta(r)b(z) \quad (3.21)$$

代入(3.19), 得

$$\left. \begin{aligned} (A+B) \left[\alpha''(r) + \frac{1}{r} \alpha'(r) - \frac{1}{r^2} \alpha(r) \right] a(z) \\ + A\alpha(r)a''(z) + B\beta'(r)b'(z) = 0 \\ (A+B)\beta(r)b''(z) + A \left[\beta''(r) + \frac{1}{r} \beta'(r) \right] b(z) \\ + B \left[\alpha'(r) + \frac{1}{r} \alpha(r) \right] a'(z) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.22)$$

如取

$$\alpha(r) = J_1(kr), \quad \beta(r) = J_0(kr) \quad (k > 0) \quad (3.23)$$

J_1 和 J_0 分别为第一类的一阶和零阶Bessel函数, 则必满足相应的微分方程

$$\alpha'' + \frac{1}{r} \alpha' + \left(k^2 - \frac{1}{r^2} \right) \alpha = 0, \quad \beta'' + \frac{1}{r} \beta' + k^2 \beta = 0 \quad (3.24)$$

以及关于 J_0 和 J_1 的熟知的递推公式

$$\alpha' + \frac{1}{r} \alpha = k\beta, \quad \beta' = -k\alpha \quad (3.25)$$

利用(3.24)和(3.25), (3.22)各方括号中含有 α 和 β 导数的表达式均可经 α 和 β 自身表出. 于是, (3.22)可分离变量得常微分方程组

$$Ac'(z) - k(A+B)d(z) = 0, \quad (A+B)d'(z) - kAc(z) = 0 \quad (3.26)$$

其中,

$$c(z) = a'(z) + kb'(z), \quad d(z) = b'(z) + ka(z) \quad (3.27)$$

(3.26)的通解为

$$c(z) = (A+B)(C'e^{kz} + D'e^{-kz}), \quad d(z) = A(C'e^{kz} - D'e^{-kz}) \quad (3.28)$$

C' 和 D' 为任意积分常数. 代(3.28)入(3.27)并积分所得的方程组, 得其通解为

$$\left. \begin{aligned} a(z) &= (C_1 + C_2 z) e^{kz} + (C_3 + C_4 z) e^{-kz} \\ b(z) &= -\left(C_1 - \frac{\xi}{k} C_2 + C_2 z \right) e^{kz} + \left(C_3 + \frac{\xi}{k} C_4 + C_4 z \right) e^{-kz} \end{aligned} \right\} \quad (3.29)$$

这里, C_1, C_2, C_3 和 C_4 为任意积分常数,

$$\xi = 1 + \frac{2A}{B} \quad (3.30)$$

由边界条件(3.12)知, 当 $z \rightarrow -\infty$ 时必须有 $a(z) \rightarrow 0$ 和 $b(z) \rightarrow 0$. 这意味着 $C_3 = C_4 = 0$, 则解的形式应为

$$a(z) = (C_1 + C_2 z) e^{kz}, \quad b(z) = -\left(C_1 - \frac{\xi}{k} C_2 + C_2 z \right) e^{kz} \quad (3.31)$$

边界条件(3.10)意味着

$$\left. \begin{aligned} 2\mu k C_1 + [A + (A - 2\mu)\xi] C_2 &= 0 \\ -2\mu k C_1 + (\lambda + 2\mu)(\xi - 1) C_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.32)$$

此线性代数方程组对 C_1 和 C_2 存在非零解的条件是其系数行列式等于零, 即

$$A(\xi + 1) + \lambda(\xi - 1) - 2\mu = 0$$

或

$$2(2\nu^2 + 2\nu - 1)\lambda_1^2 - 5\nu(1 + \nu)\lambda_1 + (1 + \nu)^2 = 0 \quad (3.33)$$

作为 λ_1 的二次代数方程, (3.33)的两个根

$$\lambda_1 = \frac{(1 + \nu)(5\nu \pm \sqrt{9\nu^2 - 16\nu + 8})}{4(2\nu^2 + 2\nu - 1)} \quad (3.34)$$

中只有根号前带负号的那个根有意义。

当沿压缩方向的径向伸缩比达到临界值

$$\lambda_{1c} = \frac{(1 + \nu)(5\nu - \sqrt{9\nu^2 - 16\nu + 8})}{4(2\nu^2 + 2\nu - 1)} \quad (3.35)$$

或径向压力达到相应的临界值

$$\begin{aligned} T_c &= \frac{E(1 - \lambda_{1c})}{\lambda_{1c}(1 + \nu - 2\nu\lambda_{1c})} \\ &= \frac{(2\nu^2 + 2\nu - 1)[(1 + \nu)\sqrt{9\nu^2 - 16\nu + 8} + 3\nu^2 + 3\nu - 4]}{(1 + \nu)^2[(3\nu^2 - 2\nu + 1)\sqrt{9\nu^2 - 16\nu + 8} - \nu(7\nu^2 - 18\nu + 9)]} E \end{aligned} \quad (3.36)$$

时, 方程组 (3.32) 必存在非零解 C_1 和 C_2 , 因而有非零的 $a(z)$ 和 $b(z)$, 使由 (3.18)、(3.20) 和 (3.23) 确定的 \dot{u}^1 和 \dot{u}^3 同时满足方程组 (3.6) 和边界条件 (3.10) ~ (3.12)。这就是说, 除了存在简单解 (3.13) 外, 还“分叉”出屈曲解

$$\left. \begin{aligned} u^1 &= \lambda_1 r + \delta \alpha(r) a(z) + O(\delta^2) \\ u^3 &= \lambda_3 z + \delta \beta(r) b(z) + O(\delta^2) \end{aligned} \right\} \quad (3.37)$$

这里, 当 $\delta \rightarrow 0$ 时, $\lambda_1 \rightarrow \lambda_{1c}$, $\lambda_3 \rightarrow \lambda_{3c}$ (轴向临界伸缩比)。因此, (3.35) 或 (3.36) 是标准材料所组成的弹性半无限体自由表面可能失稳的一个临界条件。

按 (3.35), 对于 $0 < \nu \leq 0.5$, 表面失稳的径向临界伸缩比 λ_{1c} 在 0.707 与 0.75 之间取值, 此临界伸缩比 λ_{1c} 和临界压力 T_c 同参数 ν 的依赖关系如图 2 所示, 不同于 Brunelle^[1] 在平面应变失稳下所得的结果。

最后要提及的是, 对于以标准材料为其特殊情形的谐和材料 (harmonic material) 而言, 所组成的弹性半无限体的平面应变失稳条件是

$$\chi(r) = \frac{4H'(r)H''(r) - rH'''(r) - H'(r)}{rH''(r) - H'(r)} = 0 \quad (3.38)$$

其中, $r = \lambda_1 + \lambda_2$, λ_1 和 λ_2 分别为平行和垂直于表面两方面上的伸缩比, H 为表征材料特性的函数^[8]。对于标准材料,

$$H(R) = \frac{1}{2} \frac{(1 - \nu)}{(1 - 2\nu)} R^2 - \frac{1}{1 - 2\nu} R + \frac{1}{1 - 2\nu} \quad (3.39)$$

由失稳条件 (3.38) 解出的临界伸缩比为

$$\lambda_{1c} = \frac{1}{2}, \quad \lambda_{2c} = \frac{2 - \nu}{2(1 - \nu)} \quad (3.40)$$

所有这些结果, 与文献 [10] 中关于无限谐和弹性体在平行于裂纹面的压缩下裂纹面平面应变失稳的结果完全相同。

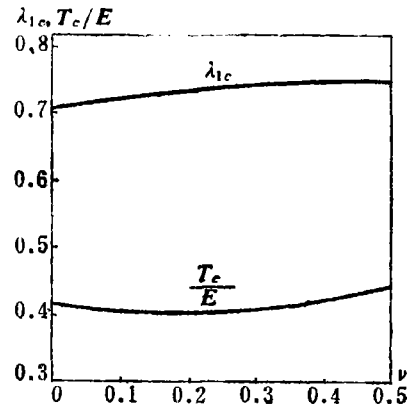


图 2

四、讨 论

以上我们对不可压缩弹性材料和可压缩的标准弹性材料以至更广泛的谐和材料所组成的半无限体, 在多种受载和变形情况下自由表面的失稳问题进行了分析和介绍, 给出了各自的失稳临界条件。我们发现, 在有些情况下, 半无限体表面的失稳同其它弹性体的屈曲具有相同的临界条件。例如, 由Mooney型材料组成的弹性半无限体的表面和同一材料的无限体中的裂纹, 在平行于表面或裂纹的压缩下的平面应变失稳条件, 都是沿压缩方向的临界伸缩比 $\lambda_{1c}=0.544^{[7][11]}$; 由谐和材料组成的半无限体的表面和正截面为半无限条状区域或可保角变换为圆或带圆孔无限平面的有限或无限谐和弹性体, 亦具有相同的失稳条件 $\chi(r)=0^{[8]}$, 等等。

尤其值得指出的是, 弹性半无限体在失稳临界载荷下的屈曲解往往是完全任意的, 或者说对应于同一临界载荷存在无穷多个屈曲解, 无从谈论对应的屈曲模式。既然无通常意义下的屈曲模式可言, 如何确定表面的失稳后(post-buckling)形状? 这一问题有待研究。

笔者对于美国芝加哥伊利诺大学吴建衡(Chien H. Wu)教授建议这方面的工作, 并提供有益的讨论和合作研究的机会, 深表谢意。

参 考 文 献

- [1] Brunelle, E. J., Surface instability due to initial compressive stress, *Bulletin of the Seismological Society of America*, **63**, 6 (1973), 1885—1893.
- [2] Biot, M. A., *Mechanics of Incremental Deformations*, Wiley (1965).
- [3] Novozhilov, V. V., *Nonlinear Theory of Elasticity*, Graylock (1953).
- [4] Dorris, J. F. and S. Nemat-Nasser, Instability of a layer on a half space, *J. Appl. Mech.*, **47** (1980), 304—312.
- [5] 曹光中, 不可压缩弹性半空间的表面不稳定性——轴对称问题的分析, 华东工程学院学报, **1** (1984), 1—13.
- [6] Wu, C. H. (吴建衡) and G. Z. Cao (曹光中), Buckling of an axially compressed incompressible half space, *J. Struct. Mech.*, **11**, 1 (1983), 37—48.
- [7] 曹光中, 双向受载不可压缩弹性半无限体表面的稳定性, 固体力学学报 (待发表).
- [8] Wu C. H. and G. Z. Cao, Buckling problems in finite plane elasticity——harmonic materials, *Quart. Appl. Math.*, **41**, 4 (1984), 461—474.
- [9] Sensenig, C. B., Instability of thick elastic solids, *Comm. Pure Appl. Math.*, **17** (1964), 451—491.
- [10] Wu, C. H., Plane-strain buckling of a crack in a harmonic solid subjected to crack-parallel compression, *J. Appl. Mech.*, **46** (1979), 597—604.
- [11] Wu, C. H., Plane-strain buckling of cracks in incompressible elastic solids, *J. Elast.*, **10**, 2 (1980), 163—177.

On the Surface Instability of Elastic Half Spaces

Cao Guang-zhong

(East China Institute of Technology, Nanjing)

Abstract

In this paper, we present some work on the surface instability of elastic half spaces. An analysis of surface instability of an incompressible half space under biaxial loading is summarized, and the critical condition for the onset of surface buckling is given. As an example in the case of compressible materials, the axisymmetric problem of surface instability for a half space made of a standard material is analyzed, and the dependence of buckling parameters on the material is revealed.